Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 4 (4)

LS 2015-16, 29. 6. 2016

---

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 + \sin(2t), \\ y_2' &= -y_1 - y_2. \end{aligned}$$

Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, která vyhovují počáteční podmínce $y(0) = (1,0)^T$. (20 bodů)

2. Nechť množina $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je definována předpisem

$$\Omega = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 < z < 1 - x^2 - y^2\big\}$$

a vektorové pole $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem

$$f(x,y,z) = \big[zx, xy, z^2 - xz\big].$$

(a) Ukažte, že množina Ω je otevřená.
(b) Určete $H(\Omega)$ a pro bod $[0,0,1]$ explicitně zdůvodněte, proč $[0,0,1] \in H(\Omega)$.
(c) Určete $H_*(\Omega)$ a pro bod $[0,0,1]$ explicitně zdůvodněte, proč $[0,0,1] \in H_*(\Omega)$.
(d) Ukažte, že $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$.
(e) Určete vektorové pole ν_Ω pro $\mathcal{H}^2$-s.v. body $H(\Omega)$.
(f) Ukažte, že $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega)\big) < \infty$.
(g) Spočtěte $\int_{H(\Omega)} \langle f, \nu_\Omega \rangle \,\mathrm{d}\,\mathcal{H}^2$.

(25 bodů)

3. Nalezněte reálná čísla $a_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, taková, aby platilo

$$\operatorname{sgn}\big(x - \tfrac{\pi}{2}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

pro každé $x \in (0, \pi)$. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)

Řešení

8 b

1. Nejprve vyřešíme homogenní soustavu. Matice soustavy má tvar

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Úpravami λ-matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ obdržíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 + 4\lambda + 4 \end{pmatrix}.$$

Polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 4$ má dvojnásobný kořen -2. Fundamentální systém rovnice $y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = 0$ má tvar e^{-2t}, te^{-2t}. Obecné maximální řešení má pak tvar $y_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$. Z rovnice $y_1 + y_2' + y_2 = 0$ vypočteme

$$y_1(t) = (c_1 - c_2)e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}.$$

8 b

Řešení nehomogenní soustavy budeme hledat ve tvaru

$$y_1(t) = \big(\alpha(t) - \beta(t)\big)e^{-2t} + \beta(t) t e^{-2t},$$
$$y_2(t) = \alpha(t) e^{-2t} + \beta(t) t e^{-2t},$$

kde α, β jsou diferencovatelné funkce definované na $\mathbb{R}$. Po dosazení do soustavy dostaneme podmínky

$$\big(\alpha'(t) - \beta'(t)\big)e^{-2t} + \beta'(t) t e^{-2t} = \sin(2t),$$
$$\alpha'(t) e^{-2t} + \beta'(t) t e^{-2t} = 0.$$

Odtud plyne $\alpha'(t) = te^{2t}\sin(2t), \beta'(t) = -e^{2t}\sin(2t)$. Nalezneme primitivní funkce a můžeme psát

$$\alpha(t) = \frac{1}{4} t e^{2t}\big(\sin(2t) - \cos(2t)\big) + \frac{1}{8} e^{2t}\cos(2t),$$
$$\beta(t) = \frac{1}{4} e^{2t}\big(\cos(2t) - \sin(2t)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obecné maximální řešení naší soustavy má pak tvar

$$y_1(t) = -\frac{1}{8}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \big(c_1 - c_2\big)e^{-2t} + c_2 t e^{-2t},$$
$$y_2(t) = \frac{1}{8}\cos(2t) + c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}.$$

4 b Koeficienty c_1, c_2 určíme na základě počáteční podmínky a dostaneme

$$y_1(t) = -\frac{1}{8}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{9}{8}e^{-2t} - \frac{5}{4}te^{-2t},$$

$$y_2(t) = \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{8}e^{-2t} - \frac{5}{4}te^{-2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2b 2. (a) Funkce $\psi_1(x,y,z) = x^2+y^2-z$ a $\psi_2(x,y,z) = 1-x^2-y^2-z$ jsou spojité, a proto jsou množiny $\psi_1^{-1}\big((-\infty,0)\big)$ a $\psi_2^{-1}\big((0,\infty)\big)$ otevřené. Odtud plyne otevřenost množiny Ω, neboť

$$\Omega = \psi_1^{-1}\big((-\infty,0)\big) \cap \psi_2^{-1}\big((0,\infty)\big).$$

3b (b) Platí

$$H(\Omega) = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = z, z \in [0,\tfrac{1}{2}]\big\} \cup \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ 1-x^2-y^2 = z, z \in [\tfrac{1}{2},1]\big\}.$$

Platí $[0,0,1] \notin \Omega$ a $u^n = [0,0,1-\frac{1}{n+1}] \in \Omega$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Navíc $u^n \to [0,0,1]$. Odtud plyne $[0,0,1] \in H(\Omega)$.

