

## EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

### ÚLOHY ŘEŠITELNÉ BEZ VĚTY O MULTIPLIKÁTORECH

Nalezněte absolutní extrémum funkce  $f$  na množině  $M$ .

1.  $f(x, y) = x + y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
2.  $f(x, y) = e^x$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
3.  $f(x, y) = x^2 + y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$
4.  $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z$ ;  $M = [-1; 1] \times [-1; 1] \times [-1; 1]$
5.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ ;  $M = \mathbf{R}^3$
6.  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ ;  $M = \mathbf{R}^2$
7.  $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ,  $a > 0, b > 0$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$
8.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ ;  $a > b > c > 0$
9.  $f(x, y) = (x + y)e^{-2x - 3y}$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$
10. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádrů o objemu  $32m^3$  tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

### ÚLOHY NA VĚTU O LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORECH

Nalezněte maxima a minima funkce  $f$  na množině  $M$ .

11.  $f(x, y) = x + y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$
12.  $f(x, y, z) = xyz$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
13.  $f(x, y, z) = xyz$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$
14.  $f(x, y, z) = xyz$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \geq 0\}$
15.  $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
16.  $f(x, y, z) = xy^2z^3$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0, z > 0\}$ ; kde  $a > 0$
17.  $f(x, y) = y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$
18.  $f(x, y) = x^2 + y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$
19.  $f(x, y) = x^4y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
20.  $f(x, y) = 2x + 4y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
21.  $f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2)$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$
22.  $f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$
23.  $f(x, y, z) = xy + yz$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$
24.  $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2 + y^2)}$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$
25.  $f(x, y, z) = z + e^{xy}$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$
26.  $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$
27.  $f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

### LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ

U následujících funkcí nalezněte lokální extrémum.

28.  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$
29.  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$   $x > 0, y > 0$
30.  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

31.  $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$   
 32.  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3xz - 3yz$   
 33.  $f(x, y) = x^3 + y^2 + 12xy$   
 34.  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ,  
 35.  $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$   
 36.  $f(x, y) = x + y + 4 \sin x \sin y$   
 37.  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \log x - 10 \log y$

## VÝSLEDKY

1. Maximum:  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ , minimum:  $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ .    2. Maximum:  $[1, 0]$ , minimum:  $[-1, 0]$ .  
 3. Maximum:  $[0, 1]$ ,  $[1, 0]$ , minimum:  $[0, 0]$ .    4. Maximum:  $[1, 1, 1]$ ,  $[1, -1, 1]$ ,  $[-1, 1, 1]$ ,  $[-1, -1, 1]$ ; minimum:  $[0, 0, -1]$ .    5. Maxima se nenabývá; minimum:  $[-1, -2, 3]$ .    6. Maximum se nabývá v každém bodě jednotkové kružnice; minimum:  $[0, 0]$ .    7. Maximum:  $[a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2}]$ ; minimum:  $[-a/\sqrt{a^2 + b^2}, -b/\sqrt{a^2 + b^2}]$ .    8. Maximum:  $[a, 0, 0]$ ,  $[-a, 0, 0]$ ; minimum:  $[0, 0, 0]$ .    9. Maximum:  $[1/2, 0]$ ; minimum:  $[0, 0]$     10. Dno nádrže bude čtverec  $4m \times 4m$  a hloubka nádrže bude  $2m$ .    11. Maximum:  $[1, 1]$ , minimum:  $[0, 0]$     12. Maximum:  $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ ,  $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ ,  $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ ,  $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ ; minimum:  $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ ,  $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ ,  $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ ,  $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ .  
 13. Množina  $M$  je kompaktní a funkce  $f$  je spojitá, nabývá tedy na  $M$  maxima a minima. Použijeme Lagrangeovu větu o multiplikátorech. Položme  $G = \mathbf{R}^3$ ,

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z.$$

Funkce  $f$ ,  $g_1$  a  $g_2$  jsou třídy  $\mathcal{C}^1(G)$ . Vypočítejme příslušné parciální derivace.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= yz, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= xz, & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= xy, \\ \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= 1. \end{aligned}$$

