

# Úvod do funkcionální analýzy, ZS 2010-11

## Definice

K = klíčový pojem; neznalost některého z klíčových pojmů bude mít za následek ukončení zkoušky se známkou „neprospěl(a)“.

K normovaný lineární prostor

- ekvivalence norem
- konvexní množina
- konvexní obal
- lineární obal
- uzavřený konvexní obal
- uzavřený lineární obal

K konvergence řady v normovaném lineárním prostoru

K Banachův prostor

K Hilbertův prostor

- izometrické zobrazení
- faktorprostor
- algebraický součet podprostorů
- topologický součet podprostorů
- algebraický doplněk
- projekce
- kodimenze

K norma operátoru

K izomorfní zobrazení

- izomorfní prostory
- ortogonální podprostory
- ortogonální doplněk
- ortonormální množina
- maximální ortonormální množina
- úplná ortonormální množina
- ortonormální báze
- pozitivně homogenní sublineární funkcionál

K reflexivní prostor

- otevřené zobrazení
- uzavřený graf

K duální operátor

K adjungovaný operátor

- anihilátor
- invertovatelný prvek
- kompaktní operátor

K spektrum operátoru

- bodové spektrum operátoru
  - rezolventa
  - rezolventní funkce
- K vlastní číslo
- vlastní vektor

## Věty

T = důkaz věty je za 10 bodů

B = důkaz věty nebude požadován

### 1. Banachovy a Hilbertovy prostory - základní pojmy

- spojitost operací na normovaném lineárním prostoru (Věta 1.1)
  - ekvivalence norem (Věta 1.2)
  - otevřené množiny a ekvivalence norem (Důsledek 1.3)
  - norma na Hilbertově prostoru (Věta 1.4)
  - spojitost skalárního součinu (Lemma 1.5)
- T Jordan - von Neumanova věta (Věta 1.6)
- charakterizace úplnosti pomocí konvergence řad (Věta 1.7)
- T zúplnění normovaného lineárního prostoru (Věta 1.8)

### 2. Operace s Banachovými prostory

- T úplnost faktorprostoru (Věta 2.1)
- T vlastnosti algebraického součtu (Věta 2.2)
- faktorprostor a algebraický součet (Věta 2.3)

### 3. Operátory a funkcionály

- charakterizace spojitosti lineárního zobrazení (Věta 3.1)
- T úplnost prostoru operátorů (Věta 3.2)
- charakterizace izomorfismu (Věta 3.3)
  - ekvivalence norem a identita (Důsledek 3.4)
  - úplnost a izomorfismus (Věta 3.5)
  - topologický součet a kartézský součin (Věta 3.6)

### 4. Hilbertovy prostory

- uzavřenost ortogonálního doplňku (Věta 4.1)
- T existence nejbližšího prvku (Věta 4.2)
- existence nejbližšího prvku v podprostoru (Věta 4.3)
  - Rieszova věta o projekci (Věta 4.4)
  - existence maximální ortonormální množiny (Věta 4.5)
  - Besselova nerovnost (Věta 4.6)
  - souřadnice v Hilbertově prostoru (Důsledek 4.7)
- T charakterizace ortonormální báze (Věta 4.8)

T Riesz-Fischerova věta (Věta 4.9)

## 5. Konečně rozměrné prostory

T věta o skorokolmici (Lemma 5.1)

- kompaktnost jednotkové koule (Věta 5.2)

## 6. Hahn-Banachova věta

T algebraická verze Hahn-Banachovy věty (Věta 6.1)

T komplexní verze Hahn-Banachovy věty (Věta 6.2)

- rozšiřování funkcionálu (Věta 6.3)
- oddělování bodu a podprostoru (Věta 6.4)
- oddělování bodů (Důsledek 6.5)
- postačující podmínka hustoty podprostoru (Důsledek 6.6)

T existence topologického doplňku (Věta 6.7)

B oddělování množin (Věta 6.8)

## 7. Duální prostory a reflexivita

- vlastnosti kanonického vnoření (Věta 7.1)

T Fréchet-Rieszova věta (Věta 7.2)

- duální prostor k Hilbertovu prostoru (Věta 7.3)

- reflexivita Hilbertova prostoru (Věta 7.4)

T vlastnosti reflexivity (Věta 7.5)

## 8. Úplnost v Banachových prostorech

B Baireova věta (Věta 8.1)

T princip stejnoměrné omezenosti (Věta 8.2)

T Banach-Steinhausova věta (Věta 8.3)

T Banachova věta o otevřeném zobrazení (Věta 8.5)

- důsledek věty o otevřeném zobrazení pro izomorfismus (Důsledek 8.6)
- věta o uzavřeném grafu (Věta 8.7)
- topologický doplněk a uzavřené podprostory (Věta 8.8)

## 9. Duální operátory

- základní vlastnosti duálních operátorů (Věta 9.1)

- existence adjungovaného operátoru (Věta 9.2)

- vlastnosti adjungovaného operátoru (Věta 9.3)

T jádro a range duálního operátoru (Věta 9.4)

T injektivita a surjektivita duálního operátoru (Věta 9.5)

## 10. Úvod do spektrální teorie

T Neumannova řada (Lemma 10.1)

T spojitost  $T \mapsto T^{-1}$  (Věta 10.2)

T vlastnosti spektra (Věta 10.3)

- spektrum adjungovaného a duálního operátoru (Věta 10.4)

B range operátoru  $\lambda I - T$  (Věta 10.5)

B Fredholmova alternativa (Věta 10.6)

B spektrum kompaktního operátoru (Věta 10.7)

B druhá Fredholmova věta (Věta 10.8)

B třetí Fredholmova věta (Věta 10.9)

## 11. Věty uvedené na cvičení

T vlastnosti konečněrozměrných prostorů

T popis duálu klasických prostorů

T vztah separability  $X$  a  $X^*$

- základní vlastnosti  $w$  a  $w^*$ -konvergence

T existence slabě konvergentní podposloupnosti

T Schurova věta