ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

M. ZELENÝ

1. Banachovy a Hilbertovy prostory

Označení. Symbol $\mathbf{F}$ bude vždy označovat množinu reálných nebo komplexních čísel.

Definice (opakování)**.** Nechť $(X, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbf{F}$. **Normou** na X rozumíme zobrazení $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ takové, že platí

(i) $\forall x \in X: \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \boldsymbol{o}$,
(ii) $\forall \lambda \in \mathbf{F}\ \forall x \in X: \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
(iii) $\forall x, y \in X: \ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $((X, +, \cdot), \|\cdot\|)$ nazýváme **normovaným lineárním prostorem**.

Věta 1.1. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Potom platí:*

(i) *Zobrazení $\rho\colon X \times X \to \mathbf{R}$ definované předpisem $\rho(x, y) = \|x - y\|$ je metrika na X.*
(ii) *Zobrazení $+\colon X \times X \to X$, $\cdot\colon \mathbf{F} \times X \to X$, $\|\cdot\|\colon X \to \mathbf{R}$ jsou spojitá.*

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že tyto normy jsou **ekvivalentní**, pokud existují kladné konstanty $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $c_1\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le c_2\|x\|_2$.

Věta 1.2. *Nechť $(X, \|\cdot\|_1)$ a $(X, \|\cdot\|_2)$ jsou normované lineární prostory. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) *Normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.*
(ii) *Existují kladné konstanty $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ takové, že*

$$a_1 B_{(X,\|\cdot\|_1)} \subset B_{(X,\|\cdot\|_2)} \subset a_2 B_{(X,\|\cdot\|_1)}.$$

Důsledek 1.3. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbf{F}$ opatřený ekvivalentními normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Potom $G \subset X$ je otevřená v $(X, \|\cdot\|_1)$, právě když je otevřená v $(X, \|\cdot\|_2)$.*

Definice. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $A \subset X$.

- Řekneme, že množina $A \subset X$ je **konvexní**, jestliže platí
$$\forall x, y \in A\ \forall \alpha \in [0, 1]: \ \alpha x + (1 - \alpha) y \in A.$$
- **Konvexní obal** množiny A definujeme předpisem
$$\operatorname{co} A = \bigcap \{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ je konvexní množina}\}.$$
- **Uzavřený konvexní obal** množiny A definujeme předpisem
$$\overline{\operatorname{co}}\, A = \bigcap \{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ je uzavřená a konvexní}\}.$$
- **Lineární obal** množiny A definujeme předpisem
$$\operatorname{span} A = \bigcap \{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ je vektorový podprostor}\}.$$

- **Uzavřený lineární obal** množiny A definujeme předpisem

$$\overline{\operatorname{span}}A = \bigcap\{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ je uzavřený vektorový podprostor}\}.$$

Věta 1.4 (opakování). *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor nad* $\mathbf{F}$. *Potom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ je norma na X.*

Lemma 1.5 (opakování). *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitární prostor nad* $\mathbf{F}$. *Potom je zobrazení*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \colon X \times X \to \mathbf{F}$$

spojité.

Věta 1.6 (Jordan – von Neumann). *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) *Na X existuje skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ takový, že $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro každé $x \in X$.*
(ii) *Norma $\|\cdot\|$ splňuje **rovnoběžníkové pravidlo**, tj.*

$$\forall x, y \in X:\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Definice. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků X. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **konverguje** k $x \in X$, pokud $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} x_j = x$.

Definice.

(i) Řekneme, že normovaný lineární prostor $(X, \|\cdot\|)$ je **Banachův**, jestliže (X, ρ), kde $\rho(x, y) = \|x - y\|$, je úplný metrický prostor.
(ii) Nechť X je unitární prostor. Pokud je X úplný vzhledem k metrice indukované normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, pak X se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

Věta 1.7. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) *Prostor $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův.*
(ii) *Je-li $\{x_n\}$ posloupnost prvků X splňující $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní.*

Věta 1.8. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Potom existuje Banachův prostor $(\widetilde{X}, \|\cdot\|)$ a lineární zobrazení $T\colon X \to \widetilde{X}$ takové, že*

- *zobrazení T je **izometrie**, tj. $\|T(x)\| = \|x\|$ pro každé $x \in X$,*
- $\overline{T(X)} = \widetilde{X}$.

