

Matematická analýza

1. díl

13. října 2025

Pick - Hencl - Spurný - Zelený

Obsah

Kapitola 1. Logika, množiny a základní číselné obory	1
1.1. Logika	1
1.2. Základní metody důkazů	11
1.3. Množiny	17
1.4. Relace uspořádání a zobrazení	19
1.5. Množina reálných čísel	26
1.6. Konečné a spočetné množiny	36
1.7. Vlastnosti elementárních funkcí	45
1.8. Teoretické a početní příklady	52
Kapitola 2. Limita posloupnosti	65
2.1. Nekonečné posloupnosti	65
2.2. Vlastní limita posloupnosti	67
2.3. Nevlastní limita posloupnosti	82
2.4. Hlubší věty o limitách	92
2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti	103
2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti	112
Kapitola 3. Číselné řady	127
3.1. Základní pojmy	127
3.2. Řady s nezápornými členy	132
3.3. Řady s obecnými členy	138
3.4. Absolutní konvergence číselných řad	143
3.5. Přerovnání řad	149
3.6. Součin řad	157
3.7. Zobecněné řady	160
3.8. Teoretické příklady k číselným řadám	174
3.9. Početní příklady k číselným řadám	192
Kapitola 4. Limita a spojitost funkce	207
4.1. Definice a základní vlastnosti	207
4.2. Věty o limitách	214
4.3. Funkce spojitě na intervalu	223
4.4. Teoretické příklady k limitě funkce	228

4.5. Početní příklady k limitě funkce	241
Kapitola 5. Derivace funkce	255
5.1. Základní vlastnosti derivace	255
5.2. Věty o střední hodnotě	265
5.3. Elementární funkce	270
5.4. L'Hôpitalovo pravidlo	287
5.5. Monotónní funkce	290
5.6. Konvexní a konkávní funkce	292
5.7. Průběh funkce	298
5.8. Teoretické příklady k derivaci funkce	301
5.9. Početní příklady k derivaci a jejím aplikacím	317
Kapitola 6. Taylorův polynom	365
6.1. Základní vlastnosti	365
6.2. Symbol malé o	371
6.3. Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí	374
6.4. Teoretické příklady k Taylorovu polynomu	381
6.5. Početní příklady k Taylorovu polynomu	384
Dodatek A. Teorie množin	393
A.1. Axiomy teorie množin	393
A.2. Množinové operace	395
A.3. Relace ekvivalence	397
Dodatek B. Konstrukce číselných oborů	401
B.1. Základní vlastnosti operací	401
B.2. Přirozená čísla	402
B.3. Celá čísla	408
B.4. Racionální čísla	410
B.5. Reálná čísla	412
B.6. Komplexní čísla	424
Literatura	393

Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. Logika

Výroková logika.

1.1.1. Logika je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti *vyvození* závěru z předpokladů. V tomto oddílu se budeme zabývat logikou výrokovou a predikátovou.

1.1.2. Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé (platí), nebo není pravdivé (neplatí). Pokud výrok platí, říkáme, že má **pravdivostní hodnotu 1**, pokud neplatí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu 0. Pouze některé správně utvořené gramatické věty jsou výroky. Věty „Číslo 4 je sudé.“ a „Praha je hlavní město Kanady.“ jsou výroky, naproti tomu „Ahoj!“ nebo „Kéž by už byl konec.“ nikoli. Tvrzení „Číslo π je iracionální.“ je výrok, i když zatím není známo, zda pravdivý či nepravdivý. Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací. Se základními logickými operacemi se nyní seznámíme.

1.1.3. Negaci výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A .“ K vyjádření negace výroku A můžeme také použít obrat „Neplatí A .“, případně změnit příslušné sloveso ve výroku pomocí předpony „ne“. Negaci výroku A značíme $\neg A$. Je-li výrok A pravdivý, pak je výrok $\neg A$ nepravdivý. Je-li výrok A nepravdivý, pak je výrok $\neg A$ pravdivý.

1.1.4. Konjunkci výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B .“ Dále používáme také obraty „Platí A a platí B .“, „Platí A i B .“ Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \& B$. Pokud jsou pravdivé oba výroky A a B , pak je konjunkce $A \wedge B$ pravdivá. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B nepravdivý, pak je konjunkce $A \wedge B$ nepravdivá.

1.1.5. Disjunkci výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B .“ Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$. Pokud je alespoň jeden z výroků A a B pravdivý, pak je disjunkce $A \vee B$ pravdivá. Pokud jsou oba výroky A a B nepravdivé, pak je disjunkce $A \vee B$ nepravdivá. Poznamenejme, že disjunkce není vylučující, to znamená, že je pravdivá i v případě, kdy platí oba výroky A a B zároveň. Takto používáme spojku „nebo“ v matematice na rozdíl od přirozeného jazyka, kde může mít i význam vylučovací.

1.1.6. Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A , potom platí (výrok) B .“ Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Pokud A neplatí nebo oba výroky A i B platí, pak jde o pravdivý výrok. Pokud A platí a B neplatí, pak jde o výrok nepravdivý. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Pro vyjádření implikace používáme také následující obraty.

- Jestliže platí výrok A , pak platí výrok B .
- Výrok A implikuje výrok B .
- Z výroku A plyne výrok B .
- Předpokládejme, že platí výrok A , potom platí výrok B .
- Necht' platí výrok A . Potom platí výrok B .
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B .
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A .

Je-li předpoklad A nepravdivý, pak implikace $A \Rightarrow B$ platí vždy bez ohledu na platnost závěru B . Jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoliv jiný výrok. Tato skutečnost může někdy působit potíže, které vyplývají z rozdílného používání obratu „Jestliže platí A , pak platí B .“ v logice a v přirozeném jazyce. V běžné řeči používáme tento obrat zpravidla tehdy, existuje-li nějaká věcná souvislost mezi předpokladem A a závěrem B , zatímco v logice používáme tento obrat i ke spojení výroků, kde taková souvislost nemusí existovat, například „Jestliže je medvěd ryba, pak jsou Athény v Egyptě.“ Pravdivost takového výroku v logice závisí pouze na pravdivostních hodnotách předpokladu a závěru. Ačkoli pravdivost takových výroků může působit nezvykle, je formálně logické pojetí implikace v matematice velmi užitečné. Podrobnější vysvětlení lze nalézt například v [24, II.8].

1.1.7. Ekvivalenci výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B .“ Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Pokud A a B mají stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ pravdivý výrok. Pokud nemají A a B stejnou pravdivostní hodnotu, pak je $A \Leftrightarrow B$ nepravdivý výrok. Ekvivalenci vyjadřujeme také pomocí následujících obrátů.

- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B .
- Výrok A je ekvivalentní výroku B .
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B .

1.1.8. Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B .

A	$\neg A$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
		1	0	0	1	0	0
		1	1	1	1	1	1

1.1.9. Pro zjednodušení zápisu bude mít mezi logickými operacemi negace přednost před ostatními operacemi. Například zápis $\neg A \Rightarrow B$ znamená $(\neg A) \Rightarrow B$.

1.1.10. Věta (vlastnosti negace, konjunkce a disjunkce). Necht' A , B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A , B , C .

- (a) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- (b) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
- (c) $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$
- (d) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
- (e) $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$
- (f) $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
- (g) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Důkaz. (a) Předpokládejme nejprve, že výrok A je nepravdivý. Potom je výrok $\neg A$ pravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je nepravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ pravdivý.

Nyní předpokládejme, že výrok A je pravdivý. Potom je výrok $\neg A$ nepravdivý a výrok $\neg(\neg A)$ je pravdivý. Výroky A a $\neg(\neg A)$ mají stejnou pravdivostní hodnotu, takže je výrok $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ opět pravdivý. Tím je důkaz proveden. Předchozí úvahu lze přehledněji zapsat pomocí následující tabulky.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
0	1	0	1
1	0	1	1

(b) Každý z výroků A a B může být pravdivý nebo nepravdivý. Použijeme-li stejný postup jako v předchozím případě, je třeba projít celkem čtyři případy. Tyto případy spolu s pravdivostními hodnotami příslušných výroků jsou zachyceny v následující tabulce.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Poslední sloupec pravdivostních hodnot obsahuje pouze pravdivostní hodnotu 1, takže uvažovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

(c) Podobně jako v předchozím případě sestavíme příslušnou tabulku. Zde je již celkem osm možností pravdivostních hodnot pro trojici výroků A , B a C .

A	B	C	$A \wedge B$	$B \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce pravdivostních hodnot jsou shodné, takže dokazovaná ekvivalence je vždy pravdivá.

Případy (d)–(g) lze odvodit zcela obdobně a příslušné tabulky zde již uvádět nebudeme. ■

1.1.11. Tvrzení (b) a (c) Věty 1.1.10 ukazují, že pokud chceme postupně spojit výroky $A_1, \dots, A_n$ pomocí konjunkce, pak nezáleží na pořadí, v jakém uvažované výroky spojíme. Například výroky

$$A_1 \wedge ((A_2 \wedge A_3) \wedge A_4), \quad ((A_4 \wedge A_3) \wedge A_1) \wedge A_2$$

jsou ekvivalentní. V takových případech pak používáme jednodušší zápis $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$. Tvrzení (d) a (e) Věty 1.1.10 umožňují zavedení obdobného zápisu $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ pro disjunkci. V případě konjunkce dokonce někdy vynecháváme symbol $\wedge$ a výroky pouze oddělujeme čárkami. Například výrok „Platí výroky A_1, A_2, A_3 .“ znamená „Platí výrok $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$.“

1.1.12. Věta (negace konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence). Necht A a B jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A a B .

- (a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- (b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- (c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
- (d) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$

Důkaz. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ukažme například platnost (d). Pravdivost výroků (a)–(c) lze dokázat obdobně.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow \neg B$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Poslední dva sloupce jsou shodné, a tedy výrok $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$ je vždy pravdivý. ■

1.1.13. Věta (vztah implikace a ekvivalence). Necht A a B jsou výroky. Potom jsou výroky $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ekvivalentní, tj. výrok

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \quad (1.1)$$

je vždy pravdivý bez ohledu na pravdivost výroků A a B .

Důkaz. Opět použijeme tabulku pravdivostních hodnot.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poslední dva sloupce jsou shodné, a výrok (1.1) je tedy vždy pravdivý. ■

1.1.14. Věta. Necht A , B a C jsou výroky. Potom jsou následující výroky vždy pravdivé bez ohledu na pravdivost výroků A , B , C .

- (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- (c) $((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$

Důkaz. Tvrzení plynou z následujících tabulek pravdivostních hodnot.

(a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

(b)

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

(c)

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Sloupec pravdivostních hodnot odpovídající výroku $(A \vee B) \Rightarrow C$ je shodný s posledním sloupcem, a proto je výrok v bodě (c) vždy pravdivý. ■

Predikátová logika.

1.1.15. Tvrzení „Číslo x je liché.“, kde x je proměnná, je gramatickou větou, nicméně není výrokem, protože jej nelze potvrdit ani vyvrátit. Z uvedeného tvrzení se stane výrok, pokud proměnnou x nahradíme konkrétním číslem, například „Číslo 7 je liché.“ Právě uvedený příklad motivuje následující definici.

1.1.16. Definice. **Výroková forma** je výraz, který má konečný počet proměnných, přičemž když za tyto proměnné dosadíme prvky z daného oboru, obdržíme výrok.

1.1.17. Necht výroková forma V má tvar „ x je hlavní město České republiky“, kde za x dosazujeme jména českých měst. Pak $V(\text{Praha})$ je pravdivý výrok, ale výrok $V(\text{Plzeň})$ neplatí.

1.1.18. Pojem *množiny* budeme používat v intuitivním smyslu. Pro naše úvahy nám zatím postačí toto (ne zcela přesné) vymezení: *Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme prvky, do jediného celku.* Je-li a prvkem množiny A , pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A , píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B , potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Značíme ji $\emptyset$. Zpřesňující výklad o množinách je uveden v Oddílu 1.3 a zejména v Dodatku A, kde jsou popsány vlastnosti třídy všech množin.

1.1.19 (obory výrokových forem). Výrokové formy mohou mít různé obory, ze kterých můžeme dosazovat za jejich proměnné. V 1.1.17 je takovým oborem množina názvů měst v České republice. V našem textu však bude užitečné předpokládat, že všechny výrokové formy, se kterými budeme od této chvíle pracovat, budou mít za svůj obor třídu všech množin. Později uvidíme, že tento předpoklad není nijak omezující, neboť i objekty jako například přirozené číslo, reálné číslo, funkce jsou množinami. Při použití této konvence se může stát, že do výrokové formy dosadíme za proměnnou prvek mimo „přirozený“ obor výrokové formy. Pak vznikne tvrzení, které se bude jevit jako nesmyslné. Taková tvrzení budeme považovat za nepravdivá.

Pro ilustraci uvažujme výrokovou formu $x > 7$. Pokud budeme za x dosazovat přirozená čísla, budeme dostávat smysluplné výroky. Některé budou pravdivé,

jiné budou nepravdivé. Pokud za x dosadíme například množinu přirozených čísel, obdržíme tvrzení, které se jeví jako nesmyslné. My jej však budeme považovat za nepravdivé: každý termín použitý v uvedeném tvrzení je srozumitelný, ale tvrzení samo pravdivé není.

1.1.20. *Predikátem* v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. V 1.1.19 je predikátem „býti větší než 7“. Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace. Pojmem kvantifikace se nyní budeme zabývat.

1.1.21. Definice. Necht V je výroková forma s jednou proměnnou.

(a) Výrok „Pro každé x platí $V(x)$.“ symbolicky zapisujeme ve tvaru

$$\forall x: V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

(b) Výrok „Existuje x takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists x: V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

1.1.22. Poznámka. Z typografického hlediska vznikly symboly $\forall$ a $\exists$ otočením písmen A a E. Písmeno A vychází z německého slova *allgemein*, a písmeno E patrně z francouzského slova *exister*.

1.1.23 (intuitivní pojetí matematické logiky). V našem textu se přidržíme intuitivního významu kvantifikátorů, tj. využijeme toho, jak v běžné řeči rozumíme obratům „pro každé x “ a „existuje x “. Nebudeme tedy usilovat o čistě formální pojetí matematické logiky, neboť takový přístup by pro svou náročnost nebyl přiměřený našemu textu. Proto některé vlastnosti kvantifikátorů z tohoto oddílu nebudeme dokazovat, nicméně by tyto vlastnosti měly být intuitivně zřejmé. V knize [22] je možné se seznámit s precizní výstavbou matematické logiky a jejími hlubokými výsledky. Kniha však předpokládá obeznámenost s vyšší matematikou.

1.1.24 (kvantifikace s podmínkou). Necht V a P jsou výrokové formy s jednou proměnnou. V Definici 1.1.21 uvažujeme kvantifikace v souladu s úmluvou 1.1.19 přes třídu všech množin. Obvykle nás však zajímá, zda $V(x)$ platí pro každé x z oboru, který je menší než třída všech množin. Podobně nás může zajímat zda v tomto oboru existuje x takové, že platí $V(x)$. Navíc ještě můžeme náš zájem zúžit na prvky, které splňují nějakou další podmínku. Pokud je tímto oborem množina M a podmínka je popsána pomocí výrokové formy P s jednou proměnnou, budeme používat následující značení.

(a) Formule

$$\forall x \in M, P(x): V(x) \tag{1.2}$$

znamená

$$\forall x: ((x \in M \wedge P(x)) \Rightarrow V(x)).$$

Výrok (1.2) zní: „Pro každý prvek x z množiny M takový, že platí $P(x)$, platí $V(x)$.“

(b) Formule

$$\exists x \in M, P(x) : V(x) \quad (1.3)$$

znamená

$$\exists x : (x \in M \wedge P(x) \wedge V(x)).$$

Výrok (1.3) zní: „Existuje prvek x z množiny M , pro který platí $P(x)$ i $V(x)$.“

Obdobný zápis používáme i v případě, že V je výroková forma o více než jedné proměnné. Výše uvedená úmluva zjednodušuje a zpřehledňuje zápis formulí.

1.1.25. Necht V je výroková forma s jednou proměnnou a M je množina. Výrok „Existuje právě jedno $x \in M$ takové, že platí $V(x)$.“ zapisujeme ve tvaru

$$\exists! x \in M : V(x).$$

Uvedený výrok lze vyjádřit pomocí dříve zavedených symbolů takto

$$(\exists x \in M : V(x)) \wedge (\forall y \in M \forall z \in M : ((V(y) \wedge V(z)) \Rightarrow y = z))$$

První člen konjunkce vyjadřuje, že existuje prvek $x \in M$ takový, že platí $V(x)$. Druhý člen zachycuje jednoznačnost.

1.1.26 (zúžení výrokové formy). Necht V je výroková forma s jednou proměnnou a A, B jsou množiny splňující $B \subset A$. Potom platí:

$$(\forall x \in A : V(x)) \Rightarrow (\forall x \in B : V(x))$$

a

$$(\exists x \in B : V(x)) \Rightarrow (\exists x \in A : V(x)).$$

První výro říká, že pokud výrok $V(x)$ platí pro každý prvek x množiny A , pak platí i pro každý prvek x z množiny B . Druhý výrok tvrdí, že pokud v množině B existuje prvek x takový, že $V(x)$ platí, pak takový prvek nalezneme i v množině A .

1.1.27 (formule s více kvantifikátory). Pokud má výroková forma více proměnných, můžeme z ní pomocí kvantifikátorů vytvořit nové výrokové formy s menším počtem proměnných nebo dokonce výroky.

Mějme výrokovou formu V se dvěma proměnnými. Nyní můžeme vytvořit nové výrokové formy s jednou proměnnou například takto:

$$\begin{array}{ll} \forall x : V(x, y), & \exists x : V(x, y), \\ \forall y : V(x, y), & \exists y : V(x, y). \end{array}$$

V prvním řádku jde o výrokové formy s proměnnou y a ve druhém s proměnnou x . Z těchto forem lze utvořit výroky použitím dalšího kvantifikátoru, například

$$\forall x : (\forall y : V(x, y)), \quad \exists y : (\exists x : V(x, y)).$$

Výroky uvedeného typu zapisujeme zpravidla jednodušeji následujícím způsobem:

$$\forall x \forall y : V(x, y), \quad \exists y \exists x : V(x, y).$$

Obdobně můžeme pomocí kvantifikátorů vytvářet výrokové formy a výroky z výrokové formy s více než dvěma proměnnými.

1.1.28 (pořadí kvantifikátorů). Necht V je výroková forma se dvěma proměnnými. Potom platí:

$$\begin{aligned}(\forall x \forall y: V(x, y)) &\Leftrightarrow (\forall y \forall x: V(x, y)), \\(\exists x \exists y: V(x, y)) &\Leftrightarrow (\exists y \exists x: V(x, y)), \\(\exists x \forall y: V(x, y)) &\Rightarrow (\forall y \exists x: V(x, y)).\end{aligned}$$

První dvě tvrzení říkají, že pořadí kvantifikátorů *stejněho typu* lze zaměňovat, aniž by se změnila pravdivostní hodnota výroku. V poslední ze tří výše uvedených formulí je však pouze implikace, nikoli ekvivalence. Pořadí obecného kvantifikátoru a existenčního kvantifikátoru totiž obecně zaměnit nelze, jak ukazuje následující příklad.

