5.5 Elementární funkce

Lemma 5.20. *Nechť $x \in \mathbf{R}$. Potom existuje kladné $C \in \mathbf{R}$ (závisející na x) takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $h \in (-1, 1)$ platí*

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 C^n.$$

Definice. Exponenciální funkci $\exp$ definujme pro $x \in \mathbf{R}$ předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Věta 5.21 (základní vlastnosti exponenciály)**.** *Funkce $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je dobře definována a splňuje*

(E1) $\forall x, y \in \mathbf{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,

(E2) $\exp'(0) = 1$.

Vlastnosti exponenciální funkce

(E3) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

(E4) Platí $\exp(0) = 1$.

(E5) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(E6) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

(E7) Funkce $\exp$ je spojitá na $\mathbf{R}$.

(E8) Funkce $\exp$ je rostoucí na $\mathbf{R}$.

(E9) Platí $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

(E10) Platí $\mathcal{R}(\exp) = (0, \infty)$.

Věta 5.22. *Existuje právě jedna funkce definovaná na $\mathbf{R}$ splňující podmínky (E1) a (E2).*

Definice. (a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbf{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci $\exp$. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Nechť $a \in \mathbf{R}, a > 0$, a $b \in \mathbf{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.

(c) Je-li $n \in \mathbf{N}$ liché, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbf{R}$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbf{R}$. Je-li $n \in \mathbf{N}$ sudé, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0, \infty)$, definujeme jako inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0, \infty)$.

Vlastnosti přirozeného logaritmu

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

(L2) Platí $\mathcal{R}(\log) = \mathbf{R}$.

(L3) Funkce $\log$ je rostoucí na $(0, \infty)$.

(L4) Funkce $\log$ je spojitá na $(0, \infty)$.

(L5) Pro každé $x, y \in (0, \infty)$ platí $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbf{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

(L7) Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $(\log)'(x) = \frac{1}{x}$.

(L8) Platí $\lim_{x \to 0_+} \log x = -\infty$ a $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$.

Definice. Funkci **sinus**, značíme $\sin$, a **kosinus**, značíme $\cos$, definujeme předpisy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbf{R},$$
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Věta 5.23 (základní vlastnosti sinu a kosinu)**.** *Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují*

(G1) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) *pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

(G3) $\sin$ *je lichá funkce a* $\cos$ *je sudá funkce,*

(G4) *existuje kladné číslo* π *takové, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ *a* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\sin'(0) = 1$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

(G7) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(G8) Platí $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

(G9) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

(G10) Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou 2π-periodické.

(G11) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

(G12) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

(G13) Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité na $\mathbf{R}$.

(G14) Platí $\sin(x) = 0$, právě když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

(G15) Platí $\cos(x) = 0$, právě když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

Věta 5.24. *Trojice* $(\sin, \cos, \pi)$ *je vlastnostmi (G1)–(G5) určena jednoznačně.*

Definice. Funkce **tangens**, značíme ji tg, a **kotangens**, značíme ji cotg, definujeme předpisy

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\},$$
$$\mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Funkce $\sin$, $\cos$, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Vlastnosti funkce tangens

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G17) Funkce tg je lichá.

(G18) Funkce tg je π-periodická.

(G19) Platí $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg})$.

(G20) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(G21) Platí $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(G22) Platí $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \mathrm{tg}(x) = \infty$ a $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}_+} \mathrm{tg}(x) = -\infty$.

(G23) Platí $\mathcal{R}(\mathrm{tg}) = \mathbf{R}$.

Vlastnosti funkce kotangens

(G24) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G25) Funkce cotg je lichá.

(G26) Funkce cotg je periodická s periodou π.

(G27) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G28) Platí $\lim_{x\to 0_+} \mathrm{cotg}(x) = \infty$.

(G29) Platí $\lim_{x\to \pi_-} \mathrm{cotg}(x) = -\infty$.

(G30) Platí $\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(G31) Platí $\mathcal{R}(\mathrm{cotg}) = \mathbf{R}$.

Definice. Cyklometrické funkce arkussinus ($\arcsin$), **arkuskosinus** ($\arccos$), **arkustangens** (arctg) a **arkuskotangens** ($\mathrm{arccotg}$) definujeme následujícím způsobem

$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}, \qquad \arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1},$$
$$\mathrm{arctg} = \left(\mathrm{tg}\,|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}, \qquad \mathrm{arccotg} = \left(\mathrm{cotg}\,|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$

Vlastnosti cyklometrických funkcí

(C1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(C2) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a $\mathcal{R}(\arccos) = [0, \pi]$.

