

Implicitní funkce

V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočítejte první a druhou derivaci této funkce v bodě x_0 .

- $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$, $[0, 1]$
- $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$, $[2, 0]$
- $\sin(xy) + \cos(xy) = 1$, $[\pi, 0]$
- $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$, $[1, 0]$
- $\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0$, $[0, 0]$
- $\log(x + \arctg y + 1) + xy = 0$, $[0, 0]$
- $x^y + y^x = 2y$, $[1, 1]$
- $y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0$, $[0, 0]$
- $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$, $[0, 0]$
- $\frac{\pi}{2} + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$, $[0, 0]$

11. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$. Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$, určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U , napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

12. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}$, které splňují vztah $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$ je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu $(1, 1)$, pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Určete totální diferenciál v bodě $[1, 1]$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.

13. Spočítejte parciální derivace funkce z v bodě $[0, 1]$, která je implicitně zadaná rovnicí $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$ a splňuje $z(0, 1) = 1$.

V následujících třech úlohách ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v (proměnných x, y). Spočítejte obě parciální derivace prvního řádu těchto funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

14. $xe^{u+v} + 2uv = 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$, $[1, 2, 0, 0]$

15. $x = u \cos \frac{v}{u}, y = u \sin \frac{v}{u}$, $[1, 0, 1, 0]$

16. $x = e^u + u \sin v, y = e^u - u \cos v$, $[e + 1, e, 1, \pi/2]$

17. Ukažte, že vztahy $u = \arctg(\pi x) + y^2z, v = e^{-x} + 2\frac{y}{z}, w = \cos(2xy) + 2\sqrt{z}$ definují na okolí bodu $[u, v, w] = [4, \frac{3}{2}, 5]$ hladké funkce $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$, pro které platí $x(4, \frac{3}{2}, 5) = 0, y(4, \frac{3}{2}, 5) = 1, z(4, \frac{3}{2}, 5) = 4$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$, a pokud ano, spočítejte jej. Má funkce $y(u, v, w)$ v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$ stacionární bod?

18. Ukažte, že vztahy $u = \sin x + xy + e^z, v = \cos y + xe^{-y}, w = x^2 + 2y - \cos(xz)$ definují na okolí bodu $[u, v, w] = [1 + \sin 1, 2, 0]$ hladké funkce $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$, pro které platí $x(1 + \sin 1, 2, 0) = 1, y(1 + \sin 1, 2, 0) = 0, z(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$. Rozhodněte, zda má funkce $x(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[1 + \sin 1, 2, 0]$, a pokud ano, spočítejte jej.

19. Dokažte, že vztahy $u = \sin(\pi xy) - \arctg(\frac{y}{x}), v = 3xy^2 + e^{x+y}$ definují na okolí bodu $[u, v] = [\frac{\pi}{4}, -2]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(\frac{\pi}{4}, -2) = -1$ a $y(\frac{\pi}{4}, -2) = 1$. Je-li navíc $z(x, y) := \log(x^2 + y^2)$, spočítejte $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, -2)$.

20. Dokažte, že vztahy $u = \tg(xy) + \log(x^2 + y^2), v = \arcsin(2x) - (3^x)^y$ definují na okolí bodu $[u, v] = [0, -1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, -1) = 0$ a $y(0, -1) = 1$. Rozhodněte, zda má funkce y v bodě $[u, v] = [0, -1]$ totální diferenciál, a pokud ano, spočítejte jej.

21. Ukažte, že vztahy $u = \cos(\pi y) + 2\sqrt{xz}, v = \frac{y}{x} - \log z, w = \frac{x^2}{2} - \arctg(yz)$ definují na okolí bodu $[u, v, w] = [3, 0, \frac{1}{2}]$ hladké funkce $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$, pro které platí $x(3, 0, \frac{1}{2}) = 1, y(3, 0, \frac{1}{2}) = 0, z(3, 0, \frac{1}{2}) = 1$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$, a pokud ano, spočítejte jej.

Výsledky

1. 2, -14 2. Rovnice tečny: 0.

3. Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na \mathbf{R}^2 a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \cos(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x.$$

Obě parciální derivace jsou na \mathbf{R}^2 spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(\pi, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítáme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) &= 1, \\ \cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) &= 0, \\ -\sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) & \\ -\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

4. Položme

$$F(x, y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Funkce F je definována na \mathbf{R}^2 a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na \mathbf{R}^2 spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(1, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítáme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} 2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 &= 0, \\ 8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) &= 0, \\ 24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x) & \\ + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

5. Položme

$$F(x, y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbf{R}^2$) obsahující bod $[0, 0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2x - \sin(xy) \cdot y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2y - \sin(xy) \cdot x) + 1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu

$[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \log(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) &= 0, \\ \frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))) + \varphi'(x) &= 0, \\ \frac{-1}{(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)))^2} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\ + \frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) \\ - \cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) + \varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -2$.

