

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 1

ZS 2014-15, 21. 1. 2015

1. Určete, pro které hodnoty $k \in \mathbb{N}$ je následující limita vlastní a pro tyto hodnoty limitu spočtěte.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^{20} - (n + 1)^{40}}{(n^k + 2)^{10} - (n + 1)^{30}}$$

(15 bodů)

2. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^x - \sqrt{1 + x^2}}{x^2}$$

(15 bodů)

3. Určete, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ je následující řada konvergentní.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}}{n^\alpha}$$

(15 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{1+2x}} & \text{pro } x \neq -\frac{1}{2}; \\ 0 & \text{pro } x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Rozhodněte, zda je funkce f spojitá na \mathbb{R} .
- Rozhodněte, zda existuje $f'_-(-\frac{1}{2})$. Pokud ano, určete její hodnotu.
- Určete obraz množiny $(-\frac{1}{2}, \infty)$ při zobrazení f .
- Rozhodněte, zda je funkce f na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$ konvexní.

(15 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 1

ZS 2014-15, 28. 1. 2015

1. Spočtěte limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n}}{\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 1}}$$

(15 bodů)

2. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - \cos(x)}{\arcsin(x \sin x)}$$

(15 bodů)

3. Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(2n + 1)}{n + \frac{1}{2}(-1)^n}$$

(15 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \log x}{e^x} & \text{pro } x > 0; \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Rozhodněte, zda je funkce f spojitá na intervalu $[0, \infty)$.
- (b) Rozhodněte, zda existuje $f'_+(0)$. Pokud ano, určete její hodnotu.
- (c) Rozhodněte, zda existuje $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, takové, že f je na intervalu $[0, a]$ klesající.
- (d) Rozhodněte, zda existuje $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, takové, že f je na intervalu $[b, \infty)$ konkávní.

(15 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 1

ZS 2014-15, 4. 2. 2015

1. Spočtěte limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n 2^n + \sqrt[2n]{n}}{(-1)^n 3^n + \sqrt[3n]{n}}}$$

(15 bodů)

2. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^4 + e^{x^4})}{\log(x^2 + e^{x^2}) - 2x^2}$$

(15 bodů)

3. Rozhodněte, zda následující řada konverguje a zda konverguje absolutně.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^2})$$

(15 bodů)

4. Uvažujte funkci $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^{\log(x^2)} & \text{pro } x \in (0, \infty), \\ 1 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Rozhodněte, zda existuje $f'_+(0)$. Pokud ano, určete její hodnotu.
- (b) Rozhodněte, zda je funkce f na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí.
- (c) Rozhodněte, zda je funkce f na intervalu $(0, \infty)$ konvexní.
- (d) Určete asymptotu funkce f v ∞ , pokud existuje.

(15 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 1

ZS 2014-15, 11. 2. 2015

1. Spočítejte limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right] \cdot \frac{(n^2 + n + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}{(n^2 + 1)^{10} - (n + 1)^{20}}.$$

Symbol $[x]$ značí celou část čísla x .

(15 bodů)

2. Spočítejte limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \sqrt{\cos(4x)} \sqrt[3]{\cos(6x)}}{(\sin(\sqrt[3]{x}) \cdot \arcsin(\sqrt[3]{x}))^3}$$

(15 bodů)

3. Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n^{\frac{2n}{n+1}}}{n^{\frac{4n}{n+1}}}$$

(15 bodů)

4. Uvažujte funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-1/x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Rozhodněte, zda existují $f'_+(0)$ a $f'_-(0)$. Pokud ano, určete jejich hodnoty.
- (b) Rozhodněte, zda je funkce f na intervalu $(-1, 1)$ klesající.
- (c) Určete obor hodnot funkce f .
- (d) Rozhodněte, zda existuje inflexní bod funkce f .

(15 bodů)

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 1

ZS 2014-15, 2. 3. 2015

1. Spočtěte limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1}}{n(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[4]{n^4 + 1})}.$$

(15 bodů)

2. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} - e^2 \right)$$

(15 bodů)

3. Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sin n + \cos n) \operatorname{arctg} n}{n^2 + 100}$$

(15 bodů)

4. Uvažujte funkci $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \arcsin(xe^{1-x}).$$

- Ukažte, že funkce f je dobře definována (tj. pro každé reálné číslo $x \in [0, \infty)$ je výraz $\arcsin(xe^{1-x})$ definován).
- Spočtěte jednostranné derivace funkce f ve všech bodech, kde existují.
- Určete intervaly monotonie funkce f .
- Rozhodněte, zda je funkce f na intervalu $(1, \infty)$ konkávní.

(15 bodů)