(C3) Funkce $\arcsin$ je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(C4) Funkce $\arccos$ je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

(C5) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí $\sin$ a $\cos$.

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}, \qquad \arccos(-1) = \pi, \qquad \arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(1) = 0, \qquad \arcsin(0) = 0, \qquad \arccos(0) = \frac{\pi}{2},$$
$$\arcsin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}, \qquad \arccos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{\pi}{4}.$$

(C6) Platí $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

(C7) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\displaystyle\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C8) Platí $\arcsin'_+(-1) = \infty$ a $\arcsin'_-(1) = \infty$.

(C9) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(C10) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

(C11) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(C12) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na $\mathbf{R}$.

(C13) Platí $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

(C14) Platí $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

(C15) Platí $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

(C16) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(C17) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbf{R}$ a $\mathcal{R}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

(C18) Funkce $\operatorname{arccotg}$ je spojitá a klesající funkce na $\mathbf{R}$.

(C19) Platí $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$.

(C20) Platí $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$.

(C21) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

(C22) Pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí $\operatorname{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.

6 Taylorův polynom

6.1 Základní vlastnosti

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu** n **funkce** f **v bodě** a.

Lemma 6.1. *Nechť Q je polynom,* st $Q \leq n$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*. Pak Q je nulový polynom.*

Věta 6.2 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

Věta 6.3. *Nechť $a, x \in \mathbf{R}$, $a < x$. Předpokládejme, že*

- *f je funkce, která má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní $(n+1)$-ní derivaci,*
- *φ je spojitá funkce na $[a, x]$, která má v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci.*

Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Věta 6.4 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Věta 6.5 (Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť a, x, f jsou jako ve Větě 6.3. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

6.2 Symbol malé o

Definice. Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^\star$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta 6.6. *Nechť $a \in \mathbf{R}^\star$.*

(i) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a,\ \ a\ \ f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a,$$

potom

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a.$$

(ii) *Jestliže*

$$f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a,\ \ a\ \ f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a,$$

potom

$$f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)),\ x \to a.$$

(iii) *Jestliže*

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a, \quad a \quad \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbf{R},$$

potom

$$f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

Věta 6.7. *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}^\star$*,* $f(y) = o(g(y))$*,* $y \to b$*,* $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ *a existuje* $\delta \in \mathbf{R}$*,* $\delta > 0$*, takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))$*,* $x \to a$*.*

6.3 Taylorovy řady elementárních funkcí

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$. Potom řadu

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x-a)^j$$

nazýváme **Taylorovou řadou o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

$$\forall x \in \mathbf{R}:\ \exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\forall x \in (-1, 1]:\ \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

$$\forall x \in \mathbf{R}:\ \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}:\ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\forall x \in (-1, 1):\ (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

7 Mocninné řady

Definice. **Mocninnou řadou o středu** $x_0 \in \mathbf{R}$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, kde $x \in \mathbf{R}$ a $a_k \in \mathbf{R}$ pro každé $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Věta 7.1. *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ je mocninná řada. Pak existuje nezáporný prvek $\rho \in \mathbf{R}^*$ takový, že*

- *pro každé $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| < \rho$, uvedená řada konverguje absolutně,*
- *pro každé $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| > \rho$, uvedená řada diverguje.*

Prvek ρ splňuje

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

kde výrazem $1/0$ zde rozumíme ∞ a výrazem $1/\infty$ zde rozumíme 0. Prvek ρ nazýváme ***poloměrem konvergence*** *uvedené řady.*

Věta 7.2 (o derivaci mocninné řady)**.** *Nechť ϱ je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, definujme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Potom funkce f má vlastní derivaci v každém bodě $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Věta 7.3. *Nechť mají symboly f a ϱ stejný význam jako ve Větě 7.2. Pak má funkce f v každém bodě $x \in \mathbf{R}$, $|x-x_0| < \varrho$, derivace všech řádů a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Speciálně platí $f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$, $k \in \mathbf{N}$.

