

## 1. TAYLORŮV POLYNOM

Nalezněte Taylorův polynom  $k$ -tého řádu v bodě 0 pro funkce:

1.  $\operatorname{tg} x, k = 4$
2.  $\cos(\sin x), k = 5$
3.  $\sin(\sin x), k = 6$
4.  $\sin(1 - \cos x), k = 3$

Nalezněte Taylorův polynom třetího řádu pro danou funkci v daném bodě.

5.  $x \log x, \quad 1$
6.  $\sin x, \quad \frac{\pi}{2}$

Spočtěte limity pomocí Taylorových polynomů:

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0)$
12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$
13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right)$
14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \left( \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right)$
15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right)$

Pro každou z následujících limit najděte  $n \in \mathbb{N}$  takové, aby limita byla konečná a nenulová.

16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\operatorname{tg} x)}{x^n}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1}{x^n}$
20. Najděte  $a, b \in \mathbb{R}$ , aby  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a+b \cos x) \sin x}{x^4} = 0$ .
21. Najděte  $a, b \in \mathbb{R}$ , aby  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a \sin x - b \operatorname{tg} x}{x^4} = 0$  a spočtěte  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a \sin x - b \operatorname{tg} x}{x^5}$ .

Vyšetřete konvergenci následujících řad.

22.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2n-1}{2n} \right)$

Nalezněte racionální čísla aproximující uvedená čísla s chybou menší, než je předepsáno.

24.  $\sqrt{e}, \quad 10^{-2}$
25.  $\sqrt{5}, \quad 10^{-3}$

## VÝSLEDKY A NÁVODY

1.  $x + \frac{1}{3}x^3$
2.  $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
3.  $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$
4.  $\frac{1}{2}x^2$
5.  $x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$
6.  $1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)^2$
7.  $-\frac{1}{12}$
8.  $\frac{1}{3}$
9. 0
10.  $\frac{1}{3}$
11.  $\log^2 a$
12.  $\frac{1}{2}$
13.  $\frac{1}{3}$
14.  $-\frac{1}{4}$
15.  $\frac{1}{6}$
16.  $n = 7$ , limita je rovna  $\frac{1}{30}$
17.  $n = 2$ , limita je rovna 1
18.  $n = 4$ , limita je rovna  $\frac{1}{3}$
19.  $n = 1$ , limita je rovna  $\frac{e}{2}$
20.  $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$
21.  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ , limita je rovna  $-\frac{1}{20}$
22. Řada konverguje.
23. Řada konverguje.