Vektory  $[2x, 2y, 2z]$  a  $[1, 1, 1]$  jsou lineárně závislé právě tehdy, když platí  $x = y = z$ . Žádný bod s touto vlastností ovšem neleží v množině  $M$ , neboť pro bod  $[x, x, x]$  by muselo současně platit  $g_1(x, x, x) = 3x^2 - 1 = 0$  i  $g_2(x, x, x) = 3x = 0$ , což nelze. Je tedy třeba vyřešit tuto nelineární soustavu:

$$yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 = 0, \tag{1}$$

$$xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 = 0, \tag{2}$$

$$xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 = 0, \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \tag{4}$$

$$x + y + z = 0. \tag{5}$$

Odečtením (??) od (??) dostaneme:

$$-z(x - y) + 2\lambda_1(x - y) = 0. \tag{6}$$

Odtud plyne, že musí být  $z = 2\lambda_1$  nebo  $x = y$ . Podobně odečtením (??) od (??) dostaneme:

$$-x(y - z) + 2\lambda_1(y - z) = 0. \tag{7}$$

Toto dává  $x = 2\lambda_1$  nebo  $y = z$ . Ze vztahů (??) a (??) tedy vyplývá, že musí být buď  $x = y$ , nebo  $y = z$ , nebo  $x = z$ . Podívejme se nejprve na první případ, kdy  $x = y$ . Z (??) máme  $z = -2x$  a (??) pak dává

$6x^2 = 1$ , tj.  $x = 1/\sqrt{6}$  nebo  $x = -1/\sqrt{6}$ . K těmto bodům lze skutečně dopočítat příslušná  $y, z, \lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Případy  $y = z$  a  $z = x$  vyřešíme obdobně. Obdržíme tyto podezřelé body:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right], \quad \left[ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right], \quad \left[ -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right], \\ & \left[ -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right], \quad \left[ \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right], \quad \left[ \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right]. \end{aligned}$$

Výpočtem hodnot funkce  $f$  v uvedených bodech zjistíme, že v prvním řádku jsou body, kde funkce  $f$  nabývá maxima na  $M$ , a ve druhém řádku jsou body, kde  $f$  nabývá minima na  $M$ .

**14.** Množina  $M$  je kompaktní, neboť  $M$  je uzavřená polokoule. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže nabývá na  $M$  maxima i minima. Body podezřelé z extrému budeme hledat zvlášť vzhledem k vnitřku množiny  $M$  a zvlášť vzhledem k hranici  $M$ . Mimo takto nalezené body již nemůže existovat další bod extrému, neboť je-li  $\vec{x} \in A \subset M$  bod extrému vzhledem k  $M$ , pak je to i bod extrému vzhledem k  $A$ .

Vnitřek  $M$  je roven  $\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1, x + y + z > 0\}$ . Funkce  $f$  je třídy  $\mathcal{C}^1$ . Body podezřelé z extrému vzhledem k  $\text{Int } M$  jsou body, v nichž jsou všechny parciální derivace prvního řádu rovny 0. Platí  $\nabla f(x, y, z) = [yz, xz, xy]$ . Tento vektor je roven nulovému vektoru právě v bodech s alespoň dvěma nulovými souřadnicemi, tj. na souřadnicových osách. Body podezřelé z extrému ležící v  $\text{Int } M$  jsou tedy právě prvky některé z následujících množin:

$$\{[x, 0, 0]; x \in (0, 1)\}, \quad \{[0, y, 0]; y \in (0, 1)\} \quad \text{a} \quad \{[0, 0, z]; z \in (0, 1)\}.$$

Hranici  $H(M)$  si rozdělíme na části

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, y, z] \in G_1; x + y + z = 0\}, \quad \text{kde} \\ G_1 &= \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}, \\ H_2 &= \{[x, y, z] \in G_2; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad \text{kde} \\ G_2 &= \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x + y + z > 0\}, \\ H_3 &= \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že množiny  $G_1$  a  $G_2$  jsou otevřené. Pro nalezení bodů podezřelých z extrému vzhledem k množině  $H_1$ , resp.  $H_2, H_3$ , můžeme použít větu o Lagrangeových multiplikatorech.

Funkce  $[x, y, z] \mapsto x + y + z$  má na  $\mathbf{R}^3$  nenulový gradient, takže v případě množiny  $H_1$  dostaneme body podezřelé z extrému řešením soustavy

$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0, \\ xz + \lambda &= 0, \\ xy + \lambda &= 0, \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme jediné řešení této soustavy  $[x, y, z] = [0, 0, 0]$ . Tento bod leží v množině  $H_1$ , a je tedy bodem podezřelým z extrému.