Lemma 7.4. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Nechť $x \in (-1,1)$. Potom řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ absolutně konvergují a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Věta 7.5 (Abel)**.** *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a nechť ϱ je její poloměr konvergence. Předpokládejme, že platí $\varrho \in (0,\infty)$. Nechť dále $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ konverguje. Potom*

$$\lim_{x\to\varrho-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n.$$

8 Primitivní funkce

8.1 Základní vlastnosti

Definice. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k** f **na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 8.1. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbf{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

Věta 8.2. *Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 8.3. *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.*

Věta 8.4 (o substituci)**.** (i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

(ii) Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

Lemma 8.5 (Darbouxova vlastnost derivace)**.** *Nechť f má na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom má f na I **Darbouxovu vlastnost**, tj. $f(J)$ je interval, kdykoliv $J \subset I$ je interval.*

Věta 8.6 (integrace per partes)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx \text{ na } I.$$

8.2 Integrace racionálních funkcí

Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 8.7 (o rozkladu na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1, \dots x_k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_l,\ \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k,\ q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů $x - x_1,\ x - x_2, \dots, x - x_k,\ x^2 + \alpha_1 x + \beta_1,\ \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,*

(vi) *mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1,\ \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1,\ C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l,\ C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x - x_k} +$$
$$+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \dots + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l}.$$

8.3 Některé užitečné substituce

Typ $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$

- vždy lze užít substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = x$
- je-li $R(a, -b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\sin t = x$
- je-li $R(-a, b) = -R(a, b)$, lze užít substituci $\cos t = x$
- je-li $R(-a, -b) = R(a, b)$, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$

Typ $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+f})^{1/q})\, dt$
$q \in \mathbf{N}$, $q > 1$, $a, b, c, f \in \mathbf{R}$, $af \neq bc$

- substituce $(\frac{at+b}{ct+f})^{1/q} = x$

Typ $\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})\,dt$, $a \neq 0$

- at^2+bt+c má dvojnásobný kořen $\alpha \in \mathbf{R}$:
  $\sqrt{at^2+bt+c} = \sqrt{a}|t-\alpha|$, pro $a > 0$
- at^2+bt+c má dva reálné kořeny $\alpha_1 < \alpha_2$: $\sqrt{at^2+bt+c} = |t-\alpha_1|\sqrt{a\frac{t-\alpha_2}{t-\alpha_1}}$
- at^2+bt+c nemá reálné kořeny: pak $a > 0$, $c > 0$, a lze užít některou z **Eulerových substitucí**
  $\sqrt{at^2+bt+c} = \pm\sqrt{a}t + x$ nebo $\sqrt{at^2+bt+c} = tx + \sqrt{c}$

Konec 9. přednášky, 16. 3. 2015

9 Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a,b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \dots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\ j = 1, \dots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a,b]$ je **zjemněním dělení** D intervalu $[a,b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Označme

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$
$$\underline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(f,D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a,b]\}.$$

Definice.

- Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a,b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbf{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a,b])$.

Lemma 9.1. *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$.*

(i) *Nechť D, D' jsou dělení $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f,D) \le \underline{S}(f,D') \le \overline{S}(f,D') \le \overline{S}(f,D)$$

(ii) *Nechť $D_1,\ D_2$ jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak platí*

$$\underline{S}(f,D_1) \le \overline{S}(f,D_2).$$

(iii) *Platí* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$

Důsledek 9.2. *Nechť f je omezená na $[a,b]$, D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Potom*

$$m(b-a) \le \underline{S}(f,D_1) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{S}(f,D_2) \le M(b-a),$$

kde $m = \inf\{f(x);\ x \in [a,b]\}$ a $M = \sup\{f(x);\ x \in [a,b]\}$.

Věta 9.3. *Nechť f je omezená na $[a,b]$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ge \underline{S}(f,D) \ge \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon,$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{S}(f,D) \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Konec 10. přednášky, 17. 3. 2015

Důsledek 9.4. *Nechť f je omezená na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Potom*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f,D_n), \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,D_n).$$

Věta 9.5 (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a,b])$, právě když*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists D,\ D \text{ je dělení intervalu } [a,b] :\ \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Definice. Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá** na intervalu I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in I\, \forall y \in I \colon (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Věta 9.6. *Nechť funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$. Pak f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.*

Věta 9.7. *Nechť funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$. Pak f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$.*

Konec 11. přednášky, 23. 3. 2015

Věta 9.8. *Nechť funkce f je monotónní na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$, $a<b$. Pak f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$.*