1.1.29. Necht $A(m, d), m \in M, d \in D$, značí výrokovou formu

$$\text{„Muž } m \text{ je otcem dítěte } d.\text{“}, \quad m \in M, d \in D,$$

kde M je množina všech mužů a D je množina všech dětí. Výroky

$$\forall d \in D \exists m \in M: A(m, d), \quad \exists m \in M \forall d \in D: A(m, d)$$

se liší pouze pořadím kvantifikátorů. První výrok říká, že každé dítě má svého otce. Druhý výrok tvrdí, že existuje muž, který je otcem všech dětí. Pravdivostní hodnoty těchto výroků se tedy liší.

1.1.30. Necht V je výroková forma se dvěma proměnnými a A je množina. V takovém případě vzhledem k záměnnosti kvantifikátorů stejného typu používáme často místo zápisu

$$\forall x \in A \forall y \in A: V(x, y)$$

zápis

$$\forall x, y \in A: V(x, y).$$

Podobně místo

$$\exists x \in A \exists y \in A: V(x, y)$$

píšeme zkráceně

$$\exists x, y \in A: V(x, y).$$

Tuto konvenci budeme zřejmým způsobem používat i ve formulích, které obsahují více než dva kvantifikátory.

1.1.31 (negace výroků s kvantifikátory). Necht V a P jsou výrokové formy s jednou proměnnou a M je množina.

(a) Negaci výroku

$$\forall x: V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\exists x: \neg V(x),$$

přičemž $\neg V$ značí výrokovou formu, která po dosazení za proměnnou x určuje výrok $\neg(V(x))$. Podobně negaci výroku

$$\exists x: V(x)$$

lze zapsat ve tvaru

$$\forall x: \neg V(x).$$

(b) Negovat výrok

$$\forall x \in M, P(x): V(x),$$

znamená negovat výrok

$$\forall x: ((x \in M \wedge P(x)) \Rightarrow V(x)).$$

Po provedení negace dostaneme

$$\exists x: \neg((x \in M \wedge P(x)) \Rightarrow V(x)),$$

takže podle Věty 1.1.12(c)

$$\exists x: (x \in M \wedge P(x) \wedge \neg V(x)).$$

Poslední formuli lze přepsat ve tvaru

$$\exists x \in M, P(x): \neg V(x).$$

(c) Podobně lze odvodit, že negace výroku

$$\exists x \in M, P(x): V(x)$$

má tvar

$$\forall x \in M, P(x): \neg V(x).$$

(d) Pokud negujeme výrok, který obsahuje více kvantifikátorů, postupujeme tak, že ve formuli zaměníme obecné kvantifikátory za existenční, existenční za obecné a negujeme výrokovou formu. Správnost postupu vyplývá z předchozího výkladu.

1.1.32. Necht V je výroková forma se třemi proměnnými a A, B, C jsou množiny. Negaci výroku

$$\forall x \in A \exists y \in B \forall z \in C: V(x, y, z)$$

lze podle 1.1.31(d) zapsat ve tvaru

$$\exists x \in A \forall y \in B \exists z \in C: \neg V(x, y, z).$$

S výrokovými formami a kvantifikátory se budeme v tomto textu setkávat neustále. Úlohy k procvičení jsou uvedeny v Oddílu 1.8.

1.2. Základní metody důkazů

1.2.1 (základní číselné obory intuitivně). Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel $1, 2, 3, \dots$, budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech **celých** čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit $\mathbb{Q}$ a množinu všech **reálných** čísel $\mathbb{R}$. **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální. Čísla z uvedených množin můžeme porovnávat mezi sebou podle velikosti, sčítat, odčítat, násobit a s jistými omezeními dělit. Pro rovnost reálných čísel budeme používat standardní symbol $=$ a pro nerovnosti symboly $\leq, \geq, <, >$. Pro uvedené operace pak symboly $+$ (plus), $-$ (minus), $\cdot$ (krát) a $-$ (zlomková čára). Budeme předpokládat znalost základních vlastností těchto množin na úrovni středoškolské matematiky, tj. zejména znalost vlastností početních operací. Předpokládáme znalost termínů kladné (respektive nekladné, záporné, nezáporné) reálné číslo. Také použijeme tvrzení, že množina přirozených čísel je rovna množině všech celých čísel, která jsou větší než 0, a číslo 1 je nejmenší přirozené číslo, tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \geq 1$. O množinách $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ zde hovoříme zejména proto, abychom je mohli používat v ilustračních příkladech tohoto oddílu. Více o nich řekneme v Oddílu 1.5 a jejich přesnému zavedení se budeme věnovat v Dodatku B.

1.2.2 (výstavba matematiky). V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Jako příklad uveďme axiom, který říká, že existuje alespoň jedna množina. Všechna další tvrzení jsou potom v **důkazech** odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**.¹ **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomy, definicemi, větami, lemmaty a důkazy. Podrobnější výklad o axiomech i samotném jazyce matematiky je uveden v Dodatku A.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A , pak platí závěr B . Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,
- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozбором případů,
- důkaz matematickou indukcí.

¹Slovo lemma je středního rodu.

Tyto postupy nyní stručně vysvětlíme a výklad doplníme příklady. Uvedme ještě, že u složitějších důkazů je často nutné použít i několika z výše uvedených postupů a vzájemně je kombinovat.

1.2.3 (přímý důkaz). Mějme matematickou větu ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ pro jisté výroky A a B . Při přímém důkazu postupujeme takto: Předpokládáme, že výrok A platí. Odtud odvodíme platnost jistého výroku C_1 , pomocí C_1 dokážeme pravdivost jistého výroku C_2 , z něho pak dokážeme C_3 a tak dále, až z předpokladu platnosti výroku C_n dokážeme výrok B . Odvodili jsme tedy následující řetěz implikací

$$A \Rightarrow C_1, C_1 \Rightarrow C_2, C_2 \Rightarrow C_3, \dots, C_{n-1} \Rightarrow C_n, C_n \Rightarrow B,$$

ze kterého již plyne platnost implikace $A \Rightarrow B$. Chceme-li dokázat nějakou větu přímým důkazem, je na nás, abychom našli vhodné střední členy $C_1, \dots, C_n$, které nám umožní z předpokladu odvodit závěr. Jak je hledat v konkrétním případě, na to bohužel žádný návod či dokonce algoritmus neexistuje. Matematika je tvůrčí činnost a bez určité míry důvtipu žádnou novou větu dokázat nelze.

1.2.4 (nepřímý důkaz). Tento typ důkazu je založen na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ (vizte Větu 1.1.14(a)). Platí-li druhý výrok, pak platí i první. Stačí tedy nalézt jakýkoli důkaz druhého výroku.

1.2.5 (důkaz sporem). Tato metoda je založena na ekvivalenci výroků $A \Rightarrow B$ a $\neg(A \wedge \neg B)$, která plyne z Vět 1.1.14(b), 1.1.12(a) a 1.1.10(a). Při tomto způsobu dokazování předpokládáme platnost výroku $A \wedge \neg B$. Pokud se nám z něho podaří odvodit výrok C , který je nepravdivý, pak nemůže být pravdivý ani výrok $A \wedge \neg B$. Z pravdivého výroku totiž nevyplývá výrok nepravdivý. Platí tedy $\neg(A \wedge \neg B)$, neboli $A \Rightarrow B$.

1.2.6 (důkaz rozбором případů). Máme dokázat tvrzení tvaru $A \Rightarrow B$. Pokud dokážeme výrok A zapsat jako disjunkci výroků C a D , neboli ve tvaru $C \vee D$, pak podle Věty 1.1.14(c) stačí dokázat tvrzení $C \Rightarrow B$ a $D \Rightarrow B$. V tomto důkazu tedy nejprve dokazujeme závěr B za předpokladu, že platí C . Pak dokazujeme B za předpokladu, že platí D . Při aplikaci této metody je tedy třeba zapsat předpoklad věty ve tvaru $C \vee D$ tak, abychom pak mohli snáze odvodit $C \Rightarrow B$ a $D \Rightarrow B$. Ani zde není k dispozici žádný algoritmus, jak taková C a D nalézt.

1.2.7 (důkaz matematickou indukcí). Důkaz matematickou indukcí lze použít k důkazu výroku tvaru

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n), \tag{1.4}$$

kde V je výroková forma. Takový důkaz sestává ze dvou kroků:

- (a) dokážeme výrok $V(1)$,
- (b) dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: (V(n) \Rightarrow V(n+1)),$$

neboli předpokládáme platnost $V(n)$ (tzv. *indukční předpoklad*) a odvodíme platnost $V(n+1)$.

Princip matematické indukce pak říká, že z (a) a (b) plyne výrok (1.4). Korektnost principu matematické indukce podstatně souvisí s konstrukcí množiny přirozených čísel, které se budeme věnovat v Dodatku B.

1.2.8 (varianta důkazu matematickou indukcí). Uvažujme výrok

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0: V(n), \quad (1.5)$$

kde $n_0 \in \mathbb{Z}$ a V je výroková forma. Rozdíl mezi (1.4) a (1.5) spočívá v jiném oboru kvantifikace. Zde opět platí princip matematické indukce (vizte opět Dodatek B), podle kterého dokazujeme (1.5) takto:

- (a) dokážeme výrok $V(n_0)$,
- (b) dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0: (V(n) \Rightarrow V(n+1)).$$

1.2.9 (důkaz úplnou matematickou indukcí). Necht' $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \quad (1.6)$$

je někdy možné dokázat pomocí úplné matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

- (a) platí $V(1)$,
- (b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(\forall j \in \mathbb{N}, j \leq n: V(j)) \Rightarrow V(n+1).$$

Krok (b) úplné matematické indukce se liší od druhého kroku matematické indukce popsané v paragrafu 1.2.7 v tom, že místo abychom předpokládali pouze platnost $V(n)$, předpokládáme, že platí výroky $V(1), V(2), \dots, V(n)$.

Předpokládejme, že platí (a) a (b). Ukážeme, že pak platí (1.6). Definujme výrokovou formu $W(n)$, $n \in \mathbb{N}$, následujícím způsobem: Výrok $W(n)$ říká, že pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, platí $V(j)$. Matematickou indukcí dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N}: W(n). \quad (1.7)$$

Výrok $W(1)$ platí podle (a). Nyní předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $W(n)$. Potom podle (b) platí $V(n+1)$. Platí-li $W(n)$ a $V(n+1)$, pak platí $W(n+1)$. Podle principu matematické indukce platí (1.7). Z výroku (1.7) pak okamžitě plyne (1.6).

Další varianty důkazu matematickou indukcí jsou uvedeny v příkladové části této kapitoly (Oddíl 1.8).

1.2.10 (pravidlo generalizace). Při důkazu výroku

$$\forall x \in M: V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M , a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x . Tím je pak důkaz proveden.

Použití výše uvedených důkazových metod přiblížíme v následujících příkladech.

1.2.11. Příklad. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz tvrzení. Vezměme libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $(a-b)^2 \geq 0$. Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. ♣

1.2.12. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. (V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.)

Řešení. K důkazu první části tvrzení použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ položíme $k = 1$. Potom máme $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a chceme tvrzení dokázat i pro číslo $n + 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě platí $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, ve druhém $n + 1 = 2k$. V prvním případě je tedy hledaným číslem $k + 1$ a ve druhém k .

Pokud by číslo $n \in \mathbb{N}$ bylo zároveň liché i sudé, pak by existovala $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2k = 2l - 1$. Potom $2(l - k) = 1$, a tedy $l - k = \frac{1}{2}$. Číslo $l - k$ je celé, na rozdíl od čísla $\frac{1}{2}$, což je spor. Metodou důkazu sporem jsme odvodili i druhou část tvrzení. Tím je tvrzení příkladu dokázáno. ♣

1.2.13. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{N}$ je liché. Dokažte, že potom m^n je liché číslo.

Řešení. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je číslo $m^1 = m$ liché podle předpokladu. Předpokládejme platnost tvrzení pro přirozené číslo n , tj. předpokládejme, že číslo m^n je liché. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m^n = 2k - 1$. Existuje také $l \in \mathbb{N}$ takové, že $m = 2l - 1$. Potom platí

$$m^{n+1} = m^n \cdot m = (2k - 1) \cdot (2l - 1) = 2(2kl - k - l + 1) - 1.$$

Dále platí $2kl - k - l + 1 = k(l - 1) + l(k - 1) + 1 \geq 1$, a tedy $2kl - k - l + 1 \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že číslo m^{n+1} je liché. ♣

1.2.14. Připomeňme, že číslo $d \in \mathbb{Z}$ nazýváme **dělitelem** čísla $n \in \mathbb{Z}$, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $n = kd$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zřejmé 1 i n dělitelem n . Řekneme, že $n \in \mathbb{N}$ je **prvočíslo**, pokud $n > 1$ a jeho jediní kladní dělitelé jsou 1 a n . Například čísla 2, 3, 5, 7, 11 jsou prvočísla.

Každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, lze zapsat právě jedním způsobem ve tvaru $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, kde

- $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$,
- $p_1, \dots, p_k$ jsou prvočísla,
- $p_1 < \dots < p_k$.

Uvedený zápis nazýváme **prvočíselným rozkladem** čísla n .

1.2.15. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje právě jedna dvojice $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2^{k-1}(2l - 1)$.

Řešení. Pomocí úplné matematické indukce nejprve dokážeme existenci příslušných $k, l \in \mathbb{N}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak ukážeme i jednoznačnost k a l .

Existence. Pro $n = 1$ položíme $k = 1$ a $l = 1$ a máme $n = 1 = 2^{1-1}(2 \cdot 1 - 1)$. Předpokládejme, že každé $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, lze vyjádřit ve tvaru $2^{k-1}(2l - 1)$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$. Chceme ukázat, že i pro číslo $n + 1$ lze nalézt příslušná $k, l \in \mathbb{N}$. Pokud je $n + 1$ číslo liché, pak podle definice existuje $l \in \mathbb{N}$ takové, že $n + 1 = 2l - 1$ (vizte Příklad 1.2.12). Položíme $k = 1$ a tvrzení je dokázáno. Pokud je číslo $n + 1$ sudé, pak opět podle definice existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $n + 1 = 2m$. Poněvadž $m \leq n$, existují podle indukčního předpokladu čísla $k', l' \in \mathbb{N}$ taková, že $m = 2^{k'-1}(2l' - 1)$. Potom stačí položit $k = k' + 1$ a $l = l'$.

Jednoznačnost. Předpokládejme, že $n = 2^{k-1}(2l - 1) = 2^{k'-1}(2l' - 1)$ pro $k, l, k', l' \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $k' > k$, pak platí $2l - 1 = 2^{k'-k}(2l' - 1)$. Číslo na levé straně rovnosti je liché, zatímco číslo na pravé straně je sudé, což je spor. Podobně vede ke sporu předpoklad $k < k'$. Musí tedy platit $k = k'$. Potom dostáváme $2l - 1 = 2l' - 1$. Odtud již snadno plyne $l = l'$. Tím je důkaz jednoznačnosti proveden. ♣

1.2.16. Příklad. Necht $m \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li m^2 sudé, potom je i m sudé.

Řešení. Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že neplatí, že m je sudé. Číslo m je tedy liché a podle Příkladu 1.2.13 platí, že m^2 je liché. Číslo m^2 tedy není sudé. Tím je tvrzení dokázáno metodou nepřímého důkazu. ♣

1.2.17. Příklad (Hippasus²). Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$, které je definováno jako kladné řešení rovnice $y^2 = 2$ v oboru reálných čísel, není racionální. Existenci a jednoznačnost takového řešení dokážeme později (vizte 5.3.1).

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Potom podle definice racionálního čísla existují $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Poněvadž $\sqrt{2}$ je kladné číslo, musí být $p > 0$, a tedy $p \in \mathbb{N}$. Navíc můžeme předpokládat, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Podle Příkladu 1.2.15 lze totiž nalézt čísla k_1, l_1, k_2, l_2 z množiny $\mathbb{N}$ taková, že $p = 2^{k_1-1}(2l_1 - 1)$ a $q = 2^{k_2-1}(2l_2 - 1)$. Pak stačí místo dvojice p a q uvažovat dvojici $2l_1 - 1$ a $2^{k_2-k_1}(2l_2 - 1)$, pokud $k_2 \geq k_1$, nebo $2^{k_1-k_2}(2l_1 - 1)$ a $2l_2 - 1$, pokud $k_2 < k_1$.

Z rovnosti $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ plyne, že $2q^2 = p^2$, a tedy číslo p^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.16 dostáváme, že i p je sudé, a tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $p = 2k$. Dosazením za p do rovnosti $2q^2 = p^2$ dostáváme, že $2q^2 = 4k^2$, a tedy $q^2 = 2k^2$. Odtud plyne, že q^2 je sudé. Podle Příkladu 1.2.16 je číslo q sudé. Obě čísla p a q jsou tedy sudá, což je spor s předpokladem, že nejvýše jedno z čísel p a q je sudé. Číslo $\sqrt{2}$ tedy není racionální. ♣

1.2.18. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom je číslo $n(n + 1)$ sudé.

²Hippasus (5. stol. př. n. l.)

Řešení. Provedeme důkaz rozбором případů. Mějme $n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že n je sudé, nebo n je liché. Pokud je n sudé, pak je i číslo $n(n+1)$ sudé. Pokud je číslo n liché, pak je číslo $n+1$ sudé, a proto je i číslo $n(n+1)$ sudé. Tím je důkaz proveden. ♣

1.2.19 (konstruktivní a nekonstruktivní důkaz). Při důkazu výroku

$$\exists x \in M : V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

1.2.20. Příklad. Ukažte, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

Řešení (konstruktivní důkaz). Položme $a = \sqrt{2}$ a $b = \log_2 9$, kde $\log_2$ označuje logaritmus o základu 2. Přesnou definici výrazu a^b a logaritmu uvedeme v Kapitole 5. Potom platí

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2} \log_2 (3^2)} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální podle Příkladu 1.2.17. Stačí tedy odvodit, že číslo $\log_2 9$ je iracionální. Použijeme metodu důkazu sporem. Předpokládejme, že $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Poněvadž je číslo $\log_2 9$ kladné, musí být p přirozené. Potom $9 = 2^{\log_2 9} = 2^{\frac{p}{q}}$, a tedy $9^q = 2^p$. Číslo 2^p je sudé a podle Příkladu 1.2.13 je číslo 9^q liché, což je spor. ♣

Řešení (nekonstruktivní důkaz). Využijeme opět iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Pokud by číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ bylo racionální, pak bychom byli s důkazem hotovi. Pokud by tomu tak nebylo, pak by čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$ byla iracionální, přitom ale číslo

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

je racionální. Tím je tvrzení dokázáno, neboť alespoň jedna dvojice čísel

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2} \quad \text{nebo} \quad a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$$

splňuje zadání úlohy. Výše uvedený postup však neříká, zda je řešením první nebo druhá dvojice čísel.

