Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 4 (vzor)

LS 2015-16

---

1. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$y_1' = y_1 + 2y_2 + e^t,$$
$$y_2' = 2y_1 + y_2 + e^t.$$

(a) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, která vyhovují počáteční podmínce $y(0) = (0,0)^T$.

(b) Určete množinu všech $y^0 \in \mathbb{R}^2$, pro která platí: maximální řešení uvedené soustavy y vyhovující podmínce $y(0) = y^0$ splňuje $\sup\{e^{-t}\|y(t)\|;\ t \in [0,\infty)\} < \infty$.

(20 bodů)

2. Nechť množina $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je definována jako $\Omega = B(0,4) \setminus \overline{B}(e^1, 1)$ a vektorové pole $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem $f(x,y,z) = \left[xy, -\frac{1}{2}y^2, 2z + x\right]$.

(a) Ukažte, že množina Ω je otevřená.

(b) Určete $H(\Omega)$ a pro bod 0 explicitně zdůvodněte, proč $0 \in H(\Omega)$.

(c) Určete $H_*(\Omega)$ a pro bod 0 explicitně zdůvodněte, proč $0 \in H_*(\Omega)$.

(d) Určete vektorové pole ν_Ω.

(e) Spočtěte $\mathcal{H}^2(H(\Omega))$.

(f) Spočtěte $\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y)\rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^2(y)$.

(25 bodů)

3. Pro 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $[-\pi,\pi)$ definována předpisem $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$, nalezněte Fourierovu řadu. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ nalezněte součet této Fourierovy řady a rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně. Svá tvrzení zdůvodněte. (15 bodů)