Věta 9.9 (vlastnosti Riemannova integrálu)**.**

(a) *Nechť $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ a $\alpha\in\mathbf{R}$. Potom $f+g\in\mathcal{R}([a,b])$, $\alpha f\in\mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g,\qquad \int_a^b \alpha f=\alpha\int_a^b f.$$

(b) *Nechť $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ a $f\le g$. Pak $\int_a^b f\le\int_a^b g$.*

(c) *Nechť $a<b<c$ jsou reálná čísla. Pak platí*

- $f\in\mathcal{R}([a,c])\Leftrightarrow(f\in\mathcal{R}([a,b])\ \wedge\ f\in\mathcal{R}([b,c]))$,
- *je-li* $f\in\mathcal{R}([a,c])$, *pak* $\displaystyle\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f.$

(d) *Nechť $f\in\mathcal{R}([a,b])$. Pak $|f|\in\mathcal{R}([a,b])$ a $|\int_a^b f|\le\int_a^b|f|$.*

Konec 12. přednášky, 24. 3. 2015

Věta 9.10. *Nechť J je nedegenerovaný interval a f je funkce definovaná na J splňující $f\in\mathcal{R}([\alpha,\beta])$ pro každé $\alpha,\beta\in J$. Nechť c je libovolný pevně zvolený bod z J. Definujme na J funkci*

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt.$$

Potom platí

(i) *F je spojitá na J,*

(ii) *je-li x_0 bod spojitosti funkce f, pak $F'(x_0)=f(x_0)$.*

Důsledek 9.11.

(i) *Jestliže je f spojitá na intervalu (a,b), pak má na (a,b) primitivní funkci.*

(ii) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$, $a,b\in\mathbf{R}$ a F je funkce primitivní k f na (a,b). Potom existují vlastní limity $\lim_{x\to a+}F(x)$, $\lim_{x\to b-}F(x)$ a platí*

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{x\to b-}F(x)-\lim_{x\to a+}F(x).$$

Věta 9.12. *Nechť $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$, a f je funkce definovaná na $[a,b]$. Pak následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}([a,b])$,

(ii) *existuje* $I \in \mathbf{R}$ *takové, že pro každé* $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *splňující:*

je-li $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ *dělení intervalu* $[a,b]$, $\nu(D) < \delta$, *a* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, *pak*

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Konec 13. přednášky, 30. 3. 2015

10 Newtonův integrál

Definice. Řekneme, že **Newtonův integrál** funkce f na intervalu (a,b), $a<b$, $a,b\in\mathbf{R}^\star$, existuje, jestliže f má na (a,b) primitivní funkci (označme ji F), limity $\lim_{x\to a+}F(x)$, $\lim_{x\to b-}F(x)$ existují a jejich rozdíl je definován.

Hodnotou Newtonova integrálu funkce f přes interval (a,b) pak rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-}F(x) - \lim_{x\to a+}F(x).$$

Pokud $(N)\int_a^b f(t)\,dt$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je **konvergentní**. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Definice. Množinu všech funkcí f, které mají konvergentní Newtonův integrál od a do b, značíme $\mathcal{N}(a,b)$.

Věta 10.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)**.**

(a) *Nechť $f,g\in\mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha\in\mathbf{R}$. Potom $f+g\in\mathcal{N}(a,b)$, $\alpha f\in\mathcal{N}(a,b)$ a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha\int_a^b f.$$

(b) *Nechť $f,g\in\mathcal{N}(a,b)$ a $f\le g$. Pak $\int_a^b f\le\int_a^b g$.*

(c) *Nechť $-\infty\le a<b<c\le+\infty$ a $f\in\mathcal{N}(a,c)$. Potom $f\in\mathcal{N}(a,b)$, $f\in\mathcal{N}(b,c)$ a platí $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$.*

(d) *Nechť $-\infty\le a<b<c\le+\infty$, $f\in\mathcal{N}(a,b)$, $f\in\mathcal{N}(b,c)$ a f je spojitá v b. Potom $f\in\mathcal{N}(a,c)$.*

Věta 10.2. *Nechť funkce F je primitivní k f na (a,b), G je primitivní ke g na (a,b). Potom*

$$\int_a^b gF = [GF]_a^b - \int_a^b Gf,$$

pokud je pravá strana definována.

Věta 10.3 (substituce pro určitý integrál)**.** *Nechť $\omega:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ splňuje $\omega((\alpha,\beta))=(a,b)$ a ω má vlastní nenulovou derivaci na (α,β). Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\omega)(t)|\omega'(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jeden z integrálů existuje.