Poznamenejme ještě, že lze ukázat, že číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionální. Důkaz je však velmi obtížný ([9, 21]). ♣

1.2.21 (důkazy nerovností). Máme-li dokázat nerovnost $A \leq B$ mezi reálnými čísly A a B , často postupujeme tak, že nalezneme reálné číslo C splňující $A \leq C$ a $C \leq B$. Odtud pak již plyne nerovnost $A \leq B$. Při hledání čísla C jde o to, aby důkazy nerovností $A \leq C$ a $C \leq B$ byly snazší než důkaz nerovnosti $A \leq B$. Číslu C někdy

říkáme *horní odhad* čísla A a také *dolní odhad* čísla B . Samotnou nerovnost $A \leq C$ nebo $C \leq B$ také někdy nazýváme *odhadem*.

1.2.22. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dokažte, že platí $2n^2 \geq (n+1)^2$.

Řešení. Uvažujme výraz $n^2 + 3n$. Potom platí $2n^2 = n^2 + n \cdot n \geq n^2 + 3n$, protože $n \geq 3$. Platí také $n^2 + 3n \geq n^2 + 2n + 1$, protože $n \geq 1$. Dohromady tedy máme $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, což jsme měli dokázat. ♣

1.3. Množiny

1.3.1. Nebudeme se zde zabývat otázkou, co je obecně množina. Tento problém, jenž se nachází na pomezí matematiky a filosofie, je totiž velmi nesnadný a překračuje rámec tohoto textu. Zopakujme zatím pouze formulaci z paragrafu 1.1.18, která říká, že množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů, které nazýváme **prvky**, do jediného celku. Doplnující informace jsou uvedeny v Dodatku A. Pro systematický výklad teorie množin doporučujeme knihu [3].

Nyní zopakujeme pojmy z paragrafu 1.1.18 a přidáme několik dalších.

1.3.2. Množina je určena svými prvky. Skutečnost, že prvek a **patří** do množiny A , značíme $a \in A$, a skutečnost, že a do A **nepatří**, zapíšeme jako $a \notin A$.

Množinu je možné definovat výčtem prvků, například píšeme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, nebo pomocí vlastnosti, kterou musejí splňovat její prvky, tj. píšeme $\{x; V(x)\}$, případně $\{x \in M; V(x)\}$, kde M je množina a $V(x)$, $x \in M$ je výroková forma. Příkladem je zápis $\{x \in \mathbb{N}; x < 6\}$.

Prázdnou množinou nazýváme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označujeme ji symbolem $\emptyset$. Množinu, která není prázdná, nazýváme **neprázdnou**.

1.3.3. Řekneme, že množina A je **částí** množiny B nebo množina A je **podmnožinou** množiny B , jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B . Tuto skutečnost značíme $A \subset B$ (někdy také píšeme $B \supset A$) a tomuto vztahu mezi množinami říkáme **inkluze**. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Množiny A a B jsou si **rovné** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky, neboli platí současně $A \subset B$ a $B \subset A$. Není těžké odvodit, že pro libovolné množiny A, B, C platí

- $A = A$,
- jestliže $A = B$, potom $B = A$,
- jestliže $A = B$ a $B = C$, potom $A = C$.

Pokud si množiny A a B nejsou rovny, píšeme $A \neq B$. Řekneme, že množina A je **vlastní částí** množiny B nebo A je **vlastní podmnožinou** množiny B , jestliže $A \subset B$ a $A \neq B$.

Necht X je množina. Množinu všech podmnožin X značíme $\mathcal{P}(X)$ a nazýváme ji **potenční množinou** množiny X . Z jazykových důvodů budeme často používat slovní spojení „systém (pod)množin“ místo „množina (pod)množin“.

1.3.4. Označení. (a) Necht $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny. Potom zápis $A_1 \subset \dots \subset A_n$ znamená, že platí inkluze $A_1 \subset A_2, A_2 \subset A_3, \dots, A_{n-1} \subset A_n$. Obdobné značení používáme i pro symbol $\supset$.

(b) Necht X je množina a $n \in \mathbb{N}$. Místo zápisu $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X$ budeme často používat stručnější zápis $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$.

Nyní zavedeme operace, které ze dvou (nebo více) množin utvoří další množinu.

1.3.5. Sjednocení množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B . Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

1.3.6. Průnikem množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B . Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li množiny A a B prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a , které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$. Řekneme, že systém $\mathcal{A}$ je **disjunktní**, jestliže pro každé $A, B \in \mathcal{A}$ splňující $A \neq B$ platí $A \cap B = \emptyset$.

1.3.7. Příklad. Necht $\mathcal{A} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$. Určete $\bigcup \mathcal{A}$ a $\bigcap \mathcal{A}$.

Řešení. Přímo z definice dostáváme $\bigcup \mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ a $\bigcap \mathcal{A} = \{3\}$. ♣

1.3.8. Rozdílem množin A a B nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B . Rozdíl množin A a B značíme $A \setminus B$.

1.3.9. Necht $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_m$ jsou množiny. **Kartézským součinem** $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ nazveme množinu všech uspořádaných m -tic $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Někdy místo symbolu $[a_1, a_2, \dots, a_m]$ používáme symbol $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ a také někdy místo $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ píšeme $\prod_{i=1}^m A_i$. Přesnou definici pojmu uspořádaná n -tice lze nalézt v Dodatku A. Je-li A množina a $n \in \mathbb{N}$, pak místo $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-krát}}$ píšeme A^n .

1.3.10. V operaci kartézského součinu není obecně možné zaměňovat pořadí množin. Pokud například $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, pak $A \times B = \{[0, 1]\}$, $B \times A = \{[1, 0]\}$, takže $A \times B \neq B \times A$.

1.3.11. Věta (de Morganova³ pravidla). Necht X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a dále

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

³Augustus de Morgan (1806–1871)

Důkaz. Provedeme důkaz prvního z uvedených tvrzení. Máme dokázat dvě inkluze, a sice

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a zároveň

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \supset \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

Je-li $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, znamená to, že x patří do X , ale nepatří do sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$. Tedy $x \notin A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. To ale znamená, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$, a tudíž $x \in \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$. Tím je první inkluze dokázána.

Nechť $x \in X \setminus A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. Tedy $x \in X$, ale $x \notin A$ pro každou $A \in \mathcal{A}$. Takže $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Tudíž $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, čímž je završen důkaz druhé inkluze.

Druhé de Morganovo pravidlo lze dokázat obdobně. ■

1.4. Relace uspořádání a zobrazení

Relace uspořádání.

1.4.1. Definice. Binární relací rozumíme libovolnou množinu uspořádaných dvojic. Pokud R je binární relace a $[a, b] \in R$, pak říkáme, že prvek a je v relaci R s prvkem b . Často v tomto případě používáme zápis $a R b$.

Pokud binární relace R splňuje $R \subset A \times B$, pak říkáme, že R je **binární relací mezi prvky množin A a B** . Pokud $A = B$, pak říkáme, že R je **binární relací na A** .

1.4.2. Označení. Můžeme definovat i relace mezi více než dvěma prvky, ale v našem textu je nepoužijeme, a proto budeme místo slovního spojení „binární relace“ používat jen termín „relace“.

Existuje mnoho příkladů matematických objektů, které jsou relacemi. V tuto chvíli pro nás budou důležité dva speciální typy relací, totiž uspořádání a zobrazení. Následující definice nám pomůže zavést první z nich.

1.4.3. Definice. Nechť R je relace na množině A . Řekneme, že R je na A

- **reflexivní**, jestliže platí

$$\forall x \in A: [x, x] \in R,$$

- **symetrická**, jestliže platí

$$\forall x, y \in A: [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R,$$

- **tranzitivní**, jestliže platí

$$\forall x, y, z \in A: ([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R,$$

- **antisymetrická**, jestliže platí

$$\forall x, y \in A: [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R,$$

- **slabě antisymetrická**, jestliže platí

$$\forall x, y \in A: ([x, y] \in R \wedge [y, x] \in R) \Rightarrow x = y.$$

1.4.4. Definice. Necht R je relace na množině A . Řekneme, že R je na A

- **uspořádání** (někdy také **částečné uspořádání** či **neostré uspořádání**), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní,
- **lineární uspořádání**, jestliže jde o uspořádání a pro každé $x, y \in A$ platí $[x, y] \in R$ nebo $[y, x] \in R$.

1.4.5. (a) Právě definovaný pojem uspořádání je velmi abstraktní a používá se pro porovnávání velmi rozmanitých objektů mezi sebou. Uspořádání reálných čísel $\leq$ je jenom jedním z mnoha příkladů uspořádání. Podobně ostrá nerovnost mezi reálnými čísly je ostrým uspořádáním ve smyslu naší definice.

(b) Je-li uspořádání R na množině X lineární, pak je možné libovolné dva prvky mezi sebou porovnat pomocí uspořádání R . Uspořádání reálných čísel je příkladem lineárního uspořádání.

1.4.6 (uspořádání inkluzí). Necht X je množina a $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Pak relace

$$R = \{[A, B] \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}; A \subset B\}$$

je uspořádání na množině $\mathcal{A}$. Všechny tři vlastnosti z definice uspořádání snadno plynou z vlastností inkluze.

Pokud má X alespoň dva prvky a $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, pak toto uspořádání není na $\mathcal{A}$ lineární. Jestliže totiž existují $x, y \in X$, $x \neq y$, pak neplatí ani $\{x\} \subset \{y\}$ ani $\{y\} \subset \{x\}$.

1.4.7. Příklad. Na množině $\mathbb{N}^2$ definujeme **lexikografické uspořádání** $\leq_{\text{lex}}$ následujícím způsobem

$$[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2] \Leftrightarrow (n_1 < m_1 \vee (n_1 = m_1 \wedge n_2 \leq m_2)).$$

Ukažte, že $\leq_{\text{lex}}$ je uspořádání na $\mathbb{N}^2$.

Řešení. Reflexivita. Pro libovolné $[n_1, n_2] \in \mathbb{N}^2$ platí $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, neboť $n_1 = n_1$ a $n_2 \leq n_2$.

Slabá antisymetrie. Pokud $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a zároveň $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [n_1, n_2]$, pak nemůže platit $n_1 < m_1$ ani $m_1 < n_1$. Musí tedy platit $n_1 = m_1$. Pak ovšem platí $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq n_2$, a proto $n_2 = m_2$. Dokázali jsme tedy, že $[n_1, n_2] = [m_1, m_2]$.

Tranzitivita. Necht $[n_1, n_2], [m_1, m_2], [k_1, k_2] \in \mathbb{N}^2$ splňují $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [m_1, m_2]$ a $[m_1, m_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Z prvního vztahu plyne $n_1 \leq m_1$ a z druhého $m_1 \leq k_1$. Dostáváme tedy $n_1 \leq k_1$. Pokud platí dokonce $n_1 < k_1$, pak $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. Pokud $n_1 = k_1$, pak platí také $n_1 = m_1$. Musí tedy platit $n_2 \leq m_2$ a $m_2 \leq k_2$. Odtud plyne nerovnost $n_2 \leq k_2$. Tím je dokázán vztah $[n_1, n_2] \leq_{\text{lex}} [k_1, k_2]$. ♣

Nyní uvedeme několik základních pojmů, které souvisí s relací uspořádání.

1.4.8. Definice. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **maximálním** prvkem (**maximem**) množiny A , jestliže $x \in A$ a neexistuje $a \in A$ takové, že $x \leq a$ a $x \neq a$,
- **největším** prvkem množiny A , jestliže $x \in A$ a pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$.

Pojmy **minimální** prvek (**minimum**) množiny a **nejmenší** prvek množiny jsou definovány zřejmým způsobem.

1.4.9. V předchozí definici jsme použili symbol $\leq$, který se používá zejména pro označení uspořádání na reálných číslech. Zde jej pro názornost používáme k označení libovolné relace uspořádání.

1.4.10 (maximální versus největší). Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X , $A \subset X$ a $x \in A$. Jestliže je x největším prvkem A , potom je i maximálním prvkem A . Opačná implikace ale neplatí. Množina A může mít více maximálních prvků, které jsou ale relací $\leq$ neporovnatelné. Pokud je uvažované uspořádání lineární, pak je snadné ukázat, že pojmy maximální prvek a největší prvek splývají.

1.4.11. Definice. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $x \in X$ je

- **horní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A , jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A ,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A ,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

1.4.12. Definice. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Řekneme, že prvek $G \in X$ je **supremem množiny** A , jestliže platí:

- G je horní závorou množiny A ,
- je-li prvek $G' \in X$ horní závorou množiny A , potom $G \leq G'$.

Řekneme, že prvek $g \in X$ je **infimem množiny** A , jestliže platí

- g je dolní závorou množiny A ,
- je-li prvek $g' \in X$ dolní závorou množiny A , potom $g' \leq g$.

1.4.13. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$. Podle předchozí definice je supremum množiny A její nejmenší horní závorou a infimum je její největší dolní závorou. Supremum a infimum množiny A nemusejí existovat, pokud však existují, jsou určena jednoznačně.

Odvoďme toto pozorování například pro infimum, v případě suprema je možné postupovat obdobně. Necht g_1 a g_2 jsou infima množiny $A \subset X$ vzhledem k uspořádání $\leq$ na množině X . Potom g_1 i g_2 jsou dolní závory množiny A . Podle

vlastnosti (b) z definice infima platí $g_1 \leq g_2$ a také $g_2 \leq g_1$. Ze slabé antisymetrie relace uspořádání pak plyne $g_1 = g_2$.

Pokud supremum množiny A (vzhledem k uspořádání $\leq$) existuje, značíme jej $\sup A$. Pokud existuje infimum množiny A , značíme jej $\inf A$.

Supremum a infimum budeme používat zejména při studiu podmnožin reálných čísel, pro ilustraci však uvedme následující příklad, který využívá lexikografického uspořádání dvojic přirozených čísel.

1.4.14. Příklad. Necht $\leq_{\text{lex}}$ je lexikografické uspořádání na množině $\mathbb{N}^2$ (vizte Příklad 1.4.7). Dokažte, že supremum množiny $A = \{[1, n] \in \mathbb{N}^2; n \in \mathbb{N}\}$ je rovno prvku $[2, 1]$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ podle definice platí $[1, n] \leq_{\text{lex}} [2, 1]$, čímž je ověřena podmínka (a) z definice suprema. Uvažujme prvek $[a, b] \in \mathbb{N}^2$, který je horní závorou množiny A . Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí buď $1 < a$, nebo $1 = a$ a $n \leq b$. Druhá možnost však nemůže platit pro každé n , neboť přirozené číslo $b + 1$ nesplňuje nerovnost $b + 1 \leq b$. Platí tedy $1 < a$, neboli $2 \leq a$. Pak ovšem opět podle definice uspořádání $\leq_{\text{lex}}$ dostáváme $[2, 1] \leq_{\text{lex}} [a, b]$. Tím je ověřena i podmínka (b) z definice suprema. ♣

1.4.15. Věta. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X , $A \subset X$ je neprázdná množina a infimum a supremum množiny A existují. Potom platí $\inf A \leq \sup A$.

Důkaz. Množina A je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in A$. Potom platí $\inf A \leq a$, neboť $\inf A$ je dolní závorou A . Dále platí $a \leq \sup A$, neboť $\sup A$ je horní závorou A . Odtud díky tranzitivitě uspořádání dostáváme nerovnost $\inf A \leq \sup A$. ■

1.4.16. Věta. Necht $\leq$ je relace uspořádání na množině X a $A \subset X$.

- (a) Necht existuje největší prvek A . Pak existuje i supremum A a je rovno největšímu prvku A .
- (b) Necht existuje nejmenší prvek A . Pak existuje i infimum A a je rovno nejmenšímu prvku A .

Důkaz. (a) Největší prvek A označme G . Pak je G horní závorou A , a tedy je splněna podmínka (a) z Definice 1.4.12. Předpokládejme, že $G' \in X$ je horní závorou A . Poněvadž $G \in A$, platí $G \leq G'$. Je tedy splněna i podmínka (b) z Definice 1.4.12. Proto je G supremem množiny A .

(b) Tvrzení lze dokázat obdobně. ■

K právě zavedeným pojmům suprema a infima se vrátíme v Oddílu 1.5, kde budou uvedeny další ilustrační příklady.

Relace zobrazení.

1.4.17. Definice. Binární relaci F nazýváme **zobrazením**, pokud splňuje

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2: ([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Řekneme, že zobrazení F je **zobrazení z množiny A do množiny B** , jestliže platí $F \subset A \times B$.

1.4.18. Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B , pak podle definice pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, pak je tedy určeno jednoznačně a značíme je $F(x)$. Někdy píšeme jen Fx .

1.4.19. Definice. Necht F je zobrazení.

- **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{D}(F) = \{x; \exists y: [x, y] \in F\}.$$

- **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\mathcal{H}(F) = \{y; \exists x: [x, y] \in F\}.$$

1.4.20. (a) Necht F je zobrazení. Všimněme si, že definiční obor F je množina všech x , pro které je definován prvek $F(x)$, a obor hodnot je množina všech y , pro která existuje x takové, že prvek $F(x)$ je definován a platí $F(x) = y$.

(b) Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B , pak je F také zobrazení z množiny C do množiny D , pokud $F \subset C \times D$, neboli $\mathcal{D}(F) \subset C$ a $\mathcal{H}(F) \subset D$.

Například zobrazení F , které každému kladnému číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje reálné číslo $\frac{1}{x}$, je zobrazením z množiny kladných reálných čísel do množiny kladných reálných čísel, ale také zobrazením z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

1.4.21 (zobrazení jako přiřazení). Zobrazení jsme definovali pomocí pojmu relace. Při tomto přístupu ztotožňujeme pojem zobrazení a pojem grafu zobrazení. V matematické analýze však často chápeme zobrazení F z množiny A do množiny B jako *přiřazení*, tj. prvkům x z jisté podmnožiny A je přiřazen jednoznačně určený prvek $F(x)$ z množiny B . V takovém případě pak zobrazení a jeho graf chápeme jako dva různé objekty, které si však vzájemně jednoznačně odpovídají, přičemž **grafem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\text{graf}(F) = \{[x, y] \in A \times B; x \in \mathcal{D}(F) \wedge y = F(x)\}.$$

1.4.22. Označení. Necht A a B jsou množiny a F je zobrazení.

(a) Pak symbol $F: A \rightarrow B$ znamená, že F je zobrazení z množiny A do množiny B a $\mathcal{D}(F) = A$. Takové zobrazení F nazýváme také **zobrazením množiny A do množiny B** .

Narozdíl od zobrazení z množiny A do množiny B , kde definiční obor je pouze podmnožinou množiny A , je zobrazení množiny A do množiny B definováno právě ve všech bodech množiny A .

(b) Pokud je $B = \mathbb{R}$, pak místo termínu zobrazení používáme termín **funkce**.