Je-li X navíc unitární prostor, potom také $\widetilde{X}$ je Hilbertův.

Pokud existuje Banachův prostor Y a lineární izometrické zobrazení $L\colon X \to Y$ takové, že $\overline{L(X)} = Y$, potom existuje surjektivní lineární izometrie $S\colon \widetilde{X} \to Y$.

2. Operace s Banachovými prostory

- Nechť Z je uzavřený podprostor Banachova prostoru $(X, \|\cdot\|)$. Potom $(Z, \|\cdot\||_Z)$ je Banachův prostor.
- Nechť Z je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X nad $\mathbf{F}$. Potom relace $\sim$ definovaná na $X \times X$ předpisem $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Z$ je relace ekvivalence. Označíme třídu ekvivalence určenou prvkem $x \in X$ symbolem $[x]$ a položme

$$X/Z = \{[x];\ x \in X\}.$$

Pro $x, y \in X$, $c \in \mathbf{F}$ definujme

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y], \\ c[x] &= [cx], \\ \|[x]\|_{X/Z} &= \inf\{\|x - z\|;\ z \in Z\}. \end{aligned}$$

Potom je X/Z vzhledem k výše uvedeným operacím vektorový prostor nad $\mathbf{F}$ a $\|\cdot\|_{X/Z}$ je norma na X/Z.

Definice. Nechť Y je uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X. Potom normovaný lineární prostor X/Y nazýváme **faktorprostor prostoru X podle Y**.

Věta 2.1. *Nechť Y je uzavřený podprostor Banachova prostoru X. Potom X/Y je Banachův prostor.*

Definice. Nechť X je vektorový prostor, $A, B \subset\subset X$. Řekneme, že X je **algebraickým součtem** A a B, značíme $X = A \oplus B$, jestliže

- $A \cap B = \{\boldsymbol{o}\}$,
- $\operatorname{span}(A \cup B) = X$.

Podprostor B pak nazýváme **algebraický doplněk** A.

Věta 2.2. *Nechť X je vektorový prostor, $X = A \oplus B$, P_A, resp. P_B, jsou zobrazení přiřazující každému prvku $x \in X$ jednoznačně určené prvky $x_A \in A$, $x_B \in B$ takové, že $x = x_A + x_B$. Potom platí:*

(i) *P_A, P_B jsou lineární, $P_A + P_B = I$,*
(ii) *$P_A^2 = P_A$,*
(iii) *$A = \operatorname{Rng} P_A = \operatorname{Ker} P_B$, $B = \operatorname{Rng} P_B = \operatorname{Ker} P_A$,*
(iv) *je-li $P\colon X \to X$ lineární, $P^2 = P$, pak $X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Rng} P$, $P = P_{\operatorname{Rng} P}$, $I - P = P_{\operatorname{Ker} P}$.*

Definice. Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P\colon X \to X$ splňující $P^2 = P$ se nazývá **projekce**.

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$. Řekneme, že X je **topologickým součtem** A a B, značíme $X = A \oplus_t B$, jestliže je P_A spojitá.

Věta 2.3. *Nechť X je vektorový prostor, $Y \subset\subset X$, $X = Y \oplus A$. Potom X/Y je izomorfní s A, tj. existuje lineární bijekce.*

Definice. Nechť X je vektorový prostor, $Y \subset\subset X$. **Kodimenze** podprostoru Y je definována jako $\dim X/Y$.

3. Operátory a funkcionály

Věta 3.1. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *T je spojité,*
(ii) *T je spojité v $\boldsymbol{o}$,*
(iii) *existuje $C \geq 0$ takové, že $\|Tx\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$,*
(iii) *T je lipschitzovské,*
(iv) *T je stejnoměrně spojité.*

Definice. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbf{F}$. Potom $\mathcal{L}(X, Y)$ značí množinu všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y. Na $\mathcal{L}(X, Y)$ definujeme normu předpisem

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|;\ x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Věta 3.2. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

(i) *Je-li Y Banachův, pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův.*
(ii) *Pro $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ platí $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$.*

Definice. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.

