

18 Metrické prostory III

18.1 Úplné metrické prostory – pokračování

Věta 18.1. *Necht' (X, ρ) je úplný metrický prostor a $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin X splňující*

- (a) $\forall n \in \mathbf{N} : F_{n+1} \subset F_n$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$.

Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je jednobodová množina.

Definice. Necht' (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že M je v prostoru (X, ρ)

- **hustá**, jestliže $\overline{M} = X$,
- **řidká**, jestliže $X \setminus \overline{M}$ je hustá,
- **1. kategorie**, jestliže $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou řídké v (X, ρ) ,
- **2. kategorie**, jestliže M není 1. kategorie,
- **residuální**, jestliže $X \setminus M$ je 1. kategorie.

Věta 18.2 (Baire). *Necht' (X, ρ) je úplný metrický prostor a $G \subset X$ je otevřená a neprázdna. Pak G je 2. kategorie v (X, ρ) .*

———— Konec 1. přednášky, 22. 2. 2016 ————

Definice.

- (i) Necht' X je množina a $f: X \rightarrow X$. Řekneme, že $x \in X$ je **pevným bodem** zobrazení f , jestliže $f(x) = x$.
- (ii) Necht' (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $f: X \rightarrow X$ je **kontrakce**, jestliže existuje $q \in [0, 1)$ takové, že platí

$$\forall x, y \in X : \rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y).$$

Věta 18.3 (Banachova věta o kontrakci). *Necht' (X, ρ) je úplný neprázdny metrický prostor a $f: X \rightarrow X$ je kontrakce. Pak f má právě jeden pevný bod.*

———— Konec 2. přednášky, 24. 2. 2016 ————

Věta 17.8 (Picard). Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f: [t, \mathbf{x}] \mapsto f(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}^n$ je spojitě zobrazení na G a je lokálně lipschitzovské v \mathbf{x} , tj. pro každý bod $[t, \mathbf{x}] \in G$ existuje $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, a $L \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé dva body $[s, \mathbf{x}^1], [s, \mathbf{x}^2]$ z $B([t, \mathbf{x}], \varepsilon)$ máme

$$\|f(s, \mathbf{x}^1) - f(s, \mathbf{x}^2)\| \leq L\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|.$$

Jestliže $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \quad (*)$$

splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

————— Konec 3. přednášky, 29. 2. 2016 —————

18.2 Separabilní prostory

Definice. Metrický prostor se nazývá **separabilní**, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Definice. Necht' (X, ρ) je metrický prostor a \mathcal{B} je systém otevřených podmnožin (X, ρ) . Řekneme, že \mathcal{B} je **báze otevřených množin**, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset X$ existuje $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ takové, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

Věta 18.4 (charakterizace separabilních prostorů). *Necht' (X, ρ) je metrický prostor. Potom je ekvivalentní:*

- (i) *Prostor (X, ρ) je separabilní.*
- (ii) *Existuje spočetná báze otevřených množin v prostoru (X, ρ) .*
- (iii) *Pro každý systém \mathcal{G} otevřených množin, který pokrývá X , existuje spočetný systém otevřených množin $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$, který pokrývá X .*

Důsledek 18.5 (dědičnost separability). *Podprostor separabilního metrického prostoru je separabilní.*

18.3 Totálně omezené prostory

Definice. Necht' (X, ρ) je metrický prostor a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Řekneme, že $M \subset X$ je **ε -sít' v X** , jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje bod $y \in M$ takový, že $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definice. Metrický prostor (X, ρ) se nazývá **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, existuje konečná ε -sít'. Množina $Y \subset X$ se nazývá **totálně omezená**, jestliže podprostor (Y, ρ) je totálně omezený.

————— Konec 4. přednášky, 2. 3. 2016 —————

Věta 18.6 (vlastnosti totálně omezených prostorů). *Necht' (X, ρ) je totálně omezený metrický prostor. Pak platí:*

- (a) *prostor (X, ρ) je omezený,*
- (b) *prostor (X, ρ) je separabilní,*
- (c) *každá množina $Y \subset X$ je totálně omezená.*

Věta 18.7 (charakterizace kompaktních prostorů). *Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

————— Konec 5. přednášky, 7. 3. 2016 —————

Důsledek 18.8. *Kompaktní metrický prostor je separabilní.*

18.4 Souvislé metrické prostory

Definice. Necht' (X, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je **obojetná**, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená v (X, ρ) .

Definice. Metrický prostor se nazývá **souvislý**, není-li sjednocením dvou disjunktních neprázdných otevřených množin. Podmnožina M metrického prostoru (X, ρ) se nazývá **souvislá**, jestliže (M, ρ) je souvislý.