1.4.23. Zobrazení $F: A \rightarrow B$ často definujeme tak, že pro každé $x \in A$ určíme prvek $F(x) \in B$. V takovém případě někdy používáme zápis $x \mapsto F(x)$, $x \in A$. Je

třeba si uvědomit, že dva různé předpisy mohou definovat stejné zobrazení. Tak je tomu například u následujících dvou předpisů:

$$\begin{aligned} x &\mapsto (x+1)^2, & x &\in \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2 + 2x + 1, & x &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.4.24. Definice. Necht A, B jsou množiny a f je zobrazení.

- **Obrazem množiny A** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{y \in \mathcal{H}(f); \exists x \in \mathcal{D}(f) \cap A: f(x) = y\},$$

kterou značíme $f(A)$.

- **Vzorem množiny B** při zobrazení f rozumíme množinu

$$\{x \in \mathcal{D}(f); f(x) \in B\},$$

kterou značíme $f^{-1}(B)$.

1.4.25. Necht X je množina a $A \subset X$. **Charakteristickou funkcí** množiny A nazýváme funkci $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in A, \\ 0, & \text{pokud } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Pro právě uvedenou funkci platí $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ a $\chi_A^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$. Charakteristická funkce je v řadě situací užitečným nástrojem.

1.4.26. Definice. Řekneme, že zobrazení f

- je **prosté**, jestliže platí

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(f): f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

- je **na množinu B** , jestliže platí $\mathcal{H}(f) = B$,
- je **bijekcí množiny A na množinu B** , jestliže $\mathcal{D}(f) = A$ a jde o prosté zobrazení na B .

1.4.27 (alternativní terminologie). Prostému zobrazení také říkáme **injekce** nebo **injektivní zobrazení**. Zobrazení, které je zobrazením na množinu B , nazýváme i **surjekcí na B** a o bijekci množiny A na množinu B hovoříme někdy jako o **vzájemně jednoznačném zobrazení množiny A na množinu B** .

1.4.28. Necht $f: A \rightarrow B$ je prosté zobrazení. Potom přímo z definic dostáváme, že f je bijekce množiny A na množinu $f(A)$.

1.4.29. Definice. Necht f je zobrazení a C je množina. Pak zobrazení definované předpisem $x \mapsto f(x)$, $x \in C \cap \mathcal{D}(f)$, nazýváme **restrikcí** nebo **zúžením** zobrazení f na množinu C a značíme jej $f|_C$.

1.4.30. Definice. Necht f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením (složením zobrazení) f a g** , přičemž g nazýváme **vnějším zobrazením** a f nazýváme **vnitřním zobrazením**.

1.4.31. Definice. Necht $f: A \rightarrow B$ je prosté zobrazení. Pak zobrazení $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ definované pro $y \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $x \in A$ je jednoznačně určeno vztahem $y = f(x)$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f .

1.4.32. K zobrazení, které není prosté, nelze definovat inverzní zobrazení. Příkladem je funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

1.4.33 (sjednocení a průnik indexovaného systému). Necht X a I jsou množiny a pro každé $\alpha \in I$ je definována množina $A_\alpha \subset X$. Máme tedy dáno zobrazení $\alpha \mapsto A_\alpha$ množiny I do potenční množiny $\mathcal{P}(X)$. Takové zobrazení nazýváme **indexovaným systémem množin** a značíme ho symbolem $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Uvažujme systém $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X); \exists \alpha \in I: A = A_\alpha\}$. Pak množinu $\bigcup \mathcal{A}$ označujeme také symbolem $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Pokud je navíc I neprázdná množina, pak množinu $\bigcap \mathcal{A}$ označujeme $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Se zobrazeními z následující definice budeme často pracovat.

1.4.34. Definice. Necht A je neprázdná množina.

(a) **Konečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, do množiny A . Pokud $k \mapsto a_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, je takové zobrazení, pak tuto posloupnost značíme $\{a_k\}_{k=1}^n$. Prvek a_k nazýváme **k -tým členem** této posloupnosti.

(b) **Nekonečnou posloupností** prvků A rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny A . Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, případně jen $\{a_n\}$. Prvek a_n nazýváme **n -tým členem** této posloupnosti.

1.4.35 (rekurentně zadaná posloupnost). Necht A je neprázdná množina a $k \in \mathbb{N}$. Jsou-li dány členy $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ a předpis, podle kterého je možné pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > k$, určit hodnotu $a_n \in A$ na základě hodnot $a_1, \dots, a_{n-1}$, pak je možné definovat posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$. Takovému zadání posloupnosti říkáme **rekurentní**. Existence a jednoznačnost takto zadané posloupnosti je ověřena ve Větě B.5.44.

Nejčastější způsob zadání rekurentní posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ vypadá následovně. Je dána neprázdná množina A a zobrazení $g: A \rightarrow A$. Prvek $a_1 \in A$ je dán a $a_n = g(a_{n-1})$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Příkladem takové posloupnosti je posloupnost definována předpisem $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, neboť stačí položit $A = \mathbb{R}$ a $g(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

1.4.36. V paragrafu 1.2.2 jsme si přiblížili význam termínu axiom. Na tomto místě je vhodné uvést jeden z axiomů teorie množin pro jeho vztah k pojmu zobrazení. Jde o **axiom výběru** a zde je jeho formulace:

Pro každý indexovaný systém neprázdných množin $(C_b)_{b \in I}$ existuje zobrazení $\varphi: I \rightarrow \bigcup_{b \in I} C_b$ takové, že pro každé $b \in I$ platí $\varphi(b) \in C_b$.

Axiom výběru říká, že existuje zobrazení φ , které pro každé $b \in I$ vybere hodnotu $\varphi(b)$ z neprázdné množiny C_b . Výrok působí samozřejmě, některé jeho důsledky však již tak samozřejmé nejsou. Další vysvětlení je uvedeno v Dodatku A. Axiom výběru budeme často používat bez výslovného upozornění podobně jako další axiomy teorie množin.

1.4.37 (konstrukce posloupnosti pomocí axiomu výběru). Necht A je neprázdná množina. Posloupnost prvků množiny A je možné konstruovat také takto. Prvek a_1 zvolíme z jisté neprázdné podmnožiny A_1 množiny A . Máme-li zkonstruovány prvky $a_1, \dots, a_n$, určíme v závislosti na těchto prvcích neprázdnou množinu $A_{n+1} \subset A$ a z ní vybereme prvek a_{n+1} . Množiny $A_n, n \in \mathbb{N}$, ze kterých vybíráme členy naší posloupnosti, závisí na konkrétním cíli, pro který posloupnost konstruujeme. Tímto způsobem skutečně obdržíme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Není to ale tak jednoduché, protože přesné odůvodnění existence posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyžaduje použití axiomu výběru. Více naleznete v Dodatku A.

1.5. Množina reálných čísel

Vlastnost existence suprema.

1.5.1. Číselné obory přirozených, celých, racionálních a reálných čísel mají pro další výklad zásadní význam. Jejich *přesná* konstrukce však není snadná, a proto ji provedeme až v Dodatku B. V dalším výkladu vystačíme se středoškolskými pojmy, které doplníme o vlastnost existence suprema. V Definicích 1.4.11 a 1.4.12 jsme zavedli pojem horní závory, dolní závory, omezenosti množiny a pojmy suprema a infima pro obecné uspořádání. Nyní tyto pojmy použijeme pro množinu reálných čísel s uvedeným uspořádáním $\leq$. Vlastnost **existence suprema** reálných čísel lze pak formulovat následovně.

Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum. (1.8)

Množina reálných čísel spolu s jejím uspořádáním a s operacemi sčítání a násobení je zkonstruována tak, že právě uvedenou vlastnost má. Vlastnost suprema je důležitá, neboť některé hlubší věty o reálných číslech bychom bez ní nemohli dokázat.

Vlastnosti početních operací a uspořádání. V tomto textu předpokládáme znalost základních pravidel pro práci s uspořádáním reálných čísel a s operacemi sčítání a násobení. V dalším si však některé výsledky připomeneme a také zavedeme značení, které budeme používat.

1.5.2. Označení. (a) Necht $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\sum_{i=m}^n a_i$ značíme součet všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\sum_{i=m}^n a_i = 0.$$

(b) Necht $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom symbolem $\prod_{i=m}^n a_i$ značíme součin všech reálných čísel $a_m, \dots, a_n$, tedy

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Je-li $m > n$, pak klademe

$$\prod_{i=m}^n a_i = 1.$$

Připomeňme ještě, že pokud $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^n značí součin

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a \cdot a}_{n \text{ krát}}.$$

Pokud $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, pak symbol a^{-n} značí součin

$$\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1} \cdot a^{-1}}_{n \text{ krát}}.$$

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme symbol a^0 jako 1. Zde nedefinujeme novou početní operaci, ale pouze užitečnou zkratku, která zjednodušuje zápis některých výrazů. Toto je třeba mít na paměti zejména v případě, kdy $a = 0$.

(c) Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definujeme symbol $n!$, čteme n **faktoriál**, takto: $0! = 1$ a $n! = n \cdot (n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pokud $n \in \mathbb{N}$, pak je číslo $n!$ součinem čísel $1, \dots, n$.

(d) Pro $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$, definujeme **kombinační číslo** $\binom{n}{k}$, čteme n **nad** k , předpisem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

(e) Necht $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Potom zápis $a_1 \leq \dots \leq a_n$ znamená, že platí nerovnosti $a_1 \leq a_2$, $a_2 \leq a_3$, $\dots$, $a_{n-1} \leq a_n$. Obdobné značení používáme i pro další typy nerovností.

(f) V dalším výkladu budeme používat i zápisy $x > y$ a $x \geq y$, které po řadě znamenají totéž co $y < x$ a $y \leq x$.

1.5.3. Přesně vzato jsou definice součtu a součinu konečně mnoha reálných čísel induktivní. Máme-li definován součet (součin) n reálných čísel, můžeme definovat součet (součin) $n+1$ reálných čísel. Z těchto definic by měly také vycházet důkazy běžných pravidel pro počítání s konečnými součty a součiny, jako je například vzorec

$$\sum_{n=n_1}^{n_3} a_n = \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} a_n,$$

kde $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ jsou přirozená čísla a $a_{n_1}, \dots, a_{n_3}$ jsou reálná čísla. Zde však volíme výše uvedený neformální výklad, neboť jeho přesnost je pro náš text dostačující.

Uvedme následující pozorování, která jsou užitečná při práci se součty reálných čísel.

1.5.4 (posun sčítacího indexu). Necht' $m, n, p \in \mathbb{Z}, m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p},$$

neboť v obou součtech sčítáme reálná čísla $a_m, \dots, a_n$.

1.5.5 (teleskopická suma). Necht' $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$, a pro každé $i \in \{m, \dots, n\}$ je $a_i \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{i=m}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_m,$$

neboť

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) &= \sum_{i=m}^{n-1} a_{i+1} - \sum_{i=m}^{n-1} a_i = \sum_{i=m+1}^n a_i - \sum_{i=m}^{n-1} a_i \\ &= \left(a_n + \sum_{i=m+1}^{n-1} a_i \right) - \left(a_m + \sum_{i=m+1}^{n-1} a_i \right) = a_n - a_m. \end{aligned}$$

Méně formálně lze platnost dokazované rovnosti nahlédnout i tak, že uvažovanou sumu rozepíšeme po jednotlivých členech a všimneme si, že kromě členů a_n a $-a_m$ se v rozpisu vyskytuje vždy $-a_i$ a a_i , $i = m+1, \dots, n-1$.

1.5.6. Věta (binomická věta). Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (1.9)$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 0$ a libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1, \\ \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k &= \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme (1.9) pro $n = 0$.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ a vztah (1.9) platí. Pak díky indukčnímu předpokladu a algebraickou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}. \end{aligned}$$

Podle pozorování v 1.5.4 obdržíme

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k,$$

a tedy

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení nyní plyne z následujícího vztahu, který platí pro každé $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k} \right) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n+1-k)k} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

■

Následující příklad obsahuje zobecnění známých vztahů $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

1.5.7. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}.$$

Řešení. Vztah odvodíme úpravou pravé strany:

$$\begin{aligned} (a-b) \cdot \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} &= \sum_{k=1}^n a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^k \\ &= a^n + \sum_{k=2}^n a^{n+1-k} b^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - b^n \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k - b^n \quad (\text{podle 1.5.4}) \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$



1.5.8. Příklad. Necht $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dokažte, že potom platí

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Řešení. Použijeme Příklad 1.5.7 pro $a = 1, b = q$ a na místo čísla n dosadíme $n + 1$. Pak s pomocí 1.5.4 obdržíme

$$1 - q^{n+1} = (1 - q) \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = (1 - q) \sum_{k=0}^n q^k.$$

Odtud již snadno plyne dokazovaný vztah, neboť $1 - q \neq 0$, a tedy můžeme obě strany rovnosti vydělit číslem $1 - q$. 

Absolutní hodnota reálného čísla.

1.5.9. Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

1.5.10. Není těžké si rozmyslet, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

- (a) $|x| \geq 0$,
- (b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (c) $|x| = |-x|$,
- (d) $||x|| = |x|$,
- (e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}: |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$.

Geometricky můžeme absolutní hodnotu čísla x interpretovat jako vzdálenost bodu x od počátku na reálné ose. Výraz $|x - y|$ pak nazveme **vzdáleností bodu x od bodu y** .

Následující nerovnost budeme při práci s absolutní hodnotou často používat. Její název pochází z jejího zobecnění pro komplexní čísla, které vyjadřuje nerovnost mezi součtem délek dvou stran trojúhelníka a délkou zbývající strany.

1.5.11. Věta (trojúhelníková nerovnost). Pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (1.10)$$

Důkaz. Necht $a, b \in \mathbb{R}$. Z definice absolutní hodnoty vyplývá, že platí $a \leq |a|$ a $b \leq |b|$. Odtud dostáváme $a + b \leq |a| + |b|$. Opět z definice absolutní hodnoty snadno vyplývá, že platí $-a \leq |a|$ a také $-b \leq |b|$. Odtud dostáváme $-(a + b) \leq |a| + |b|$. Podle definice absolutní hodnoty platí $|a + b| = a + b$ nebo $|a + b| = -(a + b)$. V obou případech tedy dostáváme $|a + b| \leq |a| + |b|$, čímž je nerovnost (1.10) dokázána. 

1.5.12. Důsledek. (a) Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad (1.11)$$

(b) Pro každá $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|. \quad (1.12)$$

Důkaz. (a) Necht $x, y \in \mathbb{R}$. Položme v (1.10) nejprve $a = y$, $b = x - y$. Obdržíme $|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y|$. Platí tedy $|x| - |y| \leq |x - y|$. V (1.10) dále položíme $a = x$, $b = y - x$. Dostaneme $|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$. Platí tedy $-(|x| - |y|) \leq |x - y|$. Z obdržených nerovností a definice absolutní hodnoty již plyne (1.11).

(b) V (1.10) položíme $a = x - z$, $b = z - y$, a dostaneme požadovanou nerovnost. ■

1.5.13. Poznámka. Někdy bývá trojúhelníkovou nerovností nazývána nerovnost (1.12).

1.5.14. Lemma. Necht $a, b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, platí $|a - b| < K\varepsilon$, potom $a = b$.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že ačkoli jsou podmínky lemmatu pro reálná čísla a, b splněny, jsou čísla a a b různá. Předpokládejme nejprve, že $a > b$. Položíme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(a - b)$. Číslo ε je kladné, a proto podle předpokladu platí $0 < |a - b| < K\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$. Odtud vyplývá $0 < a - b < \frac{1}{2}(a - b)$, což je spor. Pokud $a < b$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(b - a)$ a spor obdržíme obdobně jako v předchozím případě. ■

1.5.15. Lemma 1.5.14 je užitečným nástrojem jak dokázat rovnost dvou reálných čísel. Místo, abychom dokazovali rovnost dvou čísel přímo, dokážeme, že rozdíl uvažovaných čísel v absolutní hodnotě je menší než libovolné kladné reálné číslo.

Další vlastnosti suprema a infima.

1.5.16. Uspořádání $\leq$ na množině $\mathbb{R}$ je lineární, a proto je číslo $G \in \mathbb{R}$ supremem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

- (a) G je horní závorou množiny M ,
- (b) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \exists x \in M: G' < x$.

Pokud je totiž G supremem množiny M , pak je G horní závorou M , a tedy splňuje (a). Jestliže $G' \in \mathbb{R}, G' < G$, potom G' není horní závorou M . Odtud plyne, že existuje $x \in M$ takové, že neplatí $x \leq G'$. Máme tedy $x \neq G'$ a díky linearitě uspořádání $\leq$ platí $G' \leq x$. Dohromady tedy máme $G' < x$, čímž je ověřena podmínka (b).

Nyní předpokládejme, že $G \in \mathbb{R}$ splňuje podmínky (a) a (b). Potom je G horní závorou množiny M . Předpokládejme, že $G' \in \mathbb{R}$ je horní závorou M . Chceme ukázat, že platí $G \leq G'$. Předpokládejme, že tomu tak není. Potom díky linearitě uspořádání $\leq$ dostáváme $G' < G$. Podle vlastnosti (b) existuje $x \in M$ takové, že $G' < x$, což je ovšem spor s předpokladem, že G' je horní závorou množiny M .

Obdobně číslo $g \in \mathbb{R}$ je infimem množiny $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když platí

- (c) g je dolní závorou M ,
 (d) $\forall g' \in \mathbb{R}, g < g' \exists x \in M: x < g'$.

1.5.17. Věta (existence infima). Necht $M \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená neprázdná množina. Potom existuje infimum množiny M a při označení $-M = \{x \in \mathbb{R}; -x \in M\}$ platí $\inf M = -\sup(-M)$.

Důkaz. Množina $-M$ je zřejmě neprázdná. Necht $K \in \mathbb{R}$ je dolní závorou množiny M . Pro každé $x \in -M$ platí $-x \in M$, takže $K \leq -x$, tedy $x \leq -K$. Odtud plyne, že $-K$ je horní závorou množiny $-M$. Množina $-M$ je tedy shora omezená. Z (1.8) plyne existence suprema množiny $-M$, které označíme symbolem G . Dokážeme, že prvek $g = -G$ je infimem množiny M tak, že ověříme podmínky (c) a (d) z charakterizace infima v 1.5.16.

Pro každé $x \in M$ platí $-x \in -M$, tedy $-x \leq G$, takže $g \leq x$. Číslo g je proto dolní závorou množiny M . Tím jsme ověřili podmínku (c). Předpokládejme, že $g' \in \mathbb{R}$ a $g < g'$. Položme $G' = -g'$. Potom $G' < G$, a z vlastnosti (b) v 1.5.16 tedy vyplývá, že existuje $y \in -M$ takové, že $G' < y$, takže $-y < g'$. Protože $-y \in M$, ověřili jsme i podmínku (d) v 1.5.16. Tím je důkaz proveden. ■

1.5.18. Lemma. Necht $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné množiny splňující

$$\forall a \in A \forall b \in B: a \leq b.$$

Pak existuje $\sup A$ a $\inf B$ a platí $\sup A \leq \inf B$.