6. Položme

$$F(x, y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0, 0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1 + y^2} + x. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \log(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1) + x\varphi(x) &= 0, \\ \frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right) + \varphi(x) + x\varphi'(x) &= 0, \\ \frac{-1}{(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1)^2} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right)^2 \\ + \frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \frac{\varphi''(x)(1 + \varphi(x)^2) - 2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1 + \varphi(x)^2)^2} \\ + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) &= 0, \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = 2$.

7. Položme

$$F(x, y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, která obsahuje bod $[1, 1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= yx^{y-1} + y^x \log y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= x^y \log x + xy^{x-1} - 2. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1, 1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepíšeme na tvar

$$e^{\varphi(x) \log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right) + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right)^2 + e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi''(x) \log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \right) \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)^2 \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2} \right) - 2\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$. Položme

$$F(x, y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, která obsahuje bod $[1, 1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= yx^{y-1} + y^x \log y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= x^y \log x + xy^{x-1} - 2. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1, 1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítáme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepíšeme na tvar

$$e^{\varphi(x) \log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right) + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right)^2 + e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi''(x) \log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \right) \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)^2 \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2} \right) - 2\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

8. Položme

$$F(x, y) = y^3 x^2 + y^2 x^2 + \sin y.$$

Funkce F je definována na \mathbf{R}^2 . Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= 2y^3 x + 2y^2 x, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 x^2 + 2yx^2 + \cos y. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na \mathbf{R}^2 spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu

$[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3 x^2 + \varphi(x)^2 x^2 + \sin \varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{aligned} 3\varphi(x)^2 \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^3 x + 2\varphi(x) \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^2 x + \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) &= 0, \\ 6\varphi(x) \varphi'(x) \varphi'(x) x^2 + 3\varphi(x)^2 \varphi''(x) x^2 + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x & \\ + 2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x) \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x) \varphi''(x) x^2 + 4\varphi(x) \varphi'(x) x & \\ + 4\varphi(x) \varphi'(x) x + 2\varphi(x)^2 - \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x) \varphi'(x) + \cos \varphi(x) \cdot \varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

9. Položme

$$F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na \mathbf{R}^2 . Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na \mathbf{R}^2 spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{aligned} e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2 & \\ + e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 & \\ - e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) - 2\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

10. Položme

$$F(x, y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F – můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její

derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} & \arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) = 0, \\ & \frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 - (x + (\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1 - (\varphi(x) + x^2)^2}} = 0, \\ & -\frac{1}{2}(1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x + (\varphi(x))^2)) \cdot (1 + 2\varphi(x)\varphi'(x))^2 \\ & \quad + (1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) \\ & -\frac{1}{2}(1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x) + x^2)) \cdot (\varphi'(x) + 2x)^2 \\ & \quad + (1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x) + 2) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a využijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = -4$.

- 11.** Rovnice tečné roviny: $L(x, y) = \frac{7}{5}(y + 2) + 1$. **12.** Rovnice tečné roviny: $L(x, y) = -(x - 1) - (y - 1) + 1$. **13.** $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 1$ **14.** $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 2) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 2) = -1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 2) = -1/3$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 2) = 1/3$ **15.** $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) = 1$ **16.** $\frac{\partial u}{\partial x}(e + 1, e) = 1/(1 + e)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(e + 1, e) = -e/(e + 1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(e + 1, e) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(e + 1, e) = 1$ **17.** $\nabla y(4, \frac{3}{2}, 5) = (\frac{2}{\pi+16}, \frac{2\pi}{\pi+16}, \frac{\pi-8}{\pi+16})$, funkce $y(u, v, w)$ v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$ nemá stacionární bod
- 18.** $\nabla x(1 + \sin 1, 2, 0) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ **19.** $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, -2) = -\frac{2}{9-2\pi}$ **20.** $\nabla y(0, -1) = (\frac{1}{2-\log 3}, \frac{-1}{2(2-\log 3)})$
- 21.** $\nabla y(3, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, funkce $y(u, v, w)$ nemá v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$ stacionární bod