- Řekneme, že $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je **izomorfismus** prostoru X na Y, pokud je T prosté, na a $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.
- Řekneme, že X a Y jsou **izomorfní**, pokud existuje izomorfismus T prostoru X na Y.
- Řekneme, že X a Y jsou **izometricky izomorfní**, pokud existuje $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, které je na a $\|Tx\| = \|x\|$ pro každé $x \in X$.

Věta 3.3. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Potom T je izomorfismus, právě když existují $c_1, c_2 > 0$ takové, že $c_1\|x\| \leq \|Tx\| \leq c_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

Důsledek 3.4. *Nechť X je vektorový prostor opatřený normami $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$. Normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní na X, právě když $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus.*

Věta 3.5. *Nechť X, Y jsou izomorfní normované lineární prostory. Je–li X Banachův, potom je i Y Banachův.*

Věta 3.6. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $X = Y \oplus Z$. Potom je ekvivalentní.*

(i) *Platí $X = Y \oplus_t Z$.*
(ii) *Zobrazení $x \mapsto (y, z)$, kde $y \in Y$, $z \in Z$ a $y + z = x$, je izomorfismus X na $Y \times Z$.*

4. Hilbertovy prostory

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor, $A, B \subset\subset H$. Podprostory A a B jsou **ortogonální**, jestliže pro každé $a \in A$, $b \in B$ platí $(a, b) = 0$. Značíme $A \perp B$. **Ortogonální doplněk** A definujeme jako

$$A^{\perp} = \{x \in H;\ (x, a) = 0 \text{ pro každé } a \in A\}.$$

Věta 4.1. *Nechť H je unitární prostor, $A \subset\subset H$. Potom $A^{\perp}$ je uzavřený.*

Věta 4.2. *Nechť H je Hilbertův prostor a F je uzavřená konvexní neprázdná množina v H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in F$ takové, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$.*

Věta 4.3. *Nechť H je Hilbertův prostor, $F \subset\subset H$ je uzavřený a $x \in H$. Pak $y \in F$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$ právě tehdy, když $x - y \in F^{\perp}$.*

Věta 4.4 (Riesz)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor, $F \subset\subset H$ je uzavřený. Potom $H = F \oplus_t F^\perp$ a projekce $P_F : H \to F$ splňuje $\|P_F\| \le 1$.*

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor, I je neprázdná množina a $x_i \in X$, $i \in I$. Potom $\sum_{i\in I} x_i = x$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists A \subset I, \text{ konečná } \forall B \subset I, B \text{ konečná}, A \subset B : \ \Big\| x - \sum_{i \in B} x_i \Big\| < \varepsilon.$$

Poznámka. Nechť $\{x_n\} \subset X$, X je normovaný lineární prostor.

(i) Je-li $x = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n$, pak $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.
(ii) Je-li $\sum_{n\in\mathbf{N}} \|x_n\| < \infty$ a X je Banachův, pak existuje $\sum_{n\in\mathbf{N}} x_n$.

Definice. Nechť X je unitární prostor, $A = \{a_i;\ i \in I\} \subset X$. Řekneme, že A je

- **ortonormální množina**, jestliže
  - $\forall a, b \in A, a \neq b :\ (a, b) = 0$,
  - $\forall a \in A :\ \|a\| = 1$;
- **maximální ortonormální** množina, pokud je A ortonormální a $A^\perp = \{\boldsymbol{o}\}$;
- **úplná ortonormální** množina, pokud je A ortonormální a $\overline{\mathrm{span}} A = X$;
- **ortonormální báze**, pokud je A ortonormální a pro každé $x \in X$ existují jednoznačně určené $x_i \in \mathbf{F}$, $i \in I$, splňující
$$x = \sum_{i \in I} x_i a_i.$$

Věta 4.5. *V každém Hilbertově prostoru H existuje maximální ortonormální množina. Je-li H navíc separabilní, pak je tato množina spočetná.*