Důkaz. Vezměme $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$ libovolné. Podle předpokladu je a_0 dolní závorou B a b_0 horní závorou A . Díky neprázdnosti obou množin tedy existuje $\sup A$ a $\inf B$. Protože každé $b \in B$ je horní závorou A , platí pro každé $b \in B$ nerovnost $\sup A \leq b$. Tedy $\sup A$ je dolní závorou B , z čehož plyne $\sup A \leq \inf B$. ■

1.5.19. Definice. Necht f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **shora omezená** na M , jestliže množina $f(M)$ je shora omezená,
- **zdola omezená** na M , jestliže množina $f(M)$ je zdola omezená,
- **omezená** na M , jestliže množina $f(M)$ je omezená,
- **konstantní** na M , jestliže pro všechna $x, y \in M$ platí $f(x) = f(y)$.

1.5.20 (algebraické operace s funkcemi). Necht f a g jsou funkce s definičním oborem M a $c \in \mathbb{R}$. Pak definujeme funkce $f + g$, fg , cf s definičním oborem rovným M předpisy

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ fg(x) &= f(x)g(x), \\ cf(x) &= cf(x).\end{aligned}$$

Je-li $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in M$, pak definujeme funkci f/g s definičním oborem rovným M předpisem

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1.5.21. Věta. Necht M je neprázdná množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce.

(a) Jestliže f a g jsou shora omezené, potom

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

(b) Jestliže f a g jsou zdola omezené, potom

$$\inf(f + g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M).$$

Důkaz. (a) Množiny $f(M)$ a $g(M)$ jsou neprázdné a shora omezené, a proto existují jejich suprema, která označíme po řadě A a B . Necht $x \in M$. Potom z definice suprema plyne $f(x) \leq A$ a $g(x) \leq B$, a tedy také $f(x) + g(x) \leq A + B$. Protože $x \in M$ bylo zvoleno libovolně, je $A + B$ horní závorou množiny $(f + g)(M)$. Odtud plyne tvrzení (a).

(b) Tvrzení lze dokázat obdobně jako (a). ■

Maximum a minimum množiny.

1.5.22. Označení. Necht $A \subset \mathbb{R}$. Standardní uspořádání reálných čísel je lineární, a proto pojem největšího prvku množiny A a maximálního prvku množiny A splývají. Pokud má A maximální prvek, pak je určen jednoznačně a budeme ho značit $\max A$. Obdobně je tomu s nejmenším prvkem a minimálním prvkem množiny A , který budeme značit $\min A$, pokud existuje.

1.5.23. Příklad. Necht $x, y \in \mathbb{R}$ a $A = \{x, y\}$. Pak existuje maximum i minimum množiny A .

Řešení. Budeme postupovat rozbořem případů. Z linearitě uspořádání $\mathbb{R}$ platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V prvním případě je zřejmé

$$\max\{x, y\} = y, \quad \min\{x, y\} = x,$$

v případě druhém platí

$$\max\{x, y\} = x, \quad \min\{x, y\} = y.$$

♣

1.5.24. Věta. Necht $M \subset \mathbb{N}$ je neprázdná množina. Potom existuje minimum M .

Důkaz. Pomocné tvrzení. Nejprve matematickou indukcí pro každé $n \in \mathbb{N}$ dokážeme, že pokud je množina $M \cap \{1, \dots, n\}$ neprázdná, pak existuje její minimum. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme platnost tvrzení pro n a neprázdnot množiny $M \cap \{1, \dots, n+1\}$. Pokud navíc $M \cap \{1, \dots, n\} \neq \emptyset$, pak podle indukčního předpokladu existuje $\min(M \cap \{1, \dots, n\})$ a platí

$$\min(M \cap \{1, \dots, n+1\}) = \min(M \cap \{1, \dots, n\}).$$

Pokud $M \cap \{1, \dots, n\} = \emptyset$, potom $M \cap \{1, \dots, n+1\} = \{n+1\}$ a

$$\min(M \cap \{1, \dots, n+1\}) = \{n+1\}.$$

Tím je pomocné tvrzení dokázáno.

Vlastní důkaz. Množina M je neprázdná, a proto existuje přirozené číslo $n \in M$. Potom podle pomocného tvrzení existuje $\min(M \cap \{1, \dots, n\})$ a protože zřejmě platí $\min M = \min(M \cap \{1, \dots, n\})$, je tím tvrzení dokázáno. ■

Intervaly reálných čísel.

1.5.25. Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujme množiny

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, & [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, & [a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, & [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}, \\ (-\infty, \infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pak množiny (a, b) , $(-\infty, b)$, (a, ∞) a $(-\infty, \infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a, b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem**. Interval, který je prázdný nebo obsahuje právě jeden bod, nazýváme **degenerovaný**, ostatní intervaly nazýváme **nede degenerované**. Význam pojmu (**pravý** nebo **levý**) **krajní** bod intervalu je zřejmý. Bod, který patří do intervalu I , ale není krajním bodem I , nazýváme **vnitřním** bodem intervalu I .

1.5.26. Prázdná množina je také interval, neboť $(a, a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je interval, neboť $[a, a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Následující lemma udává užitečnou charakterizaci intervalu. Chceme-li ukázat, že jistá množina je interval, stačí ověřit podmínku (1.13), která říká, že množina s každými dvěma svými body x a y obsahuje i všechny body mezi x a y . Není tedy třeba hledat krajní body intervalu. Lemma použijeme například v důkazu Věty 4.3.8.

1.5.27. Lemma. Necht $M \subset \mathbb{R}$. Množina M je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in M \quad \forall z \in \mathbb{R}: (x < z < y \Rightarrow z \in M). \quad (1.13)$$

Řada matematických vět má tvar ekvivalence. Jejich důkaz často vedeme tak, že dokážeme postupně dvě implikace. Pro zjednodušení a zpřehlednění zápisu budeme občas používat symboly $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$, které uvedou příslušné části důkazu.

Důkaz Lemmatu 1.5.27. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $M = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Pro ověření podmínky (1.13) vezměme $x, y \in M$ a $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x < z < y$. Potom platí $a < x < z < y < b$, a tedy $z \in M$. Tím je podmínka (1.13) po uvedený typ intervalu ověřena. Pro ostatní typy intervalů je ověření obdobné.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že množina M splňuje (1.13). Pokud $M = \emptyset$, pak je M interval. Není-li M omezená zdola ani shora, pak $M = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li totiž libovolné číslo $z \in \mathbb{R}$, pak k němu nalezneme $x \in M$, $x < z$, neboť M není zdola omezená, a také $y \in M$, $z < y$, protože M není shora omezená. Podle předpokladu tedy platí $z \in M$.

Je-li M omezená a neprázdná, pak klademe $G = \sup M$ a $g = \inf M$. Platí $(g, G) \subset M$. Je-li totiž $z \in (g, G)$, pak podle definice infima existuje takové $x \in M$, že $x < z$, podobně podle definice suprema existuje $y \in M$, $z < y$. Podle našeho předpokladu je tedy $z \in M$. Dále je $M \subset [g, G]$, neboť g je dolní závorou M a G je horní závorou M . Množina M je tedy interval s krajními body g a G , přičemž každý z nich může, ale nemusí, patřit do M .

V ostatních případech, kdy M je omezená pouze zdola a kdy M je omezená pouze shora, lze tvrzení dokázat obdobně. ■

Celá část reálného čísla.

1.5.28. Lemma. Necht $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$. Potom $n + 1 \leq m$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz. Jelikož $n < m$, je $m - n$ kladné celé číslo. Tedy $m - n$ je přirozené číslo, a proto $1 \leq m - n$. Tím je tvrzení dokázáno. ■

1.5.29. Věta (Archimédova⁴ vlastnost reálných čísel). Necht $x \in \mathbb{R}$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq x$. Potom je množina $\mathbb{N}$ neprázdná a shora omezená. Existuje tedy číslo $G \in \mathbb{R}$, které je supremem množiny $\mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n + 1$ opět přirozené číslo, a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n + 1 \leq G$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq G - 1$. Číslo $G - 1$ je tedy horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je ovšem ve sporu s definicí G , které je nejmenší horní závorou $\mathbb{N}$. ■

1.5.30. Věta (celá část). Necht $x \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

Důkaz. Existence. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z}; x < n\}$. Číslo x je dolní závorou množiny M , a proto je M zdola omezená. Podle Věty 1.5.29 je M neprázdná. Existuje tedy číslo $g \in \mathbb{R}$, které je infimem množiny M . Podle definice infima existuje $k' \in M$ takové, že $k' < g + 1$. Platí tedy $k' - 1 < g$, a proto $k' - 1 \notin M$. Položme $k = k' - 1$. Potom $k \in \mathbb{Z}$, neboť $k' \in M$. Platí $k = k' - 1 \leq x$, neboť $k' - 1 \notin M$. Dále máme $k' \in M$, a proto $k + 1 = k' > x$. Číslo k má tedy požadované vlastnosti.

Jednoznačnost. Pro spor předpokládejme, že existují $k, j \in \mathbb{Z}$ taková, že $j \neq k$, $k \leq x < k + 1$ a $j \leq x < j + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $j < k$. Potom $k \leq x$ a $x - 1 < j$, takže $0 < k - j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $0 < k - j$, plyne z Lemmatu 1.5.28, že $1 \leq k - j$. To je spor s tím, že $k - j < 1$. ■

1.5.31. Definice. Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k + 1$ nazýváme **celou částí** čísla x . Podle Věty 1.5.30 je k určeno jednoznačně existuje a značíme ho $[x]$.

1.5.32. Věta (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $y \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < y < b$.

⁴Archimédés ze Syrakus (287 př. n. l.-212 př. n. l.)

Důkaz. Podle Věty 1.5.29 existuje ke kladnému číslu $\frac{1}{b-a}$ číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{1}{b-a} < n$. Je tedy $na + 1 < nb$. Položme $y = \frac{[na]+1}{n}$. Potom $y \in \mathbb{Q}$ a podle Věty 1.5.30 platí

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na] + 1}{n} \leq \frac{na + 1}{n} < \frac{nb}{n} = b,$$

takže $a < y < b$. ■

1.6. Konečné a spočetné množiny

Porovnávání mohutností množin. Pojem „počet prvků množiny“ je možné rozšířit i na případy, kdy je uvažovaná množina nekonečná. Potom místo tohoto pojmu používáme pojem „mohutnost množiny“. Jeho přesné zavedení však přesahuje rámec našeho textu a je možné jej nalézt například v knize [3]. V tomto oddílu pouze ukážeme jeden ze způsobů jak porovnávat množiny co do velikosti, který s pojmem mohutnosti pracuje implicitně. Podáme také přesnou definici konečných a nekonečných množin.

1.6.1. Definice. (a) Řekneme, že množina A **má stejnou mohutnost** jako množina B , jestliže existuje bijekce A na B . Značíme $A \approx B$.

(b) Řekneme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B . Značíme $A \preceq B$.

(c) Řekneme, že množina A **má menší mohutnost než množina** B , jestliže existuje prosté zobrazení A do B a přitom A nemá stejnou mohutnost jako B . Značíme $A < B$.

1.6.2. Definice. Necht A je množina. Zobrazení $\text{Id}_A: A \rightarrow A$ definované předpisem $\text{Id}_A(a) = a, a \in A$, nazýváme **identickým zobrazením**.

1.6.3. Věta. Necht A, B, C jsou množiny. Potom platí

- (a) $A \preceq A$,
- (b) pokud $A \preceq B$ a $B \preceq C$, pak $A \preceq C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je zřejmě prosté zobrazení množiny A do množiny A , a tedy $A \preceq A$.

(b) Podle předpokladu existují prostá zobrazení $f: A \rightarrow B$ a $g: B \rightarrow C$. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C . Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ pro nějaká $x, y \in A$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté, což dokazuje vztah $A \preceq C$. ■

1.6.4. Věta. Necht A, B, C jsou množiny. Potom platí

- (a) $A \approx A$,
- (b) pokud $A \approx B$, pak $B \approx A$,

(c) pokud $A \approx B$ a $B \approx C$, pak $A \approx C$.

Důkaz. (a) Identické zobrazení Id_A je bijekce množiny A na množinu A , a proto $A \approx A$.

(b) Předpokládejme, že f je bijekce množiny A na množinu B . Zobrazení f je prosté, a proto existuje zobrazení f^{-1} . Definičním oborem zobrazení f^{-1} je množina B a obor hodnot f^{-1} je roven A . Zobrazení $f^{-1}: B \rightarrow A$ je tedy zobrazením na A . Pokud pro $x, y \in B$ platí $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, potom $x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y$, a zobrazení f^{-1} je tedy prosté. Dostáváme tak, že zobrazení f^{-1} je bijekce, a proto má množina B stejnou mohutnost jako množina A , tj. $B \approx A$.

(c) Podle předpokladu existuje bijekce f množiny A na množinu B a bijekce g množiny B na množinu C . Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C . Pokud $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$ pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté.

Předpokládejme, že $c \in C$. Pak existuje prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = c$, neboť g je zobrazením na C . Pro prvek b existuje prvek $a \in A$ takový, že $f(a) = b$, neboť f je zobrazením na B . Potom platí $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Zobrazení $g \circ f$ je tedy zobrazením na C .

Zobrazení $g \circ f$ je tedy bijekce A na C . Tím je tvrzení dokázáno. ■

1.6.5. Věta (Cantor⁵-Bernstein⁶). Necht X a Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a $Y \preceq X$. Pak X a Y mají stejnou mohutnost.

K důkazu Cantorovy-Bernsteinovy věty použijeme následující lemma. Připomeňme, že symbol $\mathcal{P}(X)$ značí potenční množinu (vizte 1.3.3).

1.6.6. Lemma. Necht X je množina a $H: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je zobrazení splňující podmínku

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X): A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B). \quad (1.14)$$

Potom existuje $C \subset X$ takové, že $H(C) = C$.

Důkaz. Definujme $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(X); A \subset H(A)\}$. Ukážeme, že $C = \bigcup \mathcal{C}$ je hledanou množinou. Zřejmě platí $C \subset X$. Pokud $A \in \mathcal{C}$, potom $A \subset C$ podle definice $\mathcal{C}$. Díky (1.14) pak platí $H(A) \subset H(C)$. Dohromady tedy máme $A \subset H(A) \subset H(C)$. Z této úvahy a definice $\mathcal{C}$ dostáváme $C \subset H(C)$. Nyní znovu použijeme (1.14) pro dvojici množin C a $H(C)$ a dostaneme $H(C) \subset H(H(C))$. To znamená, že $H(C) \in \mathcal{C}$, a tedy $H(C) \subset C$. Tím je rovnost $H(C) = C$ dokázána. ■

Důkaz Věty 1.6.5. Podle předpokladu věty existují prostá zobrazení $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow X$. Definujme zobrazení $H: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ předpisem

$$H(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A)).$$

⁵Georg Cantor (1845–1918)

⁶Felix Bernstein (1878–1956)

Pokud $U \subset V \subset X$, potom $f(U) \subset f(V)$, a tedy také $Y \setminus f(V) \subset Y \setminus f(U)$. Odtud již snadno odvodíme inkluzi $H(U) \subset H(V)$. Zobrazení H tedy splňuje předpoklady Lemmatu 1.6.6, s pomocí kterého nalezneme množinu $C \subset X$ splňující $H(C) = C$. Pak platí

$$C = H(C) = X \setminus g(Y \setminus f(C)).$$

Odtud plyne $X \setminus C = g(Y \setminus f(C))$. Zobrazení $g|_{Y \setminus f(C)}$ je tedy prosté zobrazení množiny $Y \setminus f(C)$ na množinu $X \setminus C$. Potom $g^{-1}|_{X \setminus C}$ je prosté zobrazení $X \setminus C$ na $Y \setminus f(C)$. Poněvadž $f|_C$ je prosté zobrazení C na $f(C)$, je následující zobrazení $h: X \rightarrow Y$ hledanou bijekcí mezi množinami X a Y

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{pro } a \in C, \\ g^{-1}(a) & \text{pro } a \in X \setminus C. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Z následující věty vyplývá, že pro každou množinu existuje množina, která je „větší“ ve smyslu Definice 1.6.1.

1.6.7. Věta (Cantor). Necht X je množina. Pak $X < \mathcal{P}(X)$.

Důkaz. Zobrazení $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množina X nemá stejnou mohutnost jako $\mathcal{P}(X)$. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X; x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení φ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny A platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny A platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce φ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. $\blacksquare$

1.6.8. Lemma. Necht A je množina a f je zobrazení. Potom $f(A) \preceq A$.

Důkaz. Položme $I = f(A)$ a $C_b = f^{-1}(\{b\}) \cap A$ pro $b \in I$. Pro každé $b \in I$ platí $C_b \neq \emptyset$. Podle axiomu výběru existuje zobrazení $\varphi: f(A) \rightarrow A$ takové, že pro každé $b \in f(A)$ platí $\varphi(b) \in f^{-1}(\{b\}) \cap A$. Zobrazení φ je prosté. Pokud totiž $\varphi(b) = \varphi(b')$, potom platí $b = f(\varphi(b)) = f(\varphi(b')) = b'$. Dostáváme tedy $f(A) \preceq A$. $\blacksquare$

Konečné množiny.

1.6.9. Definice. Řekneme, že množina A je **konečná**, pokud je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X má stejnou mohutnost jako množina $\{1, \dots, n\}$.

1.6.10. Lemma. Necht $p, q \in \mathbb{N}$.

- (a) Potom $\{1, \dots, p\} \preceq \{1, \dots, q\}$ právě tehdy, když $p \leq q$.
- (b) Potom $\{1, \dots, p\} \approx \{1, \dots, q\}$ právě tehdy, když $p = q$.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Pro spor předpokládejme, že $\{1, \dots, p\} \preceq \{1, \dots, q\}$ a $p > q$. Díky Větě 1.5.24 můžeme předpokládat, že p je nejmenší přirozené číslo, pro které

existuje $q \in \mathbb{N}$ splňující $p > q$ a $\{1, \dots, p\} \preceq \{1, \dots, q\}$. Pak existuje prosté zobrazení $f: \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, q\}$. Potom musí být $p > q > 1$. Definujme zobrazení $g: \{1, \dots, q\} \setminus \{f(p)\} \rightarrow \{1, \dots, q-1\}$ předpisem

$$g(i) = \begin{cases} i & \text{pro } i < f(p), \\ i-1 & \text{pro } i > f(p). \end{cases}$$

Potom je zobrazení g prosté, a tedy také zobrazení $g \circ f|_{\{1, \dots, p-1\}}$ je prosté zobrazení množiny $\{1, \dots, p-1\}$ do $\{1, \dots, q-1\}$. Poněvadž $0 < q-1 < p-1$, dostáváme spor s minimalitou p .

$\Leftarrow$ Tato implikace je zřejmá.

