Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 4 (5)

LS 2015-16, 19. 9. 2016

---

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= -6y_1 + 4y_2 + t, \\ y_2' &= -4y_1 + 2y_2 + 2t. \end{aligned}$$

Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, která vyhovují počáteční podmínce $y(0) = (1, 2)^T$. (20 bodů)

2. Nechť množina $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je definována předpisem $\Omega = B\big([0,0,0],1\big) \cap B\big([1,0,0],1\big)$ a vektorové pole $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem

$$f(x,y,z) = \big[xy, y + z^2, x - yz\big].$$

(a) Ukažte, že množina Ω je otevřená.
(b) Určete $H(\Omega)$ a pro bod $\big[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big]$ explicitně zdůvodněte, proč $\big[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big] \in H(\Omega)$.
(c) Určete $H_*(\Omega)$ a pro bod $[0,0,0]$ explicitně zdůvodněte, proč $[0,0,0] \in H_*(\Omega)$.
(d) Ukažte, že $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$.
(e) Určete vektorové pole ν_Ω pro $\mathcal{H}^2$-s.v. body $H(\Omega)$.
(f) Ukažte, že $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega)\big) < \infty$.
(g) Spočtěte $\int_{H(\Omega)} \langle f, \nu_\Omega \rangle \, \mathrm{d}\,\mathcal{H}^2$.

(25 bodů)

3. Nalezněte reálná čísla $b_n, n \in \mathbb{N}$, taková, aby platilo

$$\frac{\pi}{2} - \Big|x - \frac{\pi}{2}\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

pro každé $x \in (0, \pi)$. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)