Lemma 18.9. *Necht' (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $A, B \subset M$ jsou disjunktní neprázdné otevřené množiny v (M, ρ) takové, že $M = A \cup B$. Potom existují G a H disjunktní otevřené množiny v (X, ρ) takové, že $A = M \cap G$ a $B = M \cap H$.*

Věta 18.10. *Množina $E \subset \mathbf{R}$ je souvislá, právě když E je interval.*

Věta 18.11. *Necht' (X, ρ) je metrický prostor. Potom platí:*

- (a) *Je-li $Y \subset X$ souvislá a $Y \subset M \subset \bar{Y}$, pak M je souvislá.*
- (b) *Necht' I je neprázdná množina a $Y_\alpha, \alpha \in I$, jsou souvislé podmnožiny X splňující $\bigcap_{\alpha \in I} Y_\alpha \neq \emptyset$. Potom $\bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$ je souvislá.*

————— Konec 6. přednášky, 9. 3. 2016 —————

Věta 18.12. *Necht' (X, ρ) je souvislý metrický prostor, (Y, σ) je metrický prostor a $f: X \rightarrow Y$ je spojitě. Pak $f(X)$ je souvislá.*

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ρ) je **křivkově souvislý**, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje spojitě zobrazení $f: [0, 1] \rightarrow P$ takové, že $f(0) = x$ a $f(1) = y$. Řekneme, že množina $M \subset P$ je **křivkově souvislá**, jestliže prostor (M, ρ) je křivkově souvislý.

Věta 18.13 (vztah souvislosti a křivkově souvislosti). *Necht' (P, ρ) je křivkově souvislý metrický prostor. Potom je P souvislý.*

Definice. Necht' (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že $M \subset P$ je **komponenta** (P, ρ) , jestliže M je maximální souvislá množina. **Komponentou** množiny $A \subset P$, rozumíme komponentu prostoru (A, ρ) .

Věta 18.14. *Necht' (P, ρ) je neprázdný metrický prostor a \mathcal{S} je množina všech komponent P . Potom \mathcal{S} obsahuje pouze neprázdné uzavřené množiny, je disjunktní a $\bigcup \mathcal{S} = P$.*

Věta 18.15. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $G \subset X$ je otevřená. Potom komponenty G jsou otevřené v X .*

19 Křivkový a plošný integrál

19.1 Hausdorffovy míry

Označení. Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n, A \subset \mathbf{R}^n$. Pro $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, položme

$$\mathcal{H}^k(A, \delta) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\text{diam } A_j)^k; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, \text{diam } A_j \leq \delta \right\},$$

kde normalizační člen $\alpha_k \in (0, \infty)$ bude určen později,

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^k(A, \delta).$$

————— Konec 7. přednášky, 14. 3. 2016 —————

Věta 19.1. *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Potom je \mathcal{H}^k vnější míra na \mathbf{R}^n .*

Definice. Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Množinovou funkci

$$A \mapsto \mathcal{H}^k(A), \quad A \subset \mathbf{R}^n,$$

nazýváme **k -dimenzionální vnější Hausdorffova míra** na \mathbf{R}^n .

Definice (TMI, Definice 11.3). Necht' (P, ρ) je metrický prostor. Řekneme, že vnější míra γ na P je **metrická**, jestliže pro každé dvě množiny $A, B \subset P$ splňující

$$\inf \{ \rho(x, y); x \in A, y \in B \} > 0$$

platí $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$.

Věta 19.2. *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Potom je vnější míra \mathcal{H}^k na \mathbf{R}^n metrická a translačně invariantní.*

Věta (TMI, Věta 11.2). *Necht' γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ρ) . Potom je každá borelovská podmnožina P γ -měřitelná.*

Důsledek 19.3. *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, a $A \subset \mathbf{R}^n$ je borelovská množina. Potom je A \mathcal{H}^k -měřitelná.*

Lemma 19.4. *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Potom $0 < \mathcal{H}^k([0, 1]^k \times \{0\}^{n-k}) < \infty$.*

Označení. Koeficient α_k zvolíme tak, aby $\mathcal{H}^k([0, 1]^k \times \{0\}^{n-k}) = 1$.

————— Konec 8. přednášky, 16. 3. 2016 —————

Věta 19.5 (regularita Hausdorffovy míry). *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, a $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom existuje borelovská množina $B \subset \mathbf{R}^n$ taková, že $A \subset B$ a $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.*

Věta 19.6. *Necht' $n \in \mathbf{N}$ a $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom $\mathcal{H}^n(A) = \lambda^{n*}(A)$.*

————— Konec 9. přednášky, 21. 3. 2016 —————

Věta 19.7 (vlastnosti Hausdorffovy míry).