V případě množiny  $H_2$  má funkce  $[x, y, z] \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$  nulový gradient pouze v bodě  $[0, 0, 0]$ , který není prvkem  $H_2$ , takže body podezřelé z extrému dostaneme vyřešením soustavy

$$\begin{aligned} yz + 2\lambda x &= 0, \\ xz + 2\lambda y &= 0, \\ xy + 2\lambda z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme řešení, přičemž příslušné hodnoty  $\lambda$  neuvádíme:

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right], \\ & \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right], \quad \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right], \\ & [1, 0, 0], \quad [-1, 0, 0], \quad [0, 1, 0], \quad [0, -1, 0], \quad [0, 0, 1], \quad [0, 0, -1]. \end{aligned}$$

Z těchto bodů leží v množině  $H_2$  pouze tyto body:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ [1, 0, 0], \quad [0, 1, 0], \quad [0, 0, 1].$$

Množinu  $H_3$  jsme vyšetřili již v předchozím příkladu. Zde dostáváme podezřelé body

$$\left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right], \\ \left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right].$$

Porovnáním hodnot funkce  $f$  v podezřelých bodech zjistíme, že funkce  $f$  nabývá maxima na  $M$  v bodě  $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$  a minima na  $M$  v bodech  $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ .

**15.** Maximum:  $[\pi/6, \pi/6, \pi/6]$ ; minima se nenabývá. **16.** Maximum:  $[a/6, a/6, a/6]$ ; minima se nenabývá. **17.** Maximum:  $[\sqrt{3}/2, 1/2]$ ,  $[-\sqrt{3}/2, 1/2]$ ; minimum:  $[\sqrt{3}/2, -1/2]$ ,  $[-\sqrt{3}/2, -1/2]$ .

**18.** Maximum:  $[\sqrt{7\sqrt{5}/12}/3, \sqrt{5}/12]$ ,  $[-\sqrt{7\sqrt{5}/12}/3, \sqrt{5}/12]$ ; minimum:  $[0, 0]$ .

**19.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce  $f$  a zkoumejme, zda uvnitř množin  $M$  existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce  $f$  nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro  $[0, y]$ ;  $y \in (-2, 2)$ . Hranici množiny  $M$  si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \\ H_2 = \{[-1, y] \in \mathbf{R}^2; y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině  $H_1$  použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí  $g(x, y) = x^4 + y^4 - 16$ , která je (stejně jako  $f$ ) třídy  $C^1(\mathbf{R}^2)$ . Pro parciální derivace funkce  $g$  platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4y^3, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Pro každé  $[x, y] \in H_1$  platí  $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$ . Řešme následující soustavu

$$x^4 + y^4 = 16, \quad (1)$$

$$4x^3y = \lambda 4x^3, \quad (2)$$

$$x^4 = \lambda 4y^3. \quad (3)$$

Z (2) vyplývá, že  $x = 0$  nebo  $y = \lambda$ . V prvním případě dostaneme z (1), že  $y = \pm 2$ . V druhém případě dostaneme z (3), že  $x = \sqrt{2}y$  nebo  $x = -\sqrt{2}y$ . Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku  $x > -1$ . Zkoumejme chování na množině  $H_2$ . Funkce  $f$  má na  $H_2$  tvar:

$$f(-1, y) = y, \quad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \quad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že  $f$  nabývá maxima na množině  $M$  v bodě  $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$  a minima v  $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ .

**20.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce  $f$  a zkoumejme, zda uvnitř množiny  $M$  existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce  $f$  nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto  $f$  nabývá extrémů na hranici  $M$ . Hranici množiny  $M$  si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0, y > 0\},$$

$$H_2 = \{[0, y] \in \mathbf{R}^2; y \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$H_3 = \{[x, 0] \in \mathbf{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině  $H_1$  použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí  $g(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$ , která je (stejně jako  $f$ ) třídy  $C^1$  na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce  $g$  platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \quad x > 0, y > 0.$$

Pro každé  $[x, y] \in H_1$  platí  $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$ . Řešme následující soustavu

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \tag{1}$$

$$2 = \lambda \frac{1}{4}x^{-3/4}, \tag{2}$$

$$4 = \lambda \frac{1}{4}y^{-3/4}. \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá, že  $x = 2\sqrt[3]{2}y$ . Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[ \frac{2^{4/3}}{(2^{1/3} + 1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3} + 1)^4} \right].$$

Zkoumejme chování na množině  $H_2$ . Funkce  $f$  má na  $H_2$  tvar:

$$f(0, y) = 4y, \quad y \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$ .