Věta 4.6 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_i\}$ ortonormální množina v Hilbertově prostoru H, potom platí $\sum_i |(x, e_i)|^2 \le \|x\|^2$ pro každé $x \in H$.*

Důsledek 4.7. *Nechť H je Hilbertův a $\{e_i\}_{i\in I}$ je ortonormální množina. Potom je pro libovolné $x \in H$ množina $\{i \in I;\ (x, e_i) \neq 0\}$ spočetná.*

Věta 4.8. *Nechť H je Hilbertův prostor a $B = \{e_i\}$ je ortonormální množina. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *B je ortonormální báze.*
(ii) *B je maximální ortonormální množina.*
(iii) *B je úplná ortonormální množina.*
(iv) *Pro každé $x \in H$ platí $\|x\|^2 = \sum_i |(x, e_i)|^2$. (Parsevalova rovnost)*

Věta 4.9 (Riesz–Fischer)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak existuje množina Γ taková, že H je izometricky izomorfní s $\ell^2(\Gamma)$.*

5. Konečně rozměrné prostory

Lemma 5.1 (Riesz)**.** *Je-li Y vlastní uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takový, že $\mathrm{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Věta 5.2. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom B_X je kompaktní, právě když $\dim X < \infty$.*

6. Hahn–Banachova věta a její důsledky

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbf{F}$ a $p\colon X \to \mathbf{R}$. Řekneme, že p je **pozitivně homogenní sublineární funkcionál**, jestliže platí

- $\forall x \in X\ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0 :\ p(\alpha x) = \alpha p(x)$ (pozitivní homogenita),
- $\forall x, y \in X :\ p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (sublinearita).

Jestliže navíc $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $\alpha \in \mathbf{F}$ a $x \in X$, pak p se nazývá **pseudonorma**.

Věta 6.1 (algebraická verze Hahn–Banachovy věty)**.** *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$, $M \subset\subset X$, $p\colon X \to \mathbf{R}$ je pozitivně homogenní a sublineární, $f : M \to \mathbf{R}$ je lineární, $f \leq p$ na M. Potom existuje $\Lambda\colon X \to \mathbf{R}$ lineární takový, že $\Lambda|_M = f$ a*

$$\forall x \in X :\ -p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x).$$

Věta 6.2 (komplexní případ)**.** *Nechť p je pseudonorma na vektorovém prostoru X nad $\mathbf{F}$, $Y \subset\subset X$, $f : Y \to \mathbf{F}$ je lineární a splňuje $|f| \leq p$ na Y. Pak existuje $\Lambda\colon X \to \mathbf{F}$ lineární takové, že $|\Lambda| \leq p$ na X a $\Lambda|_Y = f$.*

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbf{F}$. **Duálním prostorem** k X rozumíme prostor $\mathcal{L}(X, \mathbf{F})$. Značíme jej X^*.

Věta 6.3 (Hahn–Banach)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset\subset X$ a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $\|F\| = \|f\|$ a $F|_Y = f$.*

Věta 6.4. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Nechť $Y \subset\subset X$ je uzavřený a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f = 0$ na Y a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y)$.*

Důsledek 6.5. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Speciálně: X^* odděluje body X, tj. pro každé $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$.*

Důsledek 6.6. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset\subset X$. Jestliže pro každé $f \in X^*$ splňující $f|_Y = 0$ platí $f = 0$, potom je Y hustý v X.*

Věta 6.7. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(i) *Nechť $Y \subset\subset X$ je konečněrozměrný. Pak Y má topologický doplněk.*
(ii) *Nechť $Y \subset\subset X$ je uzavřený a konečné kodimenze. Pak Y má topologický doplněk.*

Věta 6.8 (oddělování množin)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbf{F}$ a $A, B \subset X$ jsou neprázdné, disjunktní a konvexní.*

(i) *Pokud A je otevřená, pak existuje $\Lambda \in X^*$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ takové, že $\Re\Lambda(a) < \alpha \leq \Re\Lambda(b)$ pro každé $a \in A$, $b \in B$.*
(ii) *Pokud A je kompaktní a B uzavřená, pak existuje $\Lambda \in X^*$ a $\alpha \in \mathbf{R}$ takové, že $\Re\Lambda(a) < \alpha < \Re\Lambda(b)$ pro každé $a \in A$, $b \in B$.*

7. Duální prostory a reflexivita

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. **Kanonické vnoření** ε prostoru X do X^{**} definujme jako $\varepsilon(x)(x^*) = x^*(x)$, $x \in X$, $x^* \in X^*$.