(a) *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $Q: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ je izometrie a $E \subset \mathbf{R}^k$. Potom $\mathcal{H}^k(Q(E)) = \lambda^{k*}(E)$.*

(b) *Necht' $k, n, m \in \mathbf{N}, k \leq n, k \leq m$, a $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ je β -lipschitzovské, $E \subset \mathbf{R}^n$. Potom*

$$\mathcal{H}^k(f(E)) \leq \beta^k \mathcal{H}^k(E).$$

(c) *Necht' $k_1, k_2, n \in \mathbf{N}, k_1 < k_2 \leq n$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Jestliže $\mathcal{H}^{k_1}(A) < \infty$, pak $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$.*

Lemma 19.8. *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, a $L: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou λ^k -měřitelnou množinu $A \subset \mathbf{R}^k$ platí*

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A).$$

Označení. *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, a $L: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit $\text{vol } L = \sqrt{\det L^T L}$.*

Definice. *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi: G \rightarrow \mathbf{R}^n$. Řekneme, že φ je **regulární** na G , jestliže je třídy \mathcal{C}^1 na G a $\varphi'(x)$ je prosté pro každé $x \in G$.*

————— Konec 10. přednášky, 23. 3. 2016 —————

Lemma 19.9. *Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\beta > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že*

(a) *zobrazení $y \mapsto \varphi(\varphi'(x)^{-1}(y))$ je β -lipschitzovské na $\varphi'(x)(V)$,*

(b) zobrazení $z \mapsto \varphi'(x)(\varphi^{-1}(z))$ je β -lipschitzovské na $\varphi(V)$.

Lemma 19.10. Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n, G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\alpha > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že pro každou λ^k -měřitelnou $E \subset V$ platí

$$\alpha^{-1} \int_E \text{vol } \varphi'(t) \, d\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \leq \alpha \int_E \text{vol } \varphi'(t) \, d\lambda^k(t).$$

————— Konec 11. přednášky, 30. 3. 2016 —————

Věta 19.11 (area formule). Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n, G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení a $f: \varphi(G) \rightarrow \mathbf{R}$ je \mathcal{H}^k -měřitelná. Potom platí

$$\int_{\varphi(G)} f(x) \, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \text{vol } \varphi'(t) \, d\lambda^k(t),$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.

Věta 19.12 (coarea formule). Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k > n, \varphi: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ je lipschitzovské zobrazení, $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ je λ^k -integrovatelná funkce. Potom platí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^k} f(x) \sqrt{\det(\varphi'(x)\varphi'(x)^T)} \, d\lambda^k(x) \\ = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\varphi^{-1}(\{y\})} f(x) \, d\mathcal{H}^{k-n}(x) \right) d\lambda^n(y). \end{aligned}$$

Důsledek 19.13. Necht' $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ je λ^k -integrovatelná funkce. Potom platí

$$\int_{\mathbf{R}^k} f(x) \, d\lambda^k(x) = \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbf{R}^k; \|x\|=r\}} f(x) \, d\mathcal{H}^{k-1}(x) \right) d\lambda^1(r).$$

19.2 Křivky, plochy a jejich orientace

Definice. Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je **k -dimenzionální plocha** (krátce **k -plocha**), jestliže pro každé $x \in M$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ takový, že $x \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M .

————— Konec 12. přednášky, 4. 4. 2016 —————

Definice. Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n, M$ je k -plocha a $x \in M$. Pak vektor $v \in \mathbf{R}^n$ nazveme **tečným vektorem** k ploše M v bodě x , jestliže $v = 0$ nebo existuje otevřený interval I , regulární zobrazení $c: I \rightarrow M$ a $t_0 \in I$ takové, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů k ploše M v bodě x nazýváme **tečným prostorem** k ploše M v bodě x a značíme $T_x(M)$.

Věta 19.14. Necht' $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n, M \subset \mathbf{R}^n$ je k -plocha a $x \in M$. Potom platí:

(a) $T_x(M)$ je k -dimenzionální vektorový prostor,

(b) je-li $G \subset \mathbf{R}^k$ otevřená množina, $a \in G$ a $\varphi: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je regulární homeomorfismus takový, že $x = \varphi(a) \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M , potom $\varphi'(a)(\mathbf{R}^k) = T_x(M)$.

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$ -plocha a $x \in M$. Řekneme, že $v \in \mathbf{R}^n$ je **normálový vektor** k ploše M v bodě x , jestliže $v \in T_x(M)^\perp$.