Podobně zkoumejme chování na množině  $H_3$ . Funkce  $f$  má na  $H_3$  tvar:

$$f(x, 0) = 2x, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou  $[0, 0]$ ,  $[1, 0]$ .

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že  $f$  nabývá maxima na množině  $M$  v bodě  $[0, 1]$  a minima v bodě  $[0, 0]$ .

**21.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny  $M$  je prázdný. Z tvaru funkce  $f$  vyplývá, že

$$f(x, y, 1) = f(x, y, -1) < f(x, y, z) < f(x, y, 0), \quad [x, y, z] \in \mathbf{R}^3, z \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině  $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; z = 0\}$  a minima na množině  $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$ . Položme  $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$  a vyšetřujme extrémy  $g$  na množině  $H = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí  $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Platí  $g, h \in C^1(\mathbf{R}^2)$ . Pro parciální derivace funkce  $h$  platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Pro každé  $[x, y] \in H$  máme  $(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$ . Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (1)$$

$$2x + y = \lambda 2x, \quad (2)$$

$$x + 2y = \lambda 2y. \quad (3)$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme  $(3 - 2\lambda)(x + y) = 0$ . To znamená, že buď  $x = -y$  nebo  $\lambda = 3/2$ . V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body  $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ ,  $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ . Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme  $x = y$  a (1) dává podezřelé body  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ ,  $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ . Funkce  $g$  nabývá minima na množině  $H$  v bodech

$$[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}], [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}], [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}].$$

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce  $f$  nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1],$$

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0], [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

**22.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny  $M$ . Spočteme parciální derivace  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech  $[-1/2, 0]$ ,  $[0, 0]$ . Pouze první bod však patří do vnitřku množiny  $M$ .

Hranici množiny  $M$  si rozdělíme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x = 0, y \in [-2, 2]\},$$

$$H_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 4, x < 0\}.$$

Na množině  $H_1$  má funkce  $f$  podezřelé body:  $[0, 2]$ ,  $[0, -2]$ ,  $[0, 0]$ , protože  $f(0, y) = -y^2$ . Podezřelé body na  $H_2$  budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ . Funkce  $f$  i  $g$  jsou třídy  $C^1(\mathbf{R}^2)$ . Na množině  $H_2$  je vždy  $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0, 0)$ . Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (1)$$

$$2x + 4x^2 = \lambda 2x, \quad (2)$$

$$-2y = \lambda 2y. \quad (3)$$

Z (3) dostaneme, že  $\lambda = -1$  nebo  $y = 0$ . První možnost spolu s (2) dává, že  $x = 0$  nebo  $x = -1$ . Pomocí (1) dopočteme pro tuto  $x$  příslušná  $y$  a dostaneme body  $[0, 2]$ ,  $[0, -2]$ ,  $[-1, \sqrt{3}]$ ,  $[-1, -\sqrt{3}]$ . První dva ovšem neleží v  $H_2$ . Pokud  $y = 0$ , pak z (1) dostáváme bod  $[-2, 0]$  a bod  $[2, 0]$ , který ovšem neleží v  $H_2$ .

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že  $f$  nabývá maxima v bodě  $[-1/2, 0]$  a minima v bodě  $[-2, 0]$ .