Věta 7.1. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je izometrický izomorfismus do X^{**}.*

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že X je **reflexivní**, jestliže $\varepsilon(X) = X^{**}$.

Věta 7.2 (Fréchet–Riesz). *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný předpisem $f_y(x) = (x, y)$, $x \in H$. Potom zobrazení $T \colon y \mapsto f_y$ je sdruženě-lineární izometrie H na H^*.*

Důsledek 7.3. *Je-li H Hilbertův, potom je H^* Hilbertův.*

Věta 7.4. *Nechť H je Hilbertův prostor. Potom je H reflexivní.*

Věta 7.5. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(i) *Je-li X reflexivní, pak je X úplný.*
(ii) *Banachův prostor X je reflexivní právě tehdy, když X^* je reflexivní.*
(iii) *Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.*
(iv) *Jsou-li X, Y reflexivní, pak je $X \times Y$ reflexivní.*
(v) *Je-li $Z \subset\subset X$ uzavřený a X je reflexivní, pak je X/Z reflexivní.*
(vi) *Je-li X izomorfní s Y a X je reflexivní, pak je i Y reflexivní.*

8. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 8.1 (Baireova věta (opakování)). *Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $G \subset X$ je otevřená a neprázdná. Potom je G druhé kategorie v (X, ρ).*

Věta 8.2 (princip stejnoměrné omezenosti). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak je ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|L\| : L \in \mathcal{G}\} < \infty$,
(ii) *pro každé $x \in X$ je* $\sup\{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\} < \infty$.

Věta 8.3 (Banach–Steinhausova věta). *Nechť X je Banachův, Y je normovaný lineární prostor a $L_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n \in \mathbf{N}$, splňují, že $\lim_n L_n x$ existuje pro každé $x \in X$. Pak $L \colon x \mapsto \lim_n L_n x$ je spojitý lineární operátor z X do Y.*

Definice. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Řekneme, že f je **otevřené zobrazení** z (P, ρ) do (Q, σ), jestliže $f(G)$ je otevřená množina, kdykoliv je $G \subset P$ otevřená.

Lemma 8.4. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Nechť $r, s > 0$ splňují $B(\boldsymbol{o}, s) \subset \overline{T(B(\boldsymbol{o}, r))}$. Potom $B(\boldsymbol{o}, s) \subset T(B(\boldsymbol{o}, r))$.*

Věta 8.5 (Banachova věta o otevřeném zobrazení). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Potom je T otevřené zobrazení.*

Důsledek 8.6. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je prosté a na. Potom je T izomorfismus X na Y.*

Definice. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f : P \to Q$. Řekneme, že f má **uzavřený graf**, jestliže množina $\{(x, y) \in P \times Q;\ f(x) = y\}$ je uzavřená v $P \times Q$.

Věta 8.7 (o uzavřeném grafu). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a T je lineární zobrazení s uzavřeným grafem. Potom je T spojité.*

Věta 8.8. *Nechť X je Banachův prostor, $Y, Z \subset\subset X$ jsou uzavřené a $X = Y \oplus Z$. Potom $X = Y \oplus_t Z$.*

9. Duální operátory

Definice. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak **duálním operátorem** $T' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ rozumíme operátor definovaný předpisem $T'(y^*)(x) = y^*(Tx)$.

Věta 9.1. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

(i) *Zobrazení $T \mapsto T'$ z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$ je lineární izometrie.*
(ii) *Pro $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ platí $(ST)' = T'S'$.*
(iii) *Pro identitu $I \in \mathcal{L}(X, X)$ platí, že I' je identita na X^*.*

Věta 9.2. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory, $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje právě jedno $S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takové, že $(Sx, y) = (x, S^*y)$ pro každé $x \in H_1$, $y \in H_2$.*

Dále platí $S^* = T_1^{-1} S' T_2$, kde $T_i : H_i \to H_i^*$ jsou izometrie z Věty 7.2.