Konec 14. přednášky, 31. 3. 2015

Věta 10.4 (Bolzanova-Cauchyova podmínka)**.** *Nechť* $a \in \mathbf{R}^\star$ *a* F *je definována na jistém prstencovém okolí bodu* a*. Potom* $\lim_{x\to a} F(x)$ *existuje vlastní, právě když je splněna* ***Bolzanova-Cauchyova podmínka****:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \quad \forall x, y \in P(a,\delta)\colon |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Věta 10.5. *Nechť* f *je omezená a spojitá na omezeném intervalu* (a,b)*. Potom* $f \in \mathcal{N}(a,b)$*.*

Věta 10.6 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $-\infty < a < b \leq +\infty$*. Jestliže pro funkce* f *a* g *platí* $0 \leq f \leq g$ *na* $[a,b)$*,* f *je spojitá na* $[a,b)$ *a* $g \in \mathcal{N}(a,b)$*. Potom* $f \in \mathcal{N}(a,b)$*.*

Konec 15. přednášky, 7. 4. 2015

Věta 10.7 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $-\infty < a < b \leq +\infty$*. Jestliže pro nezáporné spojité funkce* f *a* g *na* $[a,b)$ *platí* $\lim_{x\to b-} f(x)/g(x) = c \in (0,\infty)$*, potom* $f \in \mathcal{N}(a,b)$*, právě když* $g \in \mathcal{N}(a,b)$*.*

Věta 10.8. *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*,* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *je spojitá,* $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *je nerostoucí, nezáporná a spojitá na* $[a,b]$*. Potom*

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f \leq \int_a^b fg \leq g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f.$$

Věta 10.9 (Abelovo-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $-\infty < a < b \leq +\infty$*,* $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ *je spojitá. Její primitivní funkci na* (a,b) *označme* F*. Dále nechť* $g : [a,b) \to \mathbf{R}$ *je monotónní a spojitá na* $[a,b)$*. Potom platí*

(A) *Jestliže* $f \in \mathcal{N}(a,b)$ *a* g *je omezená, potom* $fg \in \mathcal{N}(a,b)$*.*

(D) *Jestliže je* F *omezená na* (a,b) *a* $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$*, potom* $fg \in \mathcal{N}(a,b)$*.*

Konec 16. přednášky, 13. 4. 2015

Věta 10.10 (první věta o střední hodnotě)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*,* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *je spojitá,* $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *je nezáporná,* $g \in \mathcal{N}(a,b)$ *a* $fg \in \mathcal{N}(a,b)$*. Potom existuje* $\xi \in [a,b]$ *takové, že*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

Věta 10.11 (druhá věta o střední hodnotě)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$*,* $a < b$*,* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *je spojitá,* $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ *je monotónní a spojitá na* $[a,b]$*. Potom existuje* $\xi \in [a,b]$ *takové, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

Aplikace určitého integrálu

Definice. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. φ_i' je spojité na $[a, b]$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle\varphi\rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbf{R}^n$.

Definice. Nechť $\varphi\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ intervalu $[a, b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^{k} \text{vzdálenost}\,(\varphi(x_{j-1}), \varphi(x_j)).$$

Lemma 10.12. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je spojitá (tj. f_i je spojitá, $i = 1, \dots, n$). Potom platí*

$$\left\|\int_a^b f\right\| := \left\|\left[\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n\right]\right\| \le \int_a^b \|f\|.$$

Konec 17. přednášky, 14. 4. 2015

Věta 10.13 (délka křivky). *Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je křivka. Potom platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1')^2 + \cdots + (\varphi_n')^2} \quad \left(= \int_a^b \|\varphi'\|\right).$$

Věta 10.14 (objem a povrch rotačního tělesa). *Nechť f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Označme*

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\}.$$

Pak

$$\text{Objem}\,(T) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\text{Povrch pláště}\,(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Věta 10.15 (integrální kritérium). *Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na $[n_0, +\infty)$, kde $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ platí $a_n = f(n)$ pro $n \ge n_0$. Pak*

$$\int_{n_0}^\infty f(x)\, dx \text{ konverguje, právě když } \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ konverguje.}$$

Věta 10.16 (zbytek Taylorova polynomu v integrálním tvaru)**.** *Nechť* $a, x \in \mathbf{R}$*,* $a < x$*, a funkce* f *má v každém bodě intervalu* $[a, x]$ *vlastní* $(n+1)$*-ní derivaci. Potom*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

Konec 18. přednášky, 20. 4. 2015

11 Metrické prostory I

11.1 Základní vlastnosti

Definice. **Metrickým prostorem** budeme rozumět dvojici (P, ρ), kde P je množina, $\rho : P \times P \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(i) $\forall x, y \in P\colon \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in P\colon \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(iii) $\forall x, y, z \in P\colon \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme **metrika na** P.