4b (c) Platí

$$H_*(\Omega) = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = z, z \in [0,\tfrac{1}{2})\big\} \cup \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ 1-x^2-y^2 = z, z \in (\tfrac{1}{2},1]\big\}.$$

Položme $h(x,y,z) = x^2+y^2-1+z$. Funkce h je třídy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^3$. Platí

$$\Omega \cap B([0,0,1],\tfrac{1}{4}) = \big\{[x,y,z] \in B([0,0,1],\tfrac{1}{4});\ h(x,y,z) < 0\big\}.$$

Konečně platí $\nabla h(0,0,1) = (2x,2y,1)|_{[0,0,1]} = [0,0,1] \neq [0,0,0]$. Funkce h je tedy rozhraničující a svědčí o $[0,0,1] \in H_*(\Omega)$.

3b (d) Platí

$$H(\Omega) \setminus H_*(\Omega) = \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 = z, z = \tfrac{1}{2})\big\}.$$

Množina $H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)$ je tedy kružnice, a proto platí $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) < \infty$. Odtud plyne $\mathcal{H}^2\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$.

4b (e) Podobně jako v bodě (c) odvodíme

$$\nu_\Omega(x,y,z) = \begin{cases} \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, & [x,y,z] \in H_*(\Omega), z > \frac{1}{2}, \\ \frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, & [x,y,z] \in H_*(\Omega), z < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(f) Označme

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z, z \in [0, \tfrac{1}{2}]\},$$
$$B = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ 1 - x^2 - y^2 = z, z \in [\tfrac{1}{2}, 1]\}.$$

4b Podle area formule platí

$$\mathcal{H}^2(A) = \int_D \operatorname{vol} \varphi' d\lambda^2,$$

kde $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ a $D = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le \frac{1}{2}\}$. Množina D je kompaktní, funkce vol φ' je spojitá, a proto je výše uvedený integrál konvergentní. Platí tedy $\mathcal{H}^2(A) < \infty$. Podobně lze odvodit $\mathcal{H}^2(B) < \infty$. Odtud plyne $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) < \infty$.

(g) Množina Ω je omezená a vektorové pole f je třídy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^3$. Podle výše uvedeného lze použít k výpočtu integrálu Gaussovu větu. Platí

5b
$$\begin{aligned}
\int_{H(\Omega)} \langle f, \nu_\Omega \rangle \, \mathrm{d}\, \mathcal{H}^2 &= \int_\Omega \operatorname{div} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z = \int_\Omega 3z \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z \\
&= \int_0^{1/2} \Big(\int_{B([0,0],\sqrt{z})} 3z \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \Big) \,\mathrm{d}\, z + \int_{1/2}^1 \Big(\int_{B([0,0],\sqrt{1-z})} 3z \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \Big) \,\mathrm{d}\, z \\
&= \int_0^{1/2} 3z\pi z \,\mathrm{d}\, z + \int_{1/2}^1 3z\pi(1 - z) \,\mathrm{d}\, z \\
&= \big[\pi z^3\big]_0^{1/2} + \big[\tfrac{3}{2}\pi z^2 - \pi z^3\big]_{1/2}^1 = \frac{3}{8}\pi.
\end{aligned}$$

3b 3. Definujme sudou funkci $f \colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}, \\ 1, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

9b Fourierovy koeficienty funkce f mají tvar

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ -4 \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi n)}{\pi n}, & n > 0, \end{cases}$$

a $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

3b

Funkce f má konečnou variaci a pro každé $x \in (-\pi, \pi)$ platí $f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big)$, a proto podle Dirichletova-Jordanova kritéria platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Máme tedy také

$$\operatorname{sgn}\big(x - \tfrac{1}{2}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad x \in (0, \pi).$$