(b) Tvrzení plyne snadno z (a). ■

1.6.11. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak je toto n určeno jednoznačně. Pokud totiž $X \approx \{1, \dots, n\}$ a $X \approx \{1, \dots, m\}$ pro $n, m \in \mathbb{N}$, potom podle Věty 1.6.4(b),(c) platí $\{1, \dots, n\} \approx \{1, \dots, m\}$. Z Lemmatu 1.6.10(b) pak plyne $n = m$. Toto pozorování je důležité pro korektnost následující definice.

1.6.12. Definice. Pokud je množina X prázdná, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven 0. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že **počet prvků** množiny X je roven n . Počet prvků konečné množiny X značíme $|X|$.

1.6.13. Věta. Necht X a Y jsou konečné množiny. Potom $X \approx Y$ právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Množiny X a Y jsou buď obě prázdné, nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a počet prvků X a Y je roven 0. Ve druhém případě existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $X \approx \{1, \dots, m\}$ a $Y \approx \{1, \dots, n\}$. Potom podle Věty 1.6.4(b),(c) dostáváme $\{1, \dots, m\} \approx \{1, \dots, n\}$, a tedy podle Lemmatu 1.6.10(b) platí $m = n$, neboli $|X| = |Y|$.

$\Leftarrow$ Množiny jsou opět buď obě prázdné, nebo obě neprázdné. V prvním případě $X = Y$ a $X \approx Y$. Ve druhém případě existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1, \dots, n\}$ a $Y \approx \{1, \dots, n\}$. Potom podle Věty 1.6.4(b),(c) dostáváme $X \approx Y$. ■

1.6.14. Věta. Necht $A \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Potom je množina A omezená. Je-li navíc A neprázdná, pak existuje její maximum a minimum.

Důkaz. Je-li A prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny A .

Necht je A neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li A jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o n prvcích. Necht A je množina o $n+1$ prvcích, tj. existuje bijekce φ množiny $\{1, \dots, n+1\}$ na množinu A . Položme $B = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má n prvků, a tedy je podle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum G' a minimum g' . Položme

$$g = \min\{\varphi(n+1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n+1), G'\}.$$

Čísla g a G jsou dobře definovaná podle Příkladu 1.5.23. Dále platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}: g \leq \varphi(i) \leq G.$$

Tedy g je dolní závora množiny A a G je horní závora množiny A . Proto je množina A omezená. Protože $g', G' \in \varphi(\{1, \dots, n\}) \subset A$, je $g, G \in A$. Nalezli jsme tedy minimum i maximum množiny A . Podle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechny konečné podmnožiny $A \subset \mathbb{R}$. ■

1.6.15. Věta (vlastnosti konečných množin).

- (a) Necht A je konečná množina a $B \subset A$. Potom B je konečná.
- (b) Necht $\mathcal{A}$ je konečná množina, jejímiž prvky jsou konečné množiny. Potom $\bigcup \mathcal{A}$ je konečná množina.
- (c) Necht $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou konečné množiny. Potom kartézský součin $A_1 \times \dots \times A_n$ je konečná množina.
- (d) Necht A je konečná množina a f je zobrazení. Potom je množina $f(A)$ konečná.

Důkaz. (a) Nejprve matematickou indukcí podle n dokážeme, že je-li $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \{1, \dots, n\}$, potom je množina A konečná. Je-li $n = 1$ a $A \subset \{1\}$, pak buď je A prázdná množina, nebo $A = \{1\}$. V obou případech přímo z definice plyne, že množina A je konečná.

Předpokládejme nyní, že každá podmnožina množiny $\{1, \dots, n\}$ je konečná. Necht A je podmnožinou množiny $\{1, \dots, n+1\}$. Pokud $A \subset \{1, \dots, n\}$, pak je A konečná množina podle indukčního předpokladu. V opačném případě platí

$$A = (A \cap \{1, \dots, n\}) \cup \{n+1\}.$$

Pak je množina $B = A \cap \{1, \dots, n\}$ konečná. Je-li B prázdná, pak $A = \{n+1\}$ a existuje bijekce množiny $\{1\}$ na množinu A . Je-li B neprázdná, potom existují $k \in \mathbb{N}$ a bijekce $\varphi: \{1, \dots, k\} \rightarrow B$. Definujme $\psi: \{1, \dots, k+1\} \rightarrow A$ předpisem

$$\psi(i) = \begin{cases} \varphi(i) & \text{pro } i \in \{1, \dots, k\}, \\ n+1 & \text{pro } i = k+1. \end{cases}$$

Pak je ψ bijekce $\{1, \dots, k+1\}$ na A , a tedy A je konečná množina.

Předpokládejme nyní, že A je konečná neprázdná množina a B je její neprázdná podmnožina. Pak existují $n \in \mathbb{N}$ a bijekce φ množiny A na množinu $\{1, \dots, n\}$. Potom je zobrazení $\varphi|_B$ bijekcí množiny B na množinu $\varphi(B)$. Podle první části důkazu je množina $\varphi(B)$ konečná, tj. existují $m \in \mathbb{N}$ a bijekce ω množiny $\varphi(B)$ na množinu $\{1, \dots, m\}$. Pak $\omega \circ \varphi|_B$ je bijekce množiny B na množinu $\{1, \dots, m\}$, takže množina B je konečná.

(b) Nejprve dokážeme, že sjednocení dvou konečných množin je konečná množina. Necht tedy C a D jsou konečné množiny. Je-li alespoň jedna z nich prázdná, pak tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že jsou obě neprázdné. Potom existují $m, n \in \mathbb{N}$, bijekce α množiny C na množinu $\{1, \dots, n\}$ a bijekce β množiny D

na množinu $\{1, \dots, m\}$. Definujme zobrazení $\gamma: D \setminus C \rightarrow \{n+1, \dots, n+m\}$ předpisem $\gamma(x) = \beta(x) + n$, $x \in D \setminus C$. Pak zobrazení $\varphi: C \cup D \rightarrow \{1, \dots, n+m\}$ definované předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{pokud } x \in C, \\ \gamma(x), & \text{pokud } x \in D \setminus C, \end{cases}$$

je prosté zobrazení množiny $C \cup D$ do množiny $\{1, \dots, n+m\}$, neboť zobrazení $\alpha|_C, \gamma|_{D \setminus C}$ jsou prostá a

$$\alpha(C) \cap \gamma(D \setminus C) \subset \{1, \dots, n\} \cap \{n+1, \dots, n+m\} = \emptyset.$$

Platí $\varphi(C \cup D) \subset \{1, \dots, n+m\}$, a množina $\varphi(C \cup D)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Existuje tedy $p \in \mathbb{N}$ takové, že $\varphi(C \cup D) \approx \{1, \dots, p\}$. Podle 1.4.28 platí $C \cup D \approx \varphi(C \cup D)$, a tedy $C \cup D \approx \{1, \dots, p\}$. Množina $C \cup D$ je tedy konečná.

Pokud je množina $\mathcal{A}$ konečná, pak je buď prázdná nebo má n prvků, kde $n \in \mathbb{N}$. V prvním případě je její sjednocení prázdnou množinou, a je tedy konečné. Ve druhém případě dokážeme tvrzení matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Necht' tedy $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_{n+1}\}$, kde $A_i, i = 1, \dots, n+1$, jsou dané konečné množiny. Potom podle indukčního předpokladu je $\bigcup_{i=1}^n A_i$ konečnou množinou. Pak je ale množina

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1}$$

konečná podle první části důkazu. Tím je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno.

(c) Podobně jako v (b) stačí dokázat, že kartézský součin dvou konečných neprázdných množin A a B je konečný. Mějme $m, n \in \mathbb{N}$, bijekci α množiny A na množinu $\{1, \dots, n\}$ a bijekci β množiny B na množinu $\{1, \dots, m\}$. Necht' φ je zobrazení z Lemmatu 1.6.19. Pak zobrazení ψ definované předpisem

$$\psi(a, b) = \varphi(\alpha(a), \beta(b)), \quad (a, b) \in A \times B,$$

je prosté zobrazení množiny $A \times B$ do konečné množiny $\{1, \dots, (n+m)^2 + n\}$. Množina $\psi(A \times B)$ je tedy konečná podle již dokázané části (a). Odtud plyne i konečnost množiny $A \times B$, neboť $A \times B \approx \psi(A \times B)$.

(d) Pokud je množina $f(A)$ prázdná, potom tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $f(A)$ je neprázdná. Díky Lemmatu 1.6.8 víme, že $f(A) \preceq A$, tj. existuje prosté zobrazení $\psi: f(A) \rightarrow A$. Potom je množina $\psi(f(A))$ podmnožinou konečné množiny A , a je tedy podle (a) konečná. Množina $\psi(f(A))$ je navíc neprázdná, takže existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\psi(f(A)) \approx \{1, \dots, n\}$. Poněvadž platí $\psi(f(A)) \approx f(A)$, dostáváme podle Věty 1.6.4(b),(c) $f(A) \approx \{1, \dots, n\}$, takže $f(A)$ je konečná. ■

Nekonečné množiny.

1.6.16. Definice. Řekneme, že množina A je

- **nekonečná**, pokud není konečná,
- **spočetná**, jestliže je konečná nebo má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$,
- **nespočetná**, pokud není spočetná.

1.6.17. Příkladem nekonečné množiny je množina přirozených čísel, což bude ukázáno v následující větě. Potenční množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je pak podle Věty 1.6.7 příkladem nespočetné množiny.

1.6.18. Věta. Množina $\mathbb{N}$ je nekonečná.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $\mathbb{N}$ je konečná. Množina $\mathbb{N}$ je neprázdná, musí tedy existovat $p \in \mathbb{N}$ a bijekce f množiny $\mathbb{N}$ na množinu $\{1, \dots, p\}$. Potom $f|_{\{1, \dots, p+1\}}: \{1, \dots, p+1\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ je prosté, takže $\{1, \dots, p+1\} \leq \{1, \dots, p\}$. Podle Lemmatu 1.6.10(a) pak platí $p+1 \leq p$, což je spor. ■

Následující lemma může být poněkud překvapivé, protože ukazuje, že množinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je možné prostě zobrazit do $\mathbb{N}$.

1.6.19. Lemma. Zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definované předpisem

$$\varphi(n, m) = (n + m)^2 + n$$

je prosté.

Důkaz. Předpokládejme, že platí $\varphi(n, m) = \varphi(n', m')$ pro $(n, m), (n', m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Potom máme

$$\begin{aligned} (n' + m' + 1)^2 &> (n' + m')^2 + n' = \varphi(n', m') = \varphi(n, m) \\ &= (n + m)^2 + n > (n + m)^2. \end{aligned}$$

Odtud plyne nerovnost $n' + m' + 1 > n + m$. Potom máme $n' + m' \geq n + m$. Obdobně odvodíme nerovnost $n' + m' \leq n + m$. Musí tedy platit $n' + m' = n + m$. Odtud a z rovnosti $\varphi(n, m) = \varphi(n', m')$ plyne $n = n'$, a tedy také $m = m'$. Zobrazení φ je tedy prosté. ■

1.6.20. Lemma. (a) Množina A je spočetná právě tehdy, když platí $A \leq \mathbb{N}$.

(b) Necht A je neprázdná množina. Potom je A spočetná právě tehdy, když existuje zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, které je zobrazením na A .

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Pokud je A spočetná, pak je buď konečná, nebo $A \approx \mathbb{N}$. V prvním případě je A buď prázdná nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \approx \{1, \dots, n\}$. Zřejmě tedy platí $A \leq \mathbb{N}$. Pokud $A \approx \mathbb{N}$, pak také zřejmě $A \leq \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Necht $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ je prosté zobrazení. Pokud je množina $f(A)$ konečná, pak je podle 1.4.28 a Věty 1.6.15(d) konečná i A , a proto je množina A spočetná.

Předpokládejme nyní, že množina $f(A)$ není konečná. Budeme rekurentně konstruovat posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Podle Věty 1.5.24 existuje min $f(A)$.

Můžeme tedy položit $n_1 = \min f(A)$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ jsou již definována čísla $n_1, \dots, n_k \in f(A)$. Kdyby platilo $f(A) \subset \{n_1, \dots, n_k\}$, potom by podle Věty 1.6.15(a) byla množina $f(A)$ konečná, neboť množina $\{n_1, \dots, n_k\}$ je konečná. Množina $f(A)$ je však nekonečná, a proto množina $f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}$ musí být neprázdná. Díky Větě 1.5.24 můžeme definovat

$$n_{k+1} = \min(f(A) \setminus \{n_1, \dots, n_k\}).$$

Tím je konstrukce posloupnosti provedena, vizte 1.4.35. Zobrazení $\varphi: k \mapsto n_k, k \in \mathbb{N}$, je podle konstrukce prosté.

Ukážeme, že platí $\varphi(\mathbb{N}) = f(A)$. Z konstrukce plyne $\varphi(\mathbb{N}) \subset f(A)$. Pro spor předpokládejme, že existuje $m \in f(A) \setminus \varphi(\mathbb{N})$. Potom platí $n_k < m$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Dostáváme tak $\varphi(\mathbb{N}) \subset \{1, 2, \dots, m\}$. Odtud plyne, že $\varphi(\mathbb{N})$ je konečná. Podle 1.4.28 platí $\varphi(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, a tedy $\mathbb{N}$ je konečná podle Věty 1.6.15(d), což je spor s Větou 1.6.18.

Víme již, že platí $\varphi(\mathbb{N}) \approx \mathbb{N}$, a tedy $f(A) \approx \mathbb{N}$. Odtud dostáváme $A \approx \mathbb{N}$, neboť $A \approx f(A)$ podle 1.4.28. Množina A je tedy spočetná.

(b) $\Rightarrow$ Podle již dokázaného bodu (a) existuje prosté zobrazení $g: A \rightarrow \mathbb{N}$. Množina A je neprázdná, takže můžeme nalézt prvek $a \in A$. Zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ definujeme předpisem

$$f(n) = \begin{cases} g^{-1}(n), & \text{pokud } n \in \mathcal{H}(g), \\ a, & \text{pokud } n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{H}(g). \end{cases}$$

Potom zřejmě $f(\mathbb{N}) = A$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že f je zobrazením množiny $\mathbb{N}$ na množinu A . Potom podle Lemmatu 1.6.8 platí $A \preceq \mathbb{N}$. Množina A je tedy spočetná podle již dokázané části (a). ■

1.6.21. Věta (vlastnosti spočetných množin).

- (a) Necht A je spočetná množina a $B \subset A$. Potom je množina B spočetná.
- (b) Necht $\mathcal{A}$ je spočetná množina, jejímiž prvky jsou spočetné množiny. Potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ spočetná.
- (c) Necht $n \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_n$ jsou spočetné množiny. Potom je množina $A_1 \times \dots \times A_n$ spočetná.
- (d) Necht A je spočetná množina a f je zobrazení. Potom je množina $f(A)$ spočetná.

Důkaz. (a) Zobrazení $\text{Id}_B: B \rightarrow A$ je prosté, a tedy platí $B \preceq A$. Poněvadž $A \preceq \mathbb{N}$ podle Lemmatu 1.6.20(a), dostáváme $B \preceq \mathbb{N}$ podle Věty 1.6.3(b) a množina B je tedy spočetná podle Lemmatu 1.6.20(a).

(b) Označme $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$. Potom je systém $\tilde{\mathcal{A}}$ spočetný podle již dokázaného bodu (a), neboť $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Dále zřejmě platí $\bigcup \tilde{\mathcal{A}} = \bigcup \mathcal{A}$. Pokud $\tilde{\mathcal{A}} = \emptyset$, potom je množina $\bigcup \mathcal{A}$ prázdná, a tedy spočetná. V opačném případě existuje podle Lemmatu 1.6.20(b) zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$, které je zobrazením na $\tilde{\mathcal{A}}$. Pro každé $A \in \tilde{\mathcal{A}}$

Řešení. Množina $\mathbb{Z}$ je sjednocením množiny $\mathbb{N}$, množiny celých záporných čísel, a jednoprvkové množiny obsahující číslo 0. Množina $\mathbb{N}$ je zřejmě spočetná podle definice spočetnosti. Množina záporných celých čísel je také spočetná, neboť zobrazení $n \mapsto -n$ je bijekce této množiny na $\mathbb{N}$. Množina $\{0\}$ je jednoprvková, a tedy spočetná. Potom je množina $\mathbb{Z}$ spočetná podle Věty 1.6.21(b).

Množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ je tedy podle Věty 1.6.21(c) spočetná. Zobrazení $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ definované předpisem $f(p, q) = pq^{-1}$ zobrazuje $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{Q}$. Podle Věty 1.6.21(d) je množina $\mathbb{Q}$ spočetná. ♣

1.6.24. Množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ je nespočetná. Důkaz provedeme až v 3.8.28.

1.6.25. Příklad. Necht $\mathcal{J}$ je disjunktní systém neprázdných otevřených intervalů v $\mathbb{R}$. Dokažte, že potom je systém $\mathcal{J}$ spočetný.

Řešení. Pro každé $J \in \mathcal{J}$ nalezneme podle Věty 1.5.32 racionální číslo $q_J \in J$. Pak je zobrazení definované předpisem $J \mapsto q_J$, $J \in \mathcal{J}$, prostým zobrazením množiny $\mathcal{J}$ do $\mathbb{Q}$. Platí tedy $\mathcal{J} \preceq \mathbb{Q}$. Poněvadž $\mathbb{Q}$ je spočetná, máme $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{N}$. Podle Věty 1.6.3(b) platí $\mathcal{J} \preceq \mathbb{N}$, takže podle Věty 1.6.20(a) je $\mathcal{J}$ spočetná. ♣

1.7. Vlastnosti elementárních funkcí

Reálná funkce jedné reálné proměnné (dále jen *funkce*) je zobrazení z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel. V tomto oddílu uvedeme definice některých pojmů, které jsou důležité při zkoumání funkcí. Dále se seznámíme s *elementárními funkcemi*, tj. s polynomy, exponenciálou, logaritmem, odmocninami, obecnou mocninou, goniometrickými a cyklometrickými funkcemi. Uvedeme souhrny jejich základních vlastností, ze kterých lze odvodit všechna početní pravidla středoškolské matematiky. Tyto vlastnosti zde nebudeme odvozovat, ale v Kapitole 5 několik takových odvození ukážeme. Pak již není obtížné obdobně dokázat i zbývající zde uvedené vlastnosti.

1.7.1. Definice. Necht f je funkce a $J \subset \mathcal{D}(f)$ je interval. Řekneme, že f je

- **rostoucí** na intervalu J , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **klesající** na intervalu J , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) > f(x_2)$,
- **neklesající** na intervalu J , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **nerostoucí** na intervalu J , jestliže pro každé $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

1.7.2. Upozorníme, že výrok „Funkce f je neklesající.“ není negací výroku „Funkce f je klesající.“ Existují totiž funkce, které nejsou klesající a přitom nejsou neklesající, například funkce $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

1.7.3. Definice. Monotónní funkcí (respektive **ryze monotónní funkcí**) na intervalu J rozumíme funkci, která je neklesající nebo nerostoucí (respektive rostoucí nebo klesající) na J .