Definice. Operátor S^* z předchozí věty nazýváme **adjungovaným operátorem** k S.

Věta 9.3. *Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory, $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ a I je identita na H_1. Potom platí:*

(i) $(T^*)^* = T$, $(ST)^* = T^*S^*$, $I^* = I$,
(ii) *$T \mapsto T^*$ je sdruženě-lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.*

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro $A \subset X$, $B \subset X^*$ definujeme **anihilátory** jako

$$A^\perp = \{x^* \in X^*;\ \forall a \in A:\ x^*(a) = 0\},$$
$$B_\perp = \{x \in X;\ \forall b^* \in B:\ b^*(x) = 0\}.$$

Poznámka.

(1) $A^\perp$ je uzavřený podprostor X^*.
(2) $B_\perp$ je uzavřený podprostor X.

Věta 9.4. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Potom platí:*

(i) $\operatorname{Ker} T' = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,
(ii) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T')_\perp$,
(iii) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T')_\perp$.

Věta 9.5. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Potom platí:*

(i) *T je izomorfizmus do Y, právě když je T' na,*
(ii) *T je na, právě když je T' izomorfizmus do X^*,*
(iii) *T je izomorfizmus právě tehdy, když T' je izomorfizmus.*

10. Úvod do spektrální teorie

Všechny prostory jsou Banachovy a nad $\mathbf{C}$.

Definice. Řekneme, že $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je **invertovatelný**, jestliže existuje $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ takový, že $TS = I_Y$ a $ST = I_X$. Inverzi S značíme T^{-1}.

Poznámka.

(1) Inverze je jednoznačně určena.
(2) Platí $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.
(3) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je invertovatelný, právě když T je prostý a na.

Označení. Místo $\mathcal{L}(X, X)$ budeme psát jen $\mathcal{L}(X)$ a množinu invertovatelných operátorů z X do X budeme značit $\mathcal{G}(X)$. Množinu kompaktních operátorů z X do X značíme $\mathcal{K}(X)$. (Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je **kompaktní**, pokud $\overline{T(B_X)}$ je kompaktní množina, viz cvičení.)

Lemma 10.1 (Neumann)**.**

(i) *Nechť* $T \in \mathcal{L}(X)$ *a* $\|T\| < 1$. *Pak*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \ ,$$

přičemž suma konverguje absolutně v $\mathcal{L}(X)$. *Navíc* $\|(I - T)^{-1}\| \leq (1 - \|T\|)^{-1}$.

(ii) *Je-li* $T \in \mathcal{G}(X)$ *a* $S \in \mathcal{L}(X)$ *splňuje* $\|T - S\| < 1/\|T^{-1}\|$, *potom* $S \in \mathcal{G}(X)$ *a*

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2 \cdot \|S - T\|}{1 - \|T^{-1}\| \cdot \|S - T\|}.$$

Věta 10.2. *Množina* $\mathcal{G}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ *je otevřená a zobrazení* $T \mapsto T^{-1}$ *je spojité na* $\mathcal{G}(X)$.

Definice. Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. **Spektrum** operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ definujeme předpisem

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \lambda I - T \text{ není invertovatelný}\}.$$

Bodové spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ definujeme předpisem

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbf{C};\ \exists x \in X, x \neq 0 :\ Tx = \lambda x\}.$$

Množina $\rho(T) = \mathbf{C} \setminus \sigma(T)$ se nazývá **rezolventa** a funkce $\lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1}$ definovaná na $\rho(T)$ se nazývá **rezolventní funkce**. Pro $\lambda \in \sigma_p(T)$ je $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ podprostorem příslušným **vlastnímu číslu** λ a jeho nenulové prvky nazýváme **vlastní vektory**.

Věta 10.3. *Nechť* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Pak* $\sigma(T)$ *je neprázdná kompaktní podmnožina* $\mathbf{C}$ *obsažená v kruhu o poloměru* $\|T\|$.