**23.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina  $M$  je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce  $g_1, g_2$  jsou třídy  $C^1(\mathbf{R}^2)$  stejně jako funkce  $f$ . Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x + z, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= y, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= 1.\end{aligned}$$

Vektory  $(2x, 2y, 2z)$ ,  $(1, 1, 1)$  jsou lineárně závislé, právě když  $x = y = z$ . Žádný takový bod ovšem neleží v množině  $M$ . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \quad (1)$$

$$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \quad (2)$$

$$y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (4)$$

$$x + y + z = 1. \quad (5)$$

Z (1) a (3) vyplývá  $\lambda_1 x = \lambda_1 z$ . To znamená, že máme dvě možnosti: buď  $\lambda_1 = 0$  nebo  $x = z$ . V prvním případě dostaneme nejprve z (1)  $y = \lambda_2$ . Odtud a z (2) obdržíme  $x + z = y$ . Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[ (1 - \sqrt{5})/4, 1/2, (1 + \sqrt{5})/4 \right], \quad \left[ (1 + \sqrt{5})/4, 1/2, (1 - \sqrt{5})/4 \right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \quad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce  $f$  nabývá na množině  $M$  minima v bodě  $[2/3, -1/3, 2/3]$  a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

**24.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny  $M$ . Pro parciální derivace funkce  $f$  platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).\end{aligned}$$

Uvnitř množiny  $M$  hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z  $M$ , které splňují

$$2x(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = 0, \quad (8)$$

$$2y(7 - (x^2 + 7y^2)) = 0. \quad (9)$$

Řešením této soustavy jsou body  $[0, 0]$ ,  $[1/\sqrt{2}, 0]$ ,  $[-1/\sqrt{2}, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[0, -1]$ , pouze první tři však leží uvnitř množiny  $M$ .

Podezřelé body na hranici  $M$  hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina  $H(M)$  je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce  $f$  i  $g$  jsou třídy  $C^1(\mathbf{R}^2)$ . Pro parciální derivace  $g$  platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 8y.$$

Vektor  $(2x, 8y)$  je nulový, právě když  $[x, y] = [0, 0]$ . Tento bod ovšem neleží na hranici množiny  $M$ . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x, \quad (1)$$

$$14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y, \quad (2)$$

$$x^2 + 4y^2 = 1. \quad (3)$$

Z (1) vyplývá, že  $x = 0$  nebo  $e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = \lambda$  a z (2) vyplývá, že  $y = 0$  nebo  $e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)) = 4\lambda$ . Pokud  $x = 0$ , pak podle (3) je  $y = \pm 1/2$ . Pokud  $y = 0$ , pak podle (3) je  $x = \pm 1$ . V případě, že  $x \neq 0$  a  $y \neq 0$ , musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)).$$

Odtud plyne  $7(x^2 + 7y^2) = -3$ , což je spor. Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0, 0], [1/\sqrt{2}, 0], [-1/\sqrt{2}, 0], [0, 1/2], [0, -1/2], [1, 0], [-1, 0].$$

Funkce  $f$  nabývá maxima v bodech  $[0, 1/2]$ ,  $[0, -1/2]$  a minima v bodě  $[0, 0]$ .

**25.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Množina  $M$  má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledíme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina  $M$  je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce  $f$ ,  $g_1$  i  $g_2$  jsou třídy  $C^1(\mathbf{R}^3)$ . Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{xy}y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{xy}x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= -2z. \end{aligned}$$

Vektory  $(2x, 2y, 2z)$ ,  $(2x, 2y, -2z)$  jsou lineárně závislé, právě když  $z = 0$  nebo  $x = y = 0$ . Žádný takový bod neleží v množině  $M$ . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \quad (1)$$

$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \quad (2)$$

$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad (5)$$

Z (4) a (5) vyplývá, že  $z = \pm 1/\sqrt{2}$ . Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x - y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď  $x = y$  nebo  $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$ . V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$\begin{aligned} &[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \\ &[-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Ve druhém případě dosadíme za  $e^{xy}$  do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď  $x = -y$  nebo  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ . První možnost dává podezřelé body

$$\begin{aligned} &[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], \\ &[-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává  $x = y = 0$ . Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).



Funkce  $f$  nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

**26.** Položme

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina  $M$  uzavřená. Množina  $M$  je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin  $\mathbf{R}^n$  vyplývá, že  $M$  je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá a proto nabývá na  $M$  svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že  $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbf{R}^3)$ .