1.7.4. Definice. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická** s periodou a , kde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x)$.

1.7.5. Afinní funkcí budeme rozumět každou funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = ax + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud je $b = 0$, říkáme, že f je **lineární**. Zde definujeme pojem lineární funkce jinak, než je obvyklé na střední škole, protože v pokročilejších matematických textech se užívá právě uvedené definice. Grafem afinní funkce je přímka, jejíž sklon je určen hodnotou a , kterou nazýváme **směrnice**.

Kvadratickou funkcí budeme rozumět každou funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Polynomiální funkcí (polynomem) budeme rozumět každou funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1.15)$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, \dots, a_n$ se nazývají **koefficienty polynomu** f . **Nulovým polynomem** rozumíme konstantní nulovou funkci definovanou na $\mathbb{R}$. Afinní a kvadratické funkce tedy patří mezi polynomy.

1.7.6. Pro každý nenulový polynom P existují jednoznačně určená čísla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Pak říkáme, že **stupeň polynomu** P je roven n . Stupeň nulového polynomu definujeme jako -1 . Stupeň polynomu P značíme $\text{st } P$.

1.7.7. Reálným kořenem polynomu P rozumíme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ splňující $P(x) = 0$. Necht P je polynom tvaru (1.15), kde $a_n \neq 0$. Potom existuje nejvýše n reálných kořenů polynomu P .

Pro polynomy stupně 1 a 2 je možné určit hodnoty reálných kořenů pomocí následujících vzorců. Rovnice $ax + b = 0$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, má právě jeden reálný kořen $-\frac{b}{a}$. Odvození je snadné.

Uvažujme rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1.16)$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Označme $D = b^2 - 4ac$. Číslo D nazýváme **diskriminantem** rovnice (1.16). Pokud $D > 0$, pak má rovnice právě dva reálné kořeny $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

a $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Pokud $D = 0$, pak má rovnice právě jeden reálný kořen $\frac{-b}{2a}$. Pokud $D < 0$, pak rovnice nemá reálné kořeny.

1.7.8 (dělení polynomů). Necht P a Q jsou dva polynomy, přičemž polynom Q není nulový. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z takové, že $P = RQ + Z$ a $\text{st } Z < \text{st } Q$.

Polynomy R a Z hledáme pomocí následujícího algoritmu. Pokud $\text{st } Q > \text{st } P$, pak stačí položit R rovno nulovému polynomu a $Z = P$. Pokud $\text{st } Q \leq \text{st } P$, pak nalezneme takové $a_1 \in \mathbb{R}$ a $k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, že $\text{st}(P - a_1x^{k_1}Q) < \text{st } P$. Tento krok potom opakujeme, přičemž místo polynomu P uvažujeme polynom $P - a_1x^{k_1}Q$, pokud nemá tento polynom stupeň menší než polynom Q . Tímto způsobem obdržíme $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}$ a $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že platí

$$\text{st}(P - a_1x^{k_1}Q - a_2x^{k_2}Q - \dots - a_lx^{k_l}Q) < \text{st } Q.$$

Potom položíme $R(x) = a_1x^{k_1} + \dots + a_lx^{k_l}$ a $Z = P - RQ$.

1.7.9 (rozklad polynomu). Necht P je nenulový polynom a $c \in \mathbb{R}$. Potom existuje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a polynom R takový, že $P(x) = (x - c)^k R(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $R(a) \neq 0$.

1.7.10. Příklad. Vydělte polynom $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2$ polynomem $Q(x) = x^2 + x + 2$.

Řešení. Budeme postupovat podle algoritmu uvedeného v 1.7.8. Polynom Q vynásobíme výrazem $2x$ a výsledek odečteme od P . Obdržíme

$$P_1(x) = P(x) - 2xQ(x) = 2x^3 + 4x^2 - x + 2 - 2x(x^2 + x + 2) = 2x^2 - 5x + 2.$$

Polynom Q vynásobíme výrazem 2 a výsledek odečteme od P_1 . Obdržíme

$$P_2(x) = P_1(x) - 2Q(x) = 2x^2 - 5x + 2 - 2(x^2 + x + 2) = -7x - 2.$$

Potom máme

$$P(x) = (2x + 2)Q(x) - 7x - 2.$$

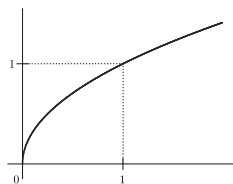
Tedy při značení z 1.7.8 máme $R(x) = 2x + 2$ a $Z(x) = -7x - 2$. ♣

1.7.11. Racionální funkce rozumíme každou funkci tvaru P/Q , kde P, Q jsou polynomy, přičemž Q není nulový polynom. Definičním oborem takové funkce je množina $\{x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq 0\}$. Polynom Q není nulový, takže racionální funkce je definována v každém bodě $\mathbb{R}$ vyjma nejvýše konečně mnoha bodů (vizte 1.7.7).

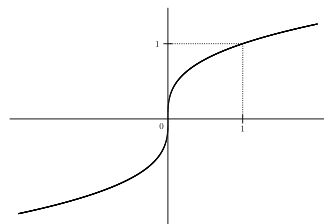
1.7.12. Necht $k \in \mathbb{N}$. Potom k -**tou odmocninou** nazýváme inverzní funkci k funkci $x \mapsto x^k$, $x \in [0, \infty)$, je-li k sudé, a k $x \mapsto x^k$, $x \in \mathbb{R}$, je-li k liché. Značíme $x \mapsto \sqrt[k]{x}$. Definice je korektní, neboť v obou případech uvažujeme inverzní funkci k funkci, která je na svém definičním oboru rostoucí.

Funkce $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ má tyto vlastnosti:

- $\mathcal{D}(\sqrt[k]{}) = [0, \infty)$ pro k sudé a $\mathcal{D}(\sqrt[k]{}) = \mathbb{R}$ pro k liché,
- $\mathcal{H}(\sqrt[k]{}) = [0, \infty)$ pro k sudé a $\mathcal{H}(\sqrt[k]{}) = \mathbb{R}$ pro k liché,
- $\sqrt[k]{}$ je rostoucí na svém definičním oboru.



OBRÁZEK 2. Graf funkce
druhá odmocnina



OBRÁZEK 3. Graf funkce
třetí odmocnina

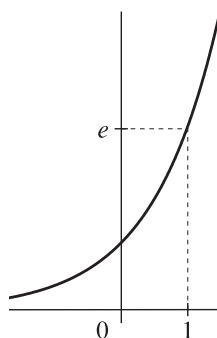
1.7.13. Exponenciální funkce, kterou budeme značit $\exp$, má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven $(0, \infty)$. Tato funkce má následující vlastnosti:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(x) \geq 1 + x$.

Odtud lze odvodit další užitečné vlastnosti exponenciální funkce:

- $\exp$ je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$,
- $\exp(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}: \exp(nx) = (\exp(x))^n$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0: \exp(x) > 1$.

Hodnotu funkce $\exp$ v bodě 1 značíme symbolem e a nazýváme ji **Eulerovým číslem**.⁷



OBRÁZEK 4. Graf exponenciální funkce

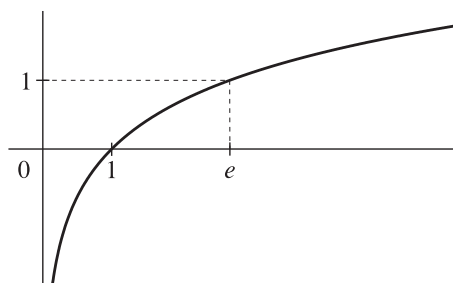
1.7.14. Logaritmická funkce, kterou budeme značit $\log$, je funkce inverzní k funkci exponenciální. Její definiční obor je tedy roven $(0, \infty)$ a obor hodnot roven $\mathbb{R}$. Tato funkce má následující vlastnosti:

⁷Leonhard Euler (1707-1783)

- $\forall x, y \in (0, \infty): \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
- $\forall x \in (0, \infty): \log(x) \leq x - 1$.

Odtud lze odvodit další užitečné vlastnosti logaritmické funkce:

- funkce $\log$ je rostoucí na intervalu $(0, \infty)$,
- $\log(1) = 0$,
- $\forall x \in (0, \infty) \forall n \in \mathbb{Z}: \log(x^n) = n \log x$,
- $\forall x \in (1, \infty): \log(x) > 0$.



OBRÁZEK 5. Graf funkce logaritmus

1.7.15. Necht' $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninu** a^x předpisem $a^x = \exp(x \log a)$. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$ jsme však symbol a^n již definovali v Označení 1.5.2(b). Pokud je $a > 0$, máme pro tento symbol dvě definice. Nová definice se však v tomto případě shoduje s předchozí definicí, neboť platí $\exp(n \log(a)) = \exp(\log(a^n)) = a^n$.

Funkce a^x je rostoucí na $\mathbb{R}$ pro $a \in (1, \infty)$ a klesající na $\mathbb{R}$ pro $a \in (0, 1)$. Pro každé $a \in \mathbb{R}, a > 0, x, y \in \mathbb{R}$ platí

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

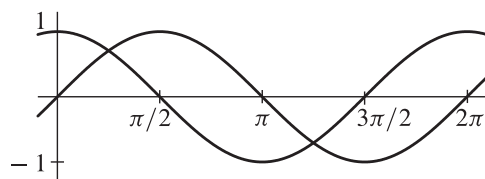
Oba vztahy snadno ověříme použitím základních vlastností exponenciální a logaritmické funkce. Platí

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp((x+y) \log a) = \exp(x \log a + y \log a) \\ &= \exp(x \log a) \cdot \exp(y \log a) = a^x \cdot a^y, \\ (a^x)^y &= \exp(y \log(a^x)) = \exp(y \log(\exp(x \log a))) \\ &= \exp(yx \log a) = \exp(xy \log a) = a^{xy}. \end{aligned}$$

1.7.16 (vlastnosti čísla π a funkcí sinus a kosinus). Funkce **sinus**, značíme $\sin$, a **kosinus**, značíme $\cos$, mají definiční obor roven $\mathbb{R}$ a obor hodnot roven intervalu $[-1, 1]$. Tyto funkce mají následující vlastnosti:

- funkce $\sin$ a $\cos$ jsou 2π -periodické,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \sin(x+y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$,

- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$,
- $\sin$ je lichá funkce a $\cos$ je sudá funkce,
- číslo π je kladné, funkce $\sin$ je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.



OBRÁZEK 6. Grafy funkcí sinus a kosinus

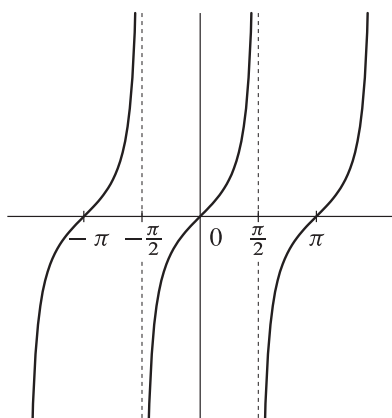
1.7.17 (vlastnosti funkcí tangens a kotangens). Funkce **tangens**, značíme tg , a **kotangens**, značíme ctg , definujeme předpisy

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

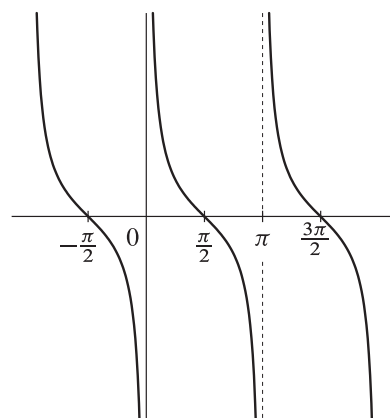
$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$$

- funkce tg a ctg jsou π -periodické,
- pro každé $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ splňující $x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ platí

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)}{1 - \operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}(y)}.$$



OBRÁZEK 7. Graf funkce tangens



OBRÁZEK 8. Graf funkce kotangens

1.7.18. Následující tabulka obsahuje funkční hodnoty goniometrických funkcí v některých význačných bodech.

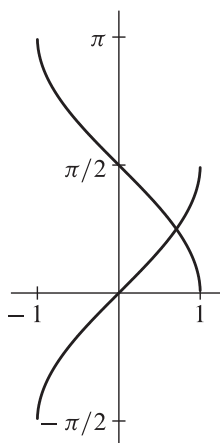
funkce	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
cotg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

1.7.19. Cyklometrické funkce arkussinus (arcsin), arkuskosinus (arccos), arkustangens (arctg) a arkuskotangens (arccotg) definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\arcsin &= (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}, & \arccos &= (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}, \\ \arctg &= (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}, & \operatorname{arccotg} &= (\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)})^{-1}.\end{aligned}$$

Definice cyklometrických funkcí jsou korektní, neboť uvažované restrikce goniometrických funkcí jsou prosté. Nyní uvedeme základní vlastnosti funkcí arkussinus a arkuskosinus:

- $\mathcal{D}(\arcsin) = \mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$,
- $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mathcal{H}(\arccos) = [0, \pi]$,
- funkce arcsin je lichá,
- $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$,
- $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos(1) = 0$,
- $\forall x \in [-1, 1]: \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

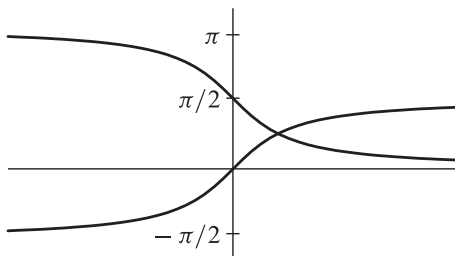


OBRÁZEK 9. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus

Zde jsou základní vlastnosti funkcí arkustangens a arkuskotangens:

- $\mathcal{D}(\arctg) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$,

- $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$,
- arctg je rostoucí a lichá funkce na $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$
- $\operatorname{arccotg}$ je klesající funkce na $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.



OBRÁZEK 10. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

1.8. Teoretické a početní příklady

1.8.1. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}: n < m. \quad (1.17)$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.31. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu 1.1.31 k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\begin{aligned} & \neg(\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}: n < m) \\ & \exists n \in \mathbb{N}: \neg(\exists m \in \mathbb{N}: n < m) \\ & \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}: \neg(n < m) \\ & \exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}: n \geq m \end{aligned}$$

Poslední řádek plyne z faktu, že uspořádání $\leq$ reálných čísel, a tedy i přirozených čísel, je lineární, vizte Definicí 1.4.4.

Zadané tvrzení je pravdivé, neboť k libovolnému danému přirozenému číslu n , můžeme číslo m zvolit jako $n + 1$. Číslo $n + 1$ je přirozené a je větší než n . Tím je pravdivost výroku (1.17) ověřena. ♣

1.8.2. Příklad. Zformulujte negaci výroku

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon) \quad (1.18)$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.31. Dále rozhodněte, zda platí uvedený výrok, nebo jeho negace.

Řešení. Opakovaně použijeme pravidla uvedená v paragrafu 1.1.31 k vyjádření negace uvedeného výroku.

$$\neg(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon))$$

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \neg(\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon))$$

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \neg(\forall x \in \mathbb{R}: (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon))$$

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R}: \neg(0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon)$$

Podle Věty 1.1.12(c) lze poslední výrok zapsat ve tvaru

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R}: (0 < |x - 1| < \delta \wedge |x - 3| \geq \varepsilon).$$

Položme $\varepsilon = 1$ a k libovolnému $\delta > 0$ definujme $x = 1 - \frac{\delta}{2}$. Platí $|x - 1| = \frac{\delta}{2}$, a tedy $0 < |x - 1| < \delta$. Navíc pro $|x - 3| = 2 + \frac{\delta}{2}$ platí $|x - 3| \geq 1 = \varepsilon$. Dokázali jsme tedy, že zadaný výrok (1.18) neplatí. ♣

1.8.3. Příklad. Necht $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Napište negaci výroku

$$\exists! x \in M: V(x) \quad (1.19)$$

pomocí postupu uvedeného v paragrafu 1.1.31.

Řešení. Výrok (1.19) lze podle 1.1.25 zapsat ve tvaru

$$(\exists x \in M: V(x)) \wedge (\forall y, z \in M: ((V(y) \wedge V(z)) \Rightarrow y = z)) \quad (1.20)$$

První výrok v předchozí konjunkci říká, že existuje alespoň jeden prvek $x \in M$ takový, že platí $V(x)$. Druhý výrok v konjunkci říká, že pokud existují prvky y a z takové, že platí $V(y)$ a $V(z)$, pak jsou si rovny. Podle 1.1.31 a Věty 1.1.12 lze zapsat negaci výroku (1.20) ve tvaru

$$(\forall x \in M: \neg V(x)) \vee (\exists y, z \in M: (V(y) \wedge V(z) \wedge y \neq z)).$$

Neformálně lze poslední výrok vyjádřit takto: buď pro žádné $x \in M$ neplatí $V(x)$, nebo existují dvě různá $y, z \in M$, pro která platí $V(y)$ a $V(z)$. ♣

1.8.4. Příklad. Necht $A = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq 0 \wedge x^2 < 2\}$. Dokažte, že A je neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{Q}$, která nemá v množině $\mathbb{Q}$ supremum.

Řešení. Množina A je zřejmě neprázdná, neboť $0 \in A$. Pro každé $x \in A$ platí $x \leq 1 < 2$ nebo $x \leq x^2 < 2$. Číslo 2 je tedy horní závorou množiny A , a proto je A shora omezená. Označme $q = \sup A$. Vzhledem k tomu, že $0 \in A$, musí platit $q \geq 0$. Pro spor předpokládejme, že $q \in \mathbb{Q}$.

Pokud platí $q < \sqrt{2}$, pak díky Větě 1.5.32 nalezneme racionální číslo $q' \in (q, \sqrt{2})$. Pak $0 \leq q < q'$ a $(q')^2 < 2$, a tedy $q' \in A$. Potom ale q není horní zavorou A , což je spor.

Pokud platí $q > \sqrt{2}$, pak opět díky Větě 1.5.32 existuje $q' \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, q)$. Pak pro každé $p \in A$ platí $p \leq q'$, neboť v opačném případě bychom dostali z nerovností $2 \leq (q')^2 < p^2 < 2$ spor. Racionální číslo q' je tedy horní zavorou množiny A , která je ostře menší než q , což je spor s faktem, že q je nejmenší horní zavorou A .