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $x \in P,\ r > 0$. Množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

$$B(x, r) = \{y \in P; \rho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r nebo také **okolím bodu** x.

(ii) Nechť $x \in P,\ r > 0$. Množinu $\overline{B}(x, r)$ definovanou předpisem

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in P; \rho(x, y) \leq r\}$$

nazýváme **uzavřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P,\ x \in P$. Řekneme, že $x \in P$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

(ii) Množina $M \subset P$ se nazývá **otevřená v** (P, ρ), jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

(iii) **Vnitřkem množiny** M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. Vnitřek množiny M budeme značit $\operatorname{int} M$.

Věta 11.1 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor.*

(i) *Prázdná množina a celý prostor P jsou otevřené v (P, ρ).*

(ii) *Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $G_\alpha \subset P,\ \alpha \in A$, jsou otevřené v (P, ρ). Pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená množina v (P, ρ).*

(iii) *Nechť $m \in \mathbf{N}$. Nechť množiny $G_i,\ i = 1, \dots, m$, jsou otevřené v (P, ρ). Pak $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je otevřená množina v (P, ρ).*

Konec 19. přednášky, 21. 4. 2015

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor.

(i) Nechť $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$.

(ii) **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$.

(iii) **Uzávěrem množiny** M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Uzávěr množiny M značíme $\overline{M}$.

(iv) Řekneme, že množina M je **uzavřená v** (P, ρ), jestliže obsahuje všechny své hraniční body (tj. $H(M) \subset M$, neboli $\overline{M} = M$).

Věta 11.2 (vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor.*

(i) *Nechť $F \subset P$. Potom F je uzavřená v (P, ρ), právě když $P \setminus F$ je otevřená v (P, ρ).*

(ii) *Prázdná množina a celý prostor P jsou uzavřené v (P, ρ).*

(iii) *Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $F_\alpha \subset P$, $\alpha \in A$, jsou uzavřené v (P, ρ). Pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená množina v (P, ρ).*

(iv) *Nechť $m \in \mathbf{N}$. Nechť množiny F_i, $i = 1, \dots, m$, jsou uzavřené v (P, ρ). Pak $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina v (P, ρ).*

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $A \neq \emptyset$, a $x \in P$. **Vzdáleností bodu** x **od množiny** A rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y);\ y \in A\}.$$

Diametrem neprázdné množiny $B \subset P$ rozumíme

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{\rho(x, y);\ x, y \in B\}$$

a klademe $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$. Pokud $\operatorname{diam} B < \infty$, pak říkáme, že B je **omezená** množina v (P, ρ).

Věta 11.3 (vlastnosti uzávěru)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $A \subset P$, $B \subset P$. Pak platí:*

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{P} = P$,

(ii) *pokud $A \subset B$, pak $\overline{A} \subset \overline{B}$,*

(iii) *$\overline{A}$ je uzavřená, tj. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,*

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(v) $\overline{A} = \{x \in P;\ \rho(x, A) = 0\}$, *pokud $A \neq \emptyset$,*

(vi) $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$, *a tedy A je omezená, právě když $\overline{A}$ je omezená.*

Konec 20. přednášky, 27. 4. 2015

11.2 Konvergence v metrických prostorech

Definice. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků P. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje** k $y \in P$ v (P, ρ), jestliže platí $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v (P, ρ). **Konvergentní posloupností v** (P, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků P, která má limitu v (P, ρ).

Věta 11.4 (vlastnosti konvergence)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor. Pak platí:*

(i) *Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z P a existují $n_0 \in \mathbf{N}$, $y \in P$ takové, že $x_n = y$ pro každé $n \geq n_0$. Pak $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$.*

(ii) *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

(iii) *Nechť $A \subset P$. Množina A je uzavřená, právě když limita každé konvergentní posloupnosti prvků z A leží v A.*

(iv) *Nechť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost vybraná z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků P, tj., $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Jestliže $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$, pak také $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = y$.*

Konec 21. přednášky, 28. 4. 2015

11.3 Spojitá zobrazení

Definice. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z P do Q, $a \in P$ a $M \subset P$. Řekneme, že

- f je **spojité v bodě** a **vzhledem k množině** M, jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall x \in M\colon\ \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

- f je **spojité v bodě** a, jestliže je spojité v a vzhledem k P,
- f je **spojité na** M, jestliže je spojité v každém bodě $b \in M$ vzhledem k M,
- f je **spojité**, jestliže je spojité na P.