Definice. Necht' $n \in \mathbf{N}, n > 1, u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů u^1, \dots, u^{n-1} předpisem

$$u^1 \times \dots \times u^{n-1} = (\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}])_{i=1}^n) \in \mathbf{R}^n.$$

Věta 19.15 (vlastnosti vektorového součinu). Necht' $n \in \mathbf{N}, n > 1, a u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$.

(a) Pro každé $v \in \mathbf{R}^n$ platí

$$\langle v, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$

(b) Vektory u^1, \dots, u^{n-1} jsou lineárně závislé, právě když $u^1 \times \dots \times u^{n-1} = 0$.

(c) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle u^i, u^1 \times \dots \times u^{n-1} \rangle = 0$.

(d) Platí $\|u^1 \times \dots \times u^{n-1}\| = \text{vol}[u^1, \dots, u^{n-1}]$.

————— Konec 13. přednášky, 6. 4. 2016 —————

Definice. Necht' $n \in \mathbf{N}, n > 1$, a $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$ -plocha. **Orientací** M rozumíme spojitě zobrazení $\nu: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ takové, že $\nu(x) \in T_x(M)^\perp$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

Lemma 19.16. Necht' $n \in \mathbf{N}, n > 1, \Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$.

(R) Necht' existuje okolí U bodu z a **rozhraničující funkce** $h: U \rightarrow \mathbf{R}$ taková, že $h \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq 0$ a $U \cap \Omega = \{x \in U; h(x) < 0\}$.

Potom existuje okolí $V \subset U$ bodu z takové, že $V \cap H(\Omega)$ je $(n-1)$ -plocha. Vektor $\nu_\Omega(z) = \frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|}$ je jednotkový normálový vektor v bodě z k $V \cap H(\Omega)$ a nezávisí na volbě rozhraničující funkce h .

Definice. Necht' $n \in \mathbf{N}, n > 1, \Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že bod z je **regulárním bodem** hranice Ω , pokud je splněna podmínka (R) z Lemmatu 19.16 pro Ω a z . Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme **vnějším jednotkovým normálovým vektorem** k Ω v bodě z . Množinu všech regulárních bodů hranice Ω značíme $H_*(\Omega)$.

Věta 19.17. Necht' $n \in \mathbf{N}, n > 1, \Omega \subset \mathbf{R}^n$, je neprázdná omezená otevřená množina. Pokud $H_*(\Omega) \neq \emptyset$, pak $H_*(\Omega)$ je $(n-1)$ -plocha orientovaná normálovým polem ν_Ω .

————— Konec 14. přednášky, 11. 4. 2016 —————

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je 1-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\tau: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ takové, že $\tau(x) \in T_x(M)$ a $\|\tau(x)\| = 1$.

Definice. Necht' $a, b \in \mathbf{R}, a < b$.

- (a) Řekneme, že zobrazení $c: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.
- (b) Řekneme, že parametrická křivka $c: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ je **skoro regulární**, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^p$ intervalu $[a, b]$ takové, že
- c je třídy \mathcal{C}^1 na $[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, p$,
 - $\forall t \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_p\}: c'(t) \neq 0$.
- (c) Řekneme, že křivka $c: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ je **jednoduchá a uzavřená**, jestliže $c|_{[a,b]}$ je prosté a $c(a) = c(b)$.

Věta 19.18 (Jordan). Necht' $c: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka. Pak existují disjunktní otevřené souvislé množiny $\text{Int } c$ a $\text{Ext } c$ takové, že $\text{Int } c$ je omezená a $\text{Ext } c$ je neomezená a platí $\mathbf{R}^2 = \text{Int } c \cup \text{Ext } c \cup c([a, b])$. Navíc platí $H(\text{Int } c) = H(\text{Ext } c) = c([a, b])$.

Věta 19.19. Necht' $c: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka. Potom všechny body množiny $H(\text{Int } c)$ až na konečně mnoho jsou regulárními body $H(\text{Int } c)$.

19.3 Gaussova, Greenova a Stokesova věta

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$ -plocha orientovaná normálovým polem ν a $f: M \rightarrow \mathbf{R}^n$. **Tok vektorového pole** f orientovanou plochou (M, ν) definujeme jako

$$\int_M \langle f(y), \nu(y) \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

pokud integrál konverguje.