Věta 10.4.

(i) *Nechť* $T \in \mathcal{L}(X)$. *Pak* $\sigma(T) = \sigma(T')$.

(ii) *Nechť* $T \in \mathcal{L}(H)$, *kde* H *je Hilbertův prostor. Pak* $\sigma(T) = \left\{\overline{\lambda};\ \lambda \in \sigma(T^*)\right\}$.

Věta 10.5. *Nechť* $T \in \mathcal{K}(X)$ *a* $\lambda \neq 0$. *Pak* $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ *je uzavřený.*

Věta 10.6 (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť* $\lambda \neq 0$ *a* $T \in \mathcal{K}(X)$. *Pak* $\lambda I - T$ *je prostý, právě když* $\lambda I - T$ *je na.*

Věta 10.7. *Nechť* $T \in \mathcal{K}(X)$. *Pak platí:*

(i) $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$,

(ii) $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| > r\}$ *je konečná pro každé* $r > 0$.

Věta 10.8 (druhá Fredholmova věta)**.** *Nechť* $T \in \mathcal{K}(X)$ *a* $\lambda \neq 0$. *Pak platí*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = (\operatorname{Ker}(\lambda I - T'))_{\perp} \quad a \quad \operatorname{Rng}(\lambda I - T') = (\operatorname{Ker}(\lambda I - T))^{\perp}\ .$$

Věta 10.9 (třetí Fredholmova věta)**.** *Nechť* $T \in \mathcal{K}(X)$ *a* $\lambda \neq 0$. *Pak platí*

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) &= \dim X / \operatorname{Rng}(\lambda I - T) \\ &= \dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T') = \dim X^* / \operatorname{Rng}(\lambda I - T') \end{aligned}$$

a toto číslo je konečné.

11. Věty ze cvičení

Věta 11.1 (vlastnosti konečněrozměrných prostorů)**.**

(i) *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory,* $\dim X < \infty$ *a* $L\colon X \to Y$ *je lineární. Potom je L spojité.*

(ii) *Nechť X je normovaný lineární prostor a* $\dim X < \infty$. *Potom je B_X kompaktní.*

(iii) *Nechť X je normovaný lineární prostor,* $\dim X < \infty$ *a* $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ *jsou normy na X. Potom jsou tyto normy ekvivalentní.*

(iv) *Nechť X je normovaný lineární prostor,* $\dim X < \infty$. *Potom je X Banachův.*

Věta 11.2 (popis duálu klasických prostorů)**.**

(a) $(\mathbf{F}^n, \|\cdot\|_2)^* \cong (\mathbf{F}^n, \|\cdot\|_2)$,

(b) $(c_0)^* \cong l^1$,

(c) $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$,

(d) $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, *kde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \in (1,\infty)$,

(e) $(L^p[0,1])^* \cong L^q[0,1]$, *kde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p \in (1,\infty)$,

(f) $(\mathbf{C}(K))^* \cong \mathcal{M}(K) =$ *Radonovy míry na K.*

Věta 11.3. *Nechť X je normovaný lineární prostor a X^* je separabilní. Potom je X separabilní.*

Věta 11.4 (základní vlastnosti w a w^*-konvergence)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Platí:*

(i) *w i w^*-limita je jednoznačně určena,*

(ii) *jestliže $x_n \to x$, pak $x_n \overset{w}{\to} x$,*

(iii) *jestliže $x_n^* \overset{w}{\to} x^*$, pak $x_n^* \overset{w^*}{\to} x^*$,*

(iv) *každá slabě konvergentní posloupnost je omezená,*

(iv) *každá slabě* konvergentní posloupnost je omezená.*

Věta 11.5 (existence slabě konvergentní podposloupnosti)**.** *Nechť X je reflexivní Banachův prostor a (x_n) je omezená posloupnost. Potom lze z (x_n) vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

Věta 11.6 (Schurova věta)**.** *Nechť (x_n) je slabě konvergentní posloupnost prvků ℓ_1. Potom je (x_n) konvergentní.*