Věta 11.5 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f : P \to Q$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) *Zobrazení f je spojité.*

(ii) *Pro každou otevřenou množinu G v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (P, ρ).*

(iii) *Pro každou uzavřenou množinu F v prostoru (Q, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (P, ρ).*

Definice. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **hromadným bodem množiny** M, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\colon\; M \cap (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M značíme M' a nazýváme ji **derivací množiny** M. Body z $M \setminus M'$ nazýváme **izolovanými body množiny** M.

Definice. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset X$ a nechť $a \in X$ je hromadným bodem množiny A. Řekneme, že prvek $b \in Y$ je **limitou zobrazení** f **v bodě** a **vzhledem k množině** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\; \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\; \forall x \in A, x \neq a\colon \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Je-li $A = X$, říkáme, že f má v bodě a **limitu** b.

Konec 22. přednášky, 4. 5. 2015

Označení. Pokud limita f v bodě a vzhledem k A existuje, pak ji značíme $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$. Místo $\lim_{x \to a, x \in X} f(x)$ píšeme jen $\lim_{x \to a} f(x)$.

Věta 11.6 (Heineova věta). *Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y, $A \subset \mathcal{D}(f)$, $a \in A'$, $b \in Y$. Potom jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$,

(ii) *pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny $A \setminus \{a\}$ splňující $\lim x_n = a$ platí $\lim f(x_n) = b$.*

Věta 11.7 (spojitost složeného zobrazení v bodě). *Nechť (X, ρ), (Y, σ) a (Z, ω) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A \subset X$, $a \in A$, $B \subset Y$, $f(a) \in B$ a platí:*

- *existuje $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že $f(B(a, \delta) \cap A) \subset B$,*
- *f je spojité v bodě a vzhledem k A,*
- *g je spojité v bodě $f(a)$ vzhledem k B.*

Pak zobrazení $g \circ f$ je spojité v bodě a vzhledem k A.

Věta 11.8 (spojitosti složeného zobrazení). *Nechť (X, ρ), (Y, σ) a (Z, ω) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ jsou spojitá zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f\colon X \to Z$ je spojité.*

Věta 11.9 (limita složeného zobrazení). *Nechť (X, ρ), (Y, σ) a (Z, ω) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Y a g je zobrazení z Y do Z. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a platí:*

- *existuje* $\delta \in \mathbf{R}$*,* $\delta > 0$*, takové, že* $f((A \cap B(a, \delta)) \setminus \{a\}) \subset B$*,*
- $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$*,*
- $\lim_{y \to b, y \in B} g(y) = c$*.*

Pokud dále platí jedna z podmínek

(P) *existuje* $\eta \in \mathbf{R}, \eta > 0$*, takové, že pro každé* $x \in B(a, \eta) \cap A$*,* $x \neq a$*, platí* $f(x) \neq b$*,*

(S) *zobrazení* g *je spojité v bodě* b *vzhledem k* B*,*

pak $\lim_{x \to a, x \in A} g \circ f(x) = c$*.*

Definice. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$. Řekneme, že zobrazení f je **homeomorfismus**, jestliže je prosté a na, je spojité a f^{-1} je také spojité. Řekneme, že prostory (X, ρ) a (Y, σ) jsou **homeomorfní**, jestliže existuje bijekce $g : X \to Y$, která je homeomorfismem.