19.3 Gaussova, Greenova a Stokesova věta

Definice. Necht' $U \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f: U \rightarrow \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy \mathcal{C}^1 . Pro $x \in U$ definujeme **divergenci vektorového pole** f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\text{div } f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

Věta 19.20 (Gaussova věta o divergenci). Necht' $n \in \mathbf{N}, n > 1, \Omega \subset \mathbf{R}^n$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega)) < \infty, \mathcal{H}^{n-1}(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = 0$ a f je vektorové pole z \mathbf{R}^n do \mathbf{R}^n , které je třídy \mathcal{C}^1 na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y) \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \text{div } f(x) d\lambda^n(x).$$

Lemma 19.21 (rozklad jednotky). *Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Pak existují funkce $\omega_j: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, j \in \mathbf{N}$, takové, že pro každé $j \in \mathbf{N}$ platí*

(a) ω_j je nezáporná,

(b) ω_j je třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n)$,

(c) $\text{diam spt } \omega_j < \varepsilon$,

a pro každé $x \in \mathbf{R}^n$

(d) $\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) = 1$,

(e) existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu x takové, že množina $\{j \in \mathbf{N}; \text{spt } \omega_j \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná.

Lemma 19.22. *Nechť V je reálný unitární prostor dimenze $n \in \mathbf{N}$, $v \in V$ a $v \neq 0$. Potom existují vektory $u^1, \dots, u^n \in V$, které tvoří ortonormální bázi V a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\langle v, u^i \rangle > 0$.*

Lemma 19.23. *Nechť $n \in \mathbf{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $z \in H(\Omega)$ je regulární bod hranice Ω , $i \in \{1, \dots, n\}$ a $\nu_{\Omega}(z)_i > 0$. Potom existuje otevřená množina $W \subset \mathbf{R}^{n-1}$ obsahující bod $z^* = [z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n]$, otevřená množina $H \subset \mathbf{R}$ obsahující bod z_i a funkce $\varphi: W \rightarrow H$ taková, že $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a*

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbf{R}^n; [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n] \in W, x_i \in H, x_i < \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \\ = \{x \in \Omega; [x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n] \in W, x_i \in H\}. \end{aligned}$$

Lemma 19.24. *Nechť Ω a f jsou jako ve Větě 19.20 a $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ je lineární izometrie. Potom pro každý regulární bod z hranice Ω je bod $S(z)$ regulárním bodem hranice $S(\Omega)$ a platí $\nu_{S(\Omega)}(S(z)) = S\nu_{\Omega}(z)$. Dále platí*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div } f(x) \, d\lambda^n(x) &= \int_{S(\Omega)} \text{div}(S \circ f \circ S^{-1})(\tilde{x}) \, d\lambda^n(\tilde{x}), \\ \int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_{\Omega}(y) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) &= \int_{H(S(\Omega))} \langle S \circ f \circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y}) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Lemma 19.25. *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená omezená množina a $z \in H_*(\Omega) \cup \Omega$. Potom existuje otevřená množina $U \subset \mathbf{R}^n$ obsahující z taková, že pro každé vektorové pole f z \mathbf{R}^n do \mathbf{R}^n , které je třídy \mathcal{C}^1 na otevřené množině obsahující $\bar{\Omega}$ a $\text{spt } f \subset U$, platí*

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_{\Omega}(y) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{\Omega} \text{div } f(x) \, d\lambda^n(x).$$

Lemma 19.26. Necht' Ω a f jsou jako ve Větě 19.20 a spt $f \cap (H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = \emptyset$. Potom

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \nu_\Omega(y) \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x).$$

————— Konec 17. přednášky, 20. 4. 2016 —————

Lemma 19.27. Necht' $n \in \mathbf{N}, n > 1, N \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní a $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$. Potom existují \mathcal{C}^1 funkce $v_m: \mathbf{R}^n \rightarrow [0, 1], m \in \mathbf{N}$, takové, že platí:

- (a) $v_m \rightarrow \chi_{\mathbf{R}^n \setminus N}$,
- (b) $\int \|\nabla v_m(x)\| d\lambda^n(x) \rightarrow 0$,
- (c) pro každé $m \in \mathbf{N}$ existuje otevřená množina $G_m \subset \mathbf{R}^n$ obsahující N taková, že $v_m|_{G_m} = 0$.

Definice.

- (a) Necht' $U \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina a $f: U \rightarrow \mathbf{R}^2$ je zobrazení třídy \mathcal{C}^1 . Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

- (b) Necht' $U \subset \mathbf{R}^3$ je otevřená množina a $f: U \rightarrow \mathbf{R}^3$ je zobrazení třídy \mathcal{C}^1 . Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right].$$

————— Konec 18. přednášky, 27. 4. 2016 —————

Věta 19.28 (Green). Necht' $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^1(H(\Omega)) < \infty, \mathcal{H}^1(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)) = 0$ a f je vektorové pole z \mathbf{R}^2 do \mathbf{R}^2 , které je třídy \mathcal{C}^1 na otevřené množině obsahující $\bar{\Omega}$. Necht' $\tau_\Omega: H_*(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}^2$ je tečné vektorové pole k $H_*(\Omega)$ definované předpisem $\tau_\Omega(y) = - \times \nu_\Omega(y)$. Pak platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y) \rangle d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x) d\lambda^2(x).$$

Definice. Necht' $c: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ je skoro regulární křivka.