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = 2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) = -2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = 2x + 1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y) = 2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y) = -2z \end{array}$$

Zkoumejme pro která  $[x, y, z] \in M$  jsou vektory  $(2x, 2y, 2z)$ ,  $(1, -2y, -2z)$  lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnota následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnota této matice je menší než 2, právě když  $x = -\frac{1}{2}$  nebo  $y = z = 0$ . Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v  $M$ . Nyní řešíme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (1)$$

$$x = y^2 + z^2 \quad (2)$$

$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \quad (3)$$

$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \quad (4)$$

$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \quad (5)$$

Z (1) a (2) vyplývá  $x^2 + x - 1 = 0$ , tj.  $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ . Vzhledem k (2) musí být  $x$  nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \quad (6)$$

Z (4) vyplývá, že buď  $y = 0$  nebo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$ . V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že  $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$ . Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[ (\sqrt{5} - 1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} \right], \quad \left[ (\sqrt{5} - 1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2} \right].$$

Ve druhém případě plyne z (5)  $x + \frac{1}{2} = z$ . Takže  $z = \sqrt{5}/2$ . Z (2) plyne  $y^2 = x - z^2$ . Po dosazení máme  $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$  - což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce  $f$  nabývá na  $M$  svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

**27.** Množina  $M$  je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na celém  $\mathbf{R}^2$  a proto musí nabývat maxima i minima na množině  $M$ . Zkoumejme chování funkce  $f$  nejprve na vnitřku množiny  $M$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny  $M$  jsou obě parciální derivace funkce  $f$  nenulové, proto uvnitř  $M$  není žádný podezřelý bod. Hranici množiny  $M$  rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x, 0]; x \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$H_2 = \{[0, y]; y \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$H_3 = \{[x, y]; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Je-li  $[x, y] \in H_1$ , platí  $f(x, y) = \arctg x$ . Funkce  $\arctg$  je rostoucí a proto podezřelými body jsou  $[0, 0]$  a  $[1, 0]$ . Podobně je tomu na množině  $H_2$ . Tam dostáváme podezřelé body  $[0, 0]$  a  $[0, 1]$ . Na  $H_3$  použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Necht'  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Vidíme, že  $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2)$ . Pro parciální derivace  $g$  platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vektor  $(2x, 2y)$  je nulový, právě když  $[x, y] = [0, 0]$  – tento bod ovšem neleží v  $H_3$ . Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \tag{2}$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$\lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2). \tag{4}$$

Z (2) vyplývá, že  $\lambda \neq 0$ . Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Platí tedy buď  $x = y$  nebo  $-1 = x^2 + xy + y^2$ . Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z  $H_3$  mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ .

Nalezli jsme tyto podezřelé body:  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 0]$ ,  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ . Porovnáním funkčních hodnot funkce  $f$  v uvedených bodech (proved' te podrobně) zjistíme, že  $f$  nabývá svého minima v bodě  $[0, 0]$  a maxima v bodě  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ .

**28.**  $[1, 1]$  – lokální minimum,  $[-1, -1]$  – lokální minimum,  $[0, 0]$  – není extrém      **29.**  $[5, 2]$  – lokální minimum      **30.**  $[0, 0]$  – lokální minimum,  $[x, y]$  splňující  $x^2 + y^2 = 1$  – lokální maximum (ne však ostré)      **31.**  $[2l\pi, 0]$  – lokální maximum,  $[(2l+1)\pi, -2]$  – není lokální extrém,  $l \in \mathbf{Z}$       **32.**  $[0, 0, 0]$  – není lokální extrém,  $[2, 2, 2]$  – lokální minimum      **33.**  $[0, 0]$  – není lokální extrém,  $[24, -144]$  – lokální minimum      **34.**  $[0, 0]$  – není lokální extrém,  $[1, 1]$  – lokální minimum      **35.**  $[0, 0]$  – lokální minimum,  $[-1/4, -1/2]$  – není lokální extrém      **36.**  $[7\pi/12 + l\pi + k\pi/2, 7\pi/12 + l\pi - k\pi/2]$  – lokální maximum ( $k$  sudé), není lokální extrém ( $k$  liché),  $[11\pi/12 + l\pi + k\pi/2, 11\pi/12 + l\pi - k\pi/2]$  – není lokální extrém ( $k$  sudé), lokální minimum ( $k$  liché),  $k \in \mathbf{Z}, l \in \mathbf{Z}$       **37.**  $[1, 2]$  – lokální minimum