Konec 23. přednášky, 5. 5. 2015

12 Funkce více proměnných 1

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $1 \le i \le n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \colon \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$**, jestliže platí

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{||\boldsymbol{h}||} = 0.$$

Věta 12.1 (vztah totálního diferenciálu a parciální derivace)**.** *Nechť L je totální diferenciál funkce f v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Potom existují parciální derivace*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})$$

a pro každé $\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$ platí

$$L(h_1, \dots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})h_n.$$

Konec 24. přednášky, 11. 5. 2015

Věta 12.2. *Má-li funkce f v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ totální diferenciál, je f v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá.*

Lemma 12.3. *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \dots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in I$. Nechť v každém bodě I existují parciální derivace f podle všech proměnných. Potom existují body $\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \boldsymbol{\xi}^n \in I$ takové, že*

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{\xi}^i)(b_i - a_i).$$

Věta 12.4. *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě $\boldsymbol{a}$. Potom má f v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál.*

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$ podle vektoru $\boldsymbol{v}$** rozumíme (vlastní) limitu

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Pak definujeme **gradient funkce** f **v bodě** $\boldsymbol{a}$ jako vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right) \in \mathbf{R}^n.$$

Konec 25. přednášky, 12. 5. 2015

Věta 12.5. *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Nechť existuje $f'(\boldsymbol{a})$. Pak platí*

(i) $f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$,

(ii) $\max\{D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a});\ ||\boldsymbol{v}|| = 1\} = ||\nabla f(\boldsymbol{a})||$.

Definice. Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **derivací zobrazení** F **v bodě** $\boldsymbol{a}$, jestliže platí

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{o}} \frac{||F(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})||}{||\boldsymbol{h}||} = 0.$$

Věta 12.6. *Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, které má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ derivaci L. Potom je L reprezentováno maticí*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \ldots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Věta 12.7. *Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $F'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom F je spojité v $\boldsymbol{a}$.*

Věta 12.8. *Nechť F je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$, jsou spojité v $\boldsymbol{a}$. Potom $F'(\boldsymbol{a})$ existuje.*

Lemma 12.9. *Nechť $L \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení. Pak existuje $C \in \mathbf{R}$ takové, že $||L(\boldsymbol{x})|| \leq C||\boldsymbol{x}||$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$.*

Definice. **Normou lineárního zobrazení** $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ rozumíme číslo

$$||L|| = \sup \left\{ \frac{||L(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x}||};\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o} \right\}.$$

Lemma 12.10. *Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $f'(\boldsymbol{a})$ existuje. Potom existují $C \in \mathbf{R}$ a $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $\boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{o}, \delta)$ platí $||f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})|| \leq C||\boldsymbol{h}||$.*

Konec 26. přednášky, 18. 5. 2015

Věta 12.11 (derivace složeného zobrazení). *Nechť f je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^k$, g je zobrazení z $\mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}^s$, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ a $\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) \in \mathbf{R}^k$. Jestliže existují $f'(\boldsymbol{a})$ a $g'(\boldsymbol{b})$, pak existuje $(g \circ f)'(\boldsymbol{a})$ a platí $(g \circ f)'(\boldsymbol{a}) = g'(\boldsymbol{b}) \circ f'(\boldsymbol{a})$.*

Důsledek 12.12 (řetízkové pravidlo). *Nechť funkce $f_1, \ldots, f_k$ z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$ mají v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ totální diferenciál a funkce g z $\mathbf{R}^k$ do $\mathbf{R}$ má v bodě $\boldsymbol{b} = (f_1(\boldsymbol{a}), \ldots, f_k(\boldsymbol{a}))$ totální diferenciál. Definujme funkci h z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$ předpisem*

$$h(\boldsymbol{x}) = g(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_k(\boldsymbol{x})).$$

Potom má h v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál a pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\boldsymbol{b}) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}).$$

Věta 12.13 (o přírůstku funkce). *Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$, která má diferenciál v každém bodě otevřené množiny $G \subset \mathbf{R}^n$. Nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G$ a úsečka L spojující body $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je obsažena v G, tj. $L = \{(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b};\ t \in [0,1]\} \subset G$. Pak existuje $\boldsymbol{\xi} \in L$ takové, že*

$$f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

Definice. Řekneme, že množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je **konvexní**, jestliže pro každé dva body z A platí, že úsečka, která je spojuje, je obsažena v A.

Věta 12.14 (věta o přírůstku vektorové funkce). *Nechť $n, k \in \mathbf{N}$, $K \in \mathbf{R}$, $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f\colon G \to \mathbf{R}^k$ je zobrazení mající derivaci v každém bodě G a nechť*

$$\sup\{||f'(\boldsymbol{x})||;\ \boldsymbol{x} \in G\} \le K.$$

Pak f je ***lipschitzovské s konstantou*** *K, tj.*

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in G:\ ||f(\boldsymbol{b}) - f(\boldsymbol{a})|| \le K||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}||.$$

Konec 27. přednášky, 19. 5. 2015