- (a) Necht' g je funkce z \mathbf{R}^n do \mathbf{R} . **Křivkový integrál prvního druhu** $\int_c g ds$ definujeme jako

$$\int_a^b g(c(t)) \cdot \|c'(t)\| dt,$$

pokud tento integrál konverguje.

(b) Necht' f je vektorové pole z \mathbf{R}^n do \mathbf{R}^n . **Křivkový integrál druhého druhu** $\int_c f \cdot dc$ definujeme jako

$$\int_a^b \langle f(c(t)), c'(t) \rangle dt,$$

pokud tento integrál konverguje.

Věta 19.29. Necht' $c: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená křivka a f je vektorové pole z \mathbf{R}^2 do \mathbf{R}^2 , které je třídy \mathcal{C}^1 na otevřené množině obsahující $\overline{\text{Int } c}$. Jestliže existuje $t \in [a, b]$ takové, že $\det[\nu_\Omega(c(t)), c'(t)] > 0$, pak platí

$$\int_c f \cdot dc = \int_{\text{Int } c} \text{rot } f(x) d\lambda^2(x).$$

Definice. Necht' $G \subset \mathbf{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem ν , $\Omega \subset G$ je relativně otevřená v G a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$. Řekneme, že $z \in H_G(\Omega)$ je **regulárním** bodem hranice Ω vzhledem ke G , jestliže existuje okolí U bodu z a funkce $h: U \rightarrow \mathbf{R}$ třídy \mathcal{C}^1 taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq 0$ a $\{x \in G \cap U; h(x) < 0\} = \Omega \cap U$. V takovém bodě definujeme

$$\tau_{\Omega, \nu}(z) = \frac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|}.$$

Věta 19.30. Necht' G , ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Označme $H_G(\Omega)_*$ množinu všech regulárních bodů hranice Ω vzhledem ke G . Potom je $H_G(\Omega)_*$ 1-plocha a $\tau_{\Omega, \nu}$ je orientace $H_G(\Omega)_*$.

Věta 19.31 (Stokes). Necht' G , ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Předpokládejme dále, že Ω je omezená, $\mathcal{H}^1(H_G(\Omega)) < \infty$ a $\mathcal{H}^1(H_G(\Omega) \setminus H_G(\Omega)_*) = 0$. Necht' vektorové pole f z \mathbf{R}^3 do \mathbf{R}^3 je třídy \mathcal{C}^1 na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Potom

$$\int_{H_G(\Omega)} \langle f(y), \tau_{\Omega, \nu}(y) \rangle d\mathcal{H}^1(y) = \int_{\Omega} \langle \text{rot } f(x), \nu(x) \rangle d\mathcal{H}^2(x).$$

19.4 Hlavní věta teorie pole

Věta 19.32 (věta o potenciálu). Necht' $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Necht' $c: [a, b] \rightarrow \Omega$ je skoro regulární křivka a $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce třídy \mathcal{C}^1 . Potom

$$u(c(b)) - u(c(a)) = \int_c \nabla u \cdot dc.$$

Definice. Řekneme, že množina $U \subset \mathbf{R}^n$ je **hvězdicovitá**, jestliže existuje $a \in U$ takový, že pro každé $x \in U$ platí $\{a + t(x - a); t \in [0, 1]\} \subset U$.

Definice. Necht' $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je množina, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ je vektorové pole a $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. Řekneme, že u je **potenciál** pole f na Ω , jestliže pro každé $x \in \Omega$ platí $\nabla u(x) = f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme **potenciální**.

Věta 19.33 (hlavní věta teorie pole). *Necht' $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitě vektorové pole. Uvažujme následující výroky:*

- (i) *Vektorové pole f je potenciální.*
- (ii) *Pro každé skoro regulární křivky $c_i: [a, b] \rightarrow \Omega, i \in \{1, 2\}$, splňující $c_1(a) = c_2(a)$ a $c_1(b) = c_2(b)$ platí $\int_{c_1} f \cdot dc_1 = \int_{c_2} f \cdot dc_2$.*
- (iii) *Pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in \Omega$ platí $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.*

Potom platí:

- (a) (i) \Leftrightarrow (ii)
- (b) *Je-li f třídy \mathcal{C}^1 , pak (i) \Rightarrow (iii).*
- (c) *Je-li f třídy \mathcal{C}^1 a Ω je hvězdicovitá, pak (iii) \Rightarrow (i).*

