Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2

LS 2014-15, verze B

---

1. Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos(ax) + \operatorname{arctg}(bx) + x^3}{x^5}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočtěte.

(15 bodů)

2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 7)^2} \, \mathrm{d}x.$$

(15 bodů)

3. Vyšetřete konvergenci následujícího integrálu.

$$\int_1^{\infty} \sqrt[4]{e^{1/x^2} - e^{-1/x^2}} \cdot \frac{\sin(2x + 1)}{x + 1} \cdot \log(x + 1) \, \mathrm{d}x$$

(15 bodů)

4. Nechť $F = (F_1, F_2) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y, z) = \big(x^2 y + x z^2, \operatorname{sgn}(xy) \cdot \cos(x^2 y + xyz)\big).$$

(a) Ukažte, že v bodě $(1, -1, 0)$ existuje derivace funkce F a spočtěte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte $\frac{\partial F_2}{\partial x}(0, 0, 0)$, pokud existuje.

(15 bodů)