20 Absolutně spojitě funkce a funkce s konečnou variací

20.1 Diferencovatelnost skoro všude

Lemma 20.1 (lemma o vycházejícím slunci). *Necht' h je spojitá funkce na $[a, b]$. Označme*

$$E_1 = \{x \in (a, b); \exists \xi \in (x, b): h(\xi) > h(x)\},$$

$$E_2 = \{x \in (a, b); \exists \xi \in (a, x): h(\xi) > h(x)\}.$$

Potom platí

- (a) *E_1 je sjednocením disjunktních intervalů $(a_j, b_j), j \in \mathbf{N}$, kde $h(a_j) \leq h(b_j)$,*
- (b) *E_2 je sjednocením disjunktních intervalů $(c_j, d_j), j \in \mathbf{N}$, kde $h(c_j) \geq h(d_j)$.*

Lemma 20.2. *Necht' f je neklesající lipschitzovská funkce na intervalu $[a, b]$. Potom má f konečnou derivaci s.v. v intervalu $[a, b]$.*

K důkazu Lemmatu 20.2. Necht' f je funkce definovaná na okolí bodu $x \in \mathbf{R}$. **Derivovaná čísla** jsou definována předpisy:

$$D^+ f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x}; y \in (x, x + t) \right\},$$

$$D_+ f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x}; y \in (x, x + t) \right\},$$

$$D^- f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x}; y \in (x - t, x) \right\},$$

$$D_- f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{y - x}; y \in (x - t, x) \right\}.$$

Věta 20.3 (Lebesgue). Necht' f je monotonní funkce na intervalu $[a, b]$. Potom má f konečnou derivaci s.v. v intervalu $[a, b]$.

Lemma 20.4. Necht' f je K -lipschitzovská funkce na množině $E \subset \mathbf{R}$. Potom $\lambda^*(f(E)) \leq K\lambda^*(E)$.

Lemma 20.5. Necht' $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $E \subset [a, b]$, $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, a $|f'(x)| \leq K$ pro každé $x \in E$. Potom $\lambda^*(f(E)) \leq K\lambda^*(E)$.

————— Konec 21. přednášky, 11. 5. 2016 —————

Věta 20.6. Necht' f je neklesající funkce na intervalu $[a, b]$. Potom $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ a $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$.

20.2 Funkce s konečnou variací

Definice. Necht' $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$. **Variaci funkce f na intervalu $[a, b]$** definujeme předpisem

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|; \{x_i\}_{i=0}^n \text{ je dělení } [a, b] \right\}.$$

Řekneme, že funkce $g: I \rightarrow \mathbf{C}$ má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ **omezenou variaci**, jestliže existuje $K \in \mathbf{R}$ takové, že $V_a^b(g) < K$ pro každý interval $[a, b] \subset I$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu I značíme $BV(I)$.

Věta 20.7. Necht' $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Platí $f \in BV([a, b])$, právě když existují neklesající a omezené funkce $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, takové, že $f = g - h$.

Věta 20.8. Necht' $f \in BV([a, b])$. Potom má f vlastní derivaci skoro všude v $[a, b]$.

20.3 Absolutně spojité funkce

Definice. Řekneme, že funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ je **absolutně spojitá** na intervalu $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, takové, že pro každou konečnou posloupnost bodů $a \leq a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b$ splňující $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$ platí $\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme $AC([a, b])$.

Věta 20.9.

- (a) Jestliže $f \in AC([a, b])$, potom $f'(x)$ existuje s.v. v $[a, b]$, $f' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ a pro každé $x, y \in [a, b], x \leq y$, platí $f(y) - f(x) = \int_x^y f'$.
- (b) Necht' $\varphi \in \mathcal{L}^1([a, b])$ a $f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt, x \in [a, b]$. Potom $f \in AC([a, b])$ a $f'(x) = \varphi(x)$ s.v. v $[a, b]$.

Věta 20.10 (integrace per partes). Necht' $f, g \in AC([a, b])$. Potom

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

21 Fourierovy řady

21.1 Základní pojmy

Definice.

- (a) **Trigonometrickou řadou** rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

kde $c_k \in \mathbf{C}, k \in \mathbf{Z}$.

- (b) **Trigonometrickým polynomem** rozumíme funkci tvaru

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

kde $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, c_k \in \mathbf{C}, k = -n, \dots, n$.

————— Konec 22. přednášky, 16. 5. 2016 —————

Lemma 21.1. Necht' posloupnost $\left\{ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na \mathbf{R} . Potom pro každé $k \in \mathbf{Z}$ platí

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Označení.

- (a) Množinu všech 2π -periodických funkcí s hodnotami v \mathbf{C} , které jsou lebesgueovsky integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$, budeme značit $\mathcal{P}(2\pi)$.
- (b) Pro $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ definujeme pseudonormu předpisem

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

Definice (komplexní tvar Fourierovy řady). Necht' $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Pak definujeme

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, nazýváme **komplexními Fourierovými koeficienty**. Řadu $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$ nazýváme **komplexním tvarem Fourierovy řady funkce f** a jejím n -tým částečným součtem rozumíme

$$s_n^f(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Řekneme, že **součet Fourierovy řady** v bodě $x \in \mathbf{R}$ je roven $s \in \mathbf{C}$, jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^f(x) = s$.

Lemma 21.2. Necht' $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) dt.$$

Označení. Necht' $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a g je esenciálně omezená měřitelná 2π -periodická funkce. Potom definujeme

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) dt.$$

Funkce $f * g$ se nazývá **konvoluce**.

21.2 Cesàrovská sčítatelnost Fourierových řad

Definice. Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **sčítatelná Cesàrovou metodou** k číslu $\sigma \in \mathbf{C}$, jestliže platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^k a_j$. Píšeme $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

Označení.

- Pro $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

$$\sigma_n^f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n s_j^f(x).$$

- Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ položíme

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}, \quad \text{(Dirichletovo jádro)}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_j(x). \quad \text{(Fejérovovo jádro)}$$

Lemma 21.3 (vlastnosti Dirichletova jádra).

- (a) Pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$ platí

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

- (b) Funkce D_n je spojitá, sudá, 2π -periodická a $D_n(0) = 2n + 1$.

- (c) Platí $\int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 2\pi$.

- (d) Pro každé $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbf{R}$ platí $s_n^f(x) = f * D_n(x)$.

————— Konec 23. přednášky, 18. 5. 2016 —————

Lemma 21.4 (vlastnosti Fejérového jádra).

- (a) Pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$ platí

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} \right)^2.$$

- (b) Funkce K_n je spojitá, nezáporná, sudá, 2π -periodická a $K_n(0) = n + 1$.

- (c) Platí $\int_0^{2\pi} K_n(x) dx = 2\pi$.

- (d) Pro každé $f \in \mathcal{P}(2\pi)$, $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbf{R}$ platí $\sigma_n^f(x) = f * K_n(x)$.

- (e) Posloupnost $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k nulové funkci na intervalu $(0, 2\pi)$.

Věta 21.5 (Fejérová věta). *Necht' $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $x \in \mathbf{R}$.*

(a) *Má-li f v bodě x konečné jednostranné limity $f(x+)$, $f(x-)$, pak*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

(b) *Je-li f spojitá na intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, pak $\{\sigma_n^f\}_{n=0}^\infty$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a, b) .*

Důsledek 21.6. *Necht' $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ je spojitá 2π -periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů $\{P_n\}$, která stejnoměrně konverguje k f na \mathbf{R} .*

Věta 21.7. *Necht' $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sigma_n^f\|_1 = 0$.*

————— Konec 24. přednášky, 23. 5. 2016 —————

Věta 21.8 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma). *Necht' $f \in \mathcal{P}(2\pi)$. Potom $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(k) = 0$.*

Věta 21.9 (o lokalizaci). *Necht' $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $f, g \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $f(t) = g(t)$ pro každé $t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n^f(x) - s_n^g(x)) = 0$.*

Věta 21.10. *Necht' $f, g \in \mathcal{P}(2\pi)$ a $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ pro každé $k \in \mathbf{Z}$. Potom $f = g$ s.v.*

21.3 Bodová konvergence Fourierových řad

Věta 21.11 (Hardy). *Necht' $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost komplexních čísel taková, že existuje $K \in \mathbf{R}$ splňující $|ka_k| \leq K$ pro každé $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Pokud $(C) \sum_{n=0}^\infty a_n = s \in \mathbf{C}$, potom $\sum_{n=0}^\infty a_n = s$.*

Lemma 21.12. *Pokud f je 2π -periodická funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$, potom existuje $K \in \mathbf{R}$ takové, že $|k\hat{f}(k)| \leq K$ pro každé $k \in \mathbf{Z}$.*

Věta 21.13 (Jordanovo-Dirichletovo kritérium). *Necht' $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$ a $x \in \mathbf{R}$. Potom funkce f má v bodě x vlastní limitu zprava i zleva (označme je $f(x+)$ a $f(x-)$) a platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)).$$

Je-li navíc f spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbf{R}$, pak $s_n^f \xrightarrow{\text{loc}} f$ na intervalu I .

————— Konec 25. přednášky, 25. 5. 2016 —————