Musí tedy platit $q = \sqrt{2}$, a tedy $q^2 = 2$. To je ale spor s Příkladem 1.2.17, a proto supremum množiny A v množině $\mathbb{Q}$ neexistuje. ♣

1.8.5. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Řešení. Provedeme přímý důkaz. Vzorec plyne z binomické věty (Věta 1.5.6), neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

♣

1.8.6. Příklad (součet aritmetické řady). Necht $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^n (ai + b) = \frac{1}{2}((n+1)a + 2b)n. \quad (1.21)$$

Řešení. Pro $n = 1$ je levá strana rovna $\sum_{i=1}^1 (ai + b) = a + b$ a pravá $\frac{1}{2}(2a + 2b) = a + b$. Pro $n = 1$ tedy tvrzení platí. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme platnost vztahu (1.21) pro toto n , tj.

$$\sum_{i=1}^n (ai + b) = \frac{1}{2}((n+1)a + 2b)n.$$

Chceme dokázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) = \frac{1}{2}((n+2)a + 2b)(n+1). \quad (1.22)$$

Levou stranu (1.22) můžeme rozepsat jako

$$\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) = \left(\sum_{i=1}^n (ai + b) \right) + (a(n+1) + b).$$

Sumu v závorkách na pravé straně ale umíme sečíst podle indukčního předpokladu. Provedením algebraických úprav pak dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (ai + b) &= \frac{1}{2}((n+1)a + 2b)n + (a(n+1) + b) \\ &= \frac{1}{2}((n+2)a + 2b)(n+1).\end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden. ♣

1.8.7. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $2^n \geq n$.

Řešení. Pro $n = 1$ je nerovnost splněna, neboť $2^1 = 2 \geq 1$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že pro toto n nerovnost platí, tj. platí $2^n \geq n$. Potom také platí

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n = n + n \geq n + 1.$$

Tím je nerovnost ověřena pro $n+1$ a tvrzení je podle principu matematické indukce dokázáno. ♣

1.8.8. Příklad. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$.

Řešení. Použijeme princip matematické indukce popsany v 1.2.8. Tvrzení pro $n = 4$ platí, neboť $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. Nyní učiníme indukční předpoklad, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí $2^n \geq n^2$, a budeme se snažit dokázat $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. Z indukčního předpokladu a Příkladu 1.2.22 plyne

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2 \geq (n+1)^2.$$

Podle principu matematické indukce tedy tvrzení platí pro všechna $n \geq 4$. ♣

1.8.9 (další varianta důkazu matematickou indukcí). Necht $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výroky

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n) \tag{1.23}$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která spočívá v ověření následujících tvrzení:

- (a) platí $V(1)$ a $V(2)$,
- (b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(n+2)$.

Dokážeme, že z (a) a (b) plyne (1.23). Matematickou indukcí ověříme platnost tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(2n-1). \tag{1.24}$$

Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť platí $V(1)$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že tvrzení (1.24) platí pro toto n , tj. platí $V(2n-1)$. Podle (b) dostáváme, že platí i výrok $V(2n+1)$. Tím je podle principu matematické indukce, který byl popsán v paragrafu 1.2.7, dokázán výrok (1.24).

Obdobně dokážeme tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(2n). \tag{1.25}$$

Nyní ověříme platnost (1.23). Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Příkladu 1.2.12 existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k - 1$ nebo $n = 2k$. V prvním případě platí (1.23) podle (1.24) a ve druhém případě platí (1.23) podle (1.25). Tím je tvrzení (1.23) dokázáno.

Použití této varianty matematické indukce ilustruje následující příklad.

1.8.10. Příklad (Bernoulliho⁸ nerovnost). Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall x \in [-2, \infty): (1+x)^n \geq 1+nx. \quad (1.26)$$

Řešení. Provedeme důkaz pomocí matematické indukce podle 1.8.9.

Ověření bodu (a). Pro $n = 1$ vztah (1.26) zřejmě platí. Pro $n = 2$ plyne (1.26) z následující nerovnosti

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+2x,$$

která platí po každé $x \in \mathbb{R}$. Tím je ověřen bod (a) v 1.8.9.

Ověření bodu (b). Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí (1.26). Použitím zřejmé nerovnosti $(1+x)^2 \geq 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+x)^2 \\ &= 1+(n+2)x+(2+x)nx^2+x^2. \end{aligned}$$

Protože $x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $2+x \geq 0$ pro každé $x \in [-2, \infty)$, platí $(2+x)nx^2+x^2 \geq 0$ pro každé $x \in [-2, \infty)$. Odtud dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -2$, nerovnost $(1+x)^{n+2} \geq 1+(n+2)x$.

Tím je podle principu matematické indukce dokázána Bernoulliho nerovnost. ♣

1.8.11. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Řešení. Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro toto n . Podle Bernoulliho nerovnosti (Příklad 1.8.10) platí

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 2,$$

a tedy $2(n+1)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1}$. Použijeme-li indukční předpoklad a právě odvozenou nerovnost, obdržíme

$$\begin{aligned} (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot (n+1) \\ &= \frac{2 \cdot (n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

♣

⁸Jacob Bernoulli (1655–1705)

1.8.12 (ještě jedna varianta důkazu matematickou indukcí). Nechť $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Existují případy, kdy je vhodné výroky

$$\forall n \in \mathbb{N}: V(n) \quad (1.27)$$

dokázat pomocí varianty matematické indukce, která sestává z ověření následujících tvrzení:

- (a) platí $V(1)$,
- (b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(2n)$,
- (c) pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí $V(n) \Rightarrow V(n-1)$.

Dokážeme, že z (a)–(c) plyne (1.27). Nejprve pomocí matematické indukce popsané v 1.2.7 odvodíme platnost výroku

$$\forall m \in \mathbb{N}: V(2^m). \quad (1.28)$$

Z (a) a (b) plyne platnost $V(2)$. Nechť nyní $V(2^m)$ platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Pak $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m$, a tedy $V(2^{m+1})$ platí podle (b). Tím je tvrzení (1.28) dokázáno.

Platnost tvrzení (1.27) dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $V(n_0)$ neplatí. Položme

$$B = \{j \in \mathbb{N}; j \leq 2^{n_0} \text{ a } V(j) \text{ neplatí}\}.$$

Číslo 1 je dolní závorou množiny B a číslo 2^{n_0} je horní závorou množiny B . Množina B je podmnožinou $\mathbb{N}$, takže z její omezenosti plyne, že je konečná. Množina B je neprázdná, neboť podle našeho předpokladu $V(n_0)$ neplatí a díky Příkladu 1.8.7 máme $n_0 \leq 2^{n_0}$, takže $n_0 \in B$. Množina B má tedy maximum podle Věty 1.6.14. Označme $G = \max B$. Platí tudíž $G + 1 \notin B$. Poněvadž podle (1.28) platí $V(2^{n_0})$, a tedy $2^{n_0} \notin B$, dostáváme $G < 2^{n_0}$. Odtud plyne, že tvrzení $V(G+1)$ platí. Podle (c) tedy platí i $V(G)$, což je spor s $G \in B$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Použití právě uvedené varianty matematické indukce ukážeme v následujícím příkladu.

1.8.13. Příklad (nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem). Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro každá $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (1.29)$$

Řešení. Postupně ověříme (a)–(c) z 1.8.12, přičemž $V(n), n \in \mathbb{N}$, je tvrzení, které říká, že pro každé $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$ platí nerovnost (1.29).

(a) Zřejmě platí $\frac{x_1}{1} \geq \sqrt[1]{x_1} = x_1$.

(b) Nejprve ověříme platnost nerovnosti (1.29) pro $n = 2$. Pro libovolné $A, B \in [0, \infty)$ platí podle Příkladu 1.2.11

$$\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}. \quad (1.30)$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Nyní předpokládejme, že pro toto n platí $V(n)$. Budeme dokazovat tvrzení $V(2n)$. Mějme $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in [0, \infty)$. Použijeme indukční předpoklad nejprve pro n -tici $x_1, \dots, x_n$ a poté pro n -tici $x_{n+1}, \dots, x_{2n}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}} \right). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Nerovnost (1.30) použijeme pro nezáporná čísla

$$A = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad \text{a} \quad B = \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}.$$

Obdržíme nerovnost

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}} \right) \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}}.$$

Tento odhad spolu s (1.31) dává

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}} \right) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n}}} \\ &= \sqrt[2n]{x_1 x_2 \dots x_{2n}}. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení $V(2n)$, a tedy i bod (b).

(c) Zvolme $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Předpokládejme, že pro toto n platí $V(n)$. Budeme dokazovat tvrzení $V(n-1)$. Necht $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ jsou libovolná nezáporná reálná čísla. Označme

$$D = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

Použijeme indukční předpoklad pro n -tici čísel $y_1, \dots, y_n$ definovanou předpisem

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_{n-1} = x_{n-1}, y_n = D.$$

Z indukčního předpokladu pak plyne, že

$$\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}. \quad (1.32)$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} &= \frac{(n-1)D + D}{n} = D \quad \text{a} \\ \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n} &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \cdot \sqrt[n]{D}. \end{aligned}$$

Pak můžeme přepsat (1.32) ve tvaru

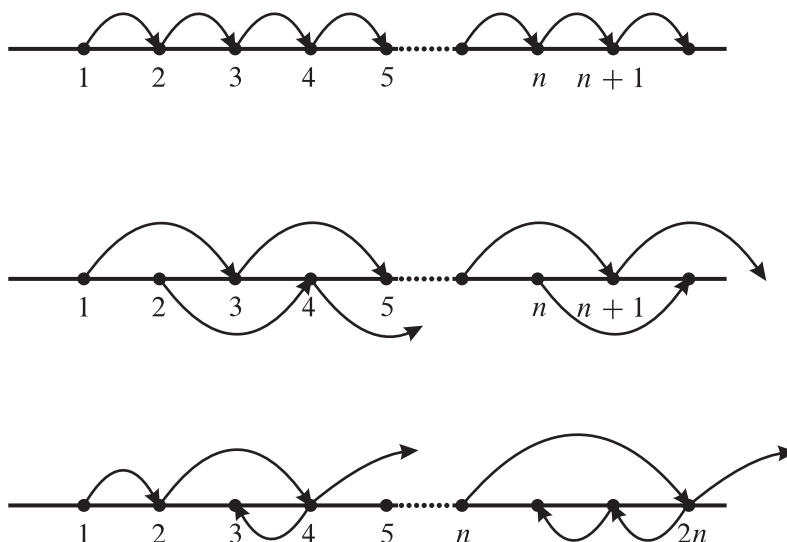
$$D \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \sqrt[n]{D}.$$

Odtud odvodíme

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} = D \geq \left(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} \right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}},$$

čímž jsme dokázali tvrzení $V(n-1)$, a tedy i bod (c) varianty matematické indukce z 1.8.12. Tím je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dokázána. ♣

1.8.14. Poznámka. Necht $V(n), n \in \mathbb{N}$, je výroková forma. Následující obrázky neformálně zachycují, jak ve variantách matematické indukce z paragrafů 1.2.7, 1.8.9 a 1.8.12 dochází k ověřování platnosti výroků $V(n)$.



OBRÁZEK 11.

1.8.15. Příklad. Ukažte, že každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, je dělitelné prvočíslem.

Řešení. Použijeme úplnou matematickou indukci (vizte 1.2.9). Číslo 2 je prvočíslo, a proto pro $n = 2$ tvrzení platí. Zvolme $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k \in \mathbb{N}$ splňující $2 \leq k \leq n$. Necht D je množina všech $d \in \mathbb{N}, 2 \leq d \leq n$, která dělí $n+1$. Pokud je D prázdná množina, pak je $n+1$ prvočíslo, a indukční krok je v tomto případě hotov, neboť prvočíslo $n+1$ dělí $n+1$. Předpokládejme tedy, že $D \neq \emptyset$. Zvolme $d \in D$. Podle indukčního předpokladu existuje prvočíslo p , které dělí d . Protože d dělí $n+1$, dělí p také $n+1$ a tvrzení je dokázáno. ♣

1.8.16. Příklad (Eukleidés⁹). Ukažte, že množina všech prvočísel je nekonečná.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje pouze konečně mnoho prvočísel. Necht $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou všechna prvočísla. Položme $p = (p_1 p_2 \cdots p_k) + 1$. Tvrdíme, že p je prvočíslo. Pokud by tomu tak totiž nebylo, existovalo by $i \in$

⁹Eukleidés (asi 325 př. n. l.–asi 260 př. n. l.)

$\{1, \dots, k\}$ takové, že p_i dělí p (Příklad 1.8.15). Tedy $p = p_i n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$1 = p - p_1 \cdots p_k = p_i n - p_1 \cdots p_k = p_i(n - p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k),$$

takže p_i dělí 1, což je spor. Tedy p je prvočíslo, které je však větší než libovolné z prvočísel $p_1, \dots, p_k$. To je ale spor s naším předpokladem. ♣

1.8.17. Příklad (vlastnosti průniku). Necht A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

- (a) $\emptyset \cap A = \emptyset$,
- (b) $A \cap A = A$,
- (c) $A \cap B = B \cap A$,
- (d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- (e) $A \cap B \subset A$,
- (f) jestliže $C \subset A$ a $C \subset B$, pak $C \subset (A \cap B)$,
- (g) $A = A \cap B$ právě tehdy, když $A \subset B$.

Řešení. Tvrzení snadno plynou přímo z definic průniku a inkluze. Dokažme však alespoň tvrzení (g). Je-li $A \subset B$, pak z (f) máme $A \subset A \cap B$, protože $A \subset B$ i $A \subset A$. Obrácená inkluze plyne z (e). Tedy $A = A \cap B$.

K důkazu obrácené implikace předpokládejme platnost rovnosti $A = A \cap B$. Pak z (e) plyne $A = A \cap B \subset B$. ♣

1.8.18. Příklad (vlastnosti sjednocení). Necht A, B, C a D jsou množiny. Dokažte, že potom platí:

- (a) $\emptyset \cup A = A$,
- (b) $A \cup A = A$,
- (c) $A \cup B = B \cup A$,
- (d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- (e) $A \subset A \cup B$,
- (f) jestliže $A \subset C$ a $B \subset C$, pak $(A \cup B) \subset C$,
- (g) $A = A \cup B$ právě tehdy, když $B \subset A$.

Řešení. Tvrzení plynou snadno z definic sjednocení a inkluze. ♣

1.8.19. Příklad (obraz množiny a množinové operace). Necht A, B jsou množiny a f je zobrazení. Dokažte, že platí:

- (a) pokud $A \subset B$, pak $f(A) \subset f(B)$,
- (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Ukažte, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností.

Řešení. (a) Předpokládejme, že $y \in f(A)$. Potom existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Pak platí také $x \in B$, a tedy $y = f(x) \in f(B)$. Tím je inkluze $f(A) \subset f(B)$ dokázána.

(b) Protože $A \subset A \cup B$, platí podle již dokázaného tvrzení (a), že $f(A) \subset f(A \cup B)$. Obdobně máme $f(B) \subset f(A \cup B)$. Tedy $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Nyní dokážeme opačnou inkluzi. Je-li $y \in f(A \cup B)$, potom existuje $x \in A \cup B$ takové, že $f(x) = y$. Pak buď $x \in A$, a tedy $y = f(x) \in f(A)$, nebo $x \in B$, a pak $y = f(x) \in f(B)$. V obou případech, které se nemusí vylučovat, dostáváme $y \in f(A) \cup f(B)$. Tedy $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dohromady tedy platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) Poněvadž platí $A \cap B \subset A$ a $A \cap B \subset B$, dostáváme podle tvrzení (a), že $f(A \cap B) \subset f(A)$ a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Odtud pak plyne $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Dokážeme, že inkluzi nelze obecně nahradit rovností. Uvažujme množiny $X = Y = \{0, 1\}$, zobrazení $f: X \rightarrow Y$ definované předpisem $f(0) = f(1) = 0$ a množiny $A = \{0\}$, $B = \{1\}$. Pak $A \cap B = \emptyset$, a tedy $f(A \cap B) = \emptyset$, ale $f(A) = f(B) = \{0\}$, takže $f(A) \cap f(B) = \{0\}$. Tudíž $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. ♣

1.8.20. Příklad (vzor množiny a množinové operace). Necht A, B jsou množiny a f je zobrazení. Dokažte, že platí:

- (a) pokud $A \subset B$, pak $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$,
- (b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
- (c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
- (d) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Řešení. (a) Jestliže $x \in f^{-1}(A)$, potom $f(x) \in A$. Pak také $f(x) \in B$, a tedy $x \in f^{-1}(B)$.

(b) Podle bodu (a) platí $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B)$ a $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$. Odtud plyne inkluze $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.

Předpokládejme, že platí $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Potom $f(x) \in A \cup B$. Platí tedy $f(x) \in A$ nebo $f(x) \in B$. V prvním případě platí $x \in f^{-1}(A)$ a ve druhém $x \in f^{-1}(B)$. Platí tedy $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(c) a (d) Důkazy lze provést obdobně jako v předchozích případech. ♣

1.8.21. Příklad (další vlastnosti obrazu a vzoru). Necht f je zobrazení. Dokažte, že platí:

- (a) pokud $A \subset \mathcal{D}(f)$, pak $A \subset f^{-1}(f(A))$,
- (b) pokud $B \subset \mathcal{H}(f)$, pak $f(f^{-1}(B)) = B$.
- (c) f je prosté právě tehdy, když pro každou množinu $A \subset \mathcal{D}(f)$ platí $f^{-1}(f(A)) = A$.

Řešení. (a) Necht $A \subset \mathcal{D}(f)$. Jestliže $x \in A$, potom $x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x) \in f(A)$. Pak dostáváme $x \in f^{-1}(f(A))$.

(b) Necht $B \subset \mathcal{H}(f)$. Pokud $y \in B$, pak existuje $x \in \mathcal{D}(f)$ takové, že $f(x) = y$. Potom $x \in f^{-1}(B)$, a tedy $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Předpokládejme nyní $y \in f(f^{-1}(B))$. Potom existuje $x \in f^{-1}(B)$ takové, že $f(x) = y$. Odtud plyne $y = f(x) \in B$, což dokazuje druhou inkluzi.

(c) Necht $f: X \rightarrow X$ je prosté a $A \subset X$. Z (a) víme, že $A \subset f^{-1}(f(A))$. Mějme tedy $x \in f^{-1}(f(A))$. Pak existuje $x' \in A$ takové, že $f(x) = f(x')$. Protože zobrazení f je prosté, platí $x = x'$, a tedy $x \in A$.

Není-li f prosté, existují dva různé prvky $x, x' \in X$ takové, že $f(x) = f(x')$. Položme $A = \{x\}$. Pak $x' \in f^{-1}(f(A))$, a tedy $A \neq f^{-1}(f(A))$. ♣

1.8.22. Příklad. Necht množiny A, B splňují $A \approx B$. Dokažte, že platí $\mathcal{P}(A) \approx \mathcal{P}(B)$.

Řešení. Podle předpokladu existuje bijekce φ množiny A na množinu B . Zobrazení $\Phi: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ budeme definovat následujícím způsobem. Pro $X \in \mathcal{P}(A)$ definujeme prvek $\Phi(X)$ množiny $\mathcal{P}(B)$ jako množinu $\varphi(X)$. Ověříme, že Φ je bijekce.

Zobrazení Φ je prosté. Necht $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ a platí $\Phi(X_1) = \Phi(X_2)$. Potom podle definice Φ platí, že obrazy množin X_1 a X_2 při zobrazení φ se rovnají, tj., $\varphi(X_1) = \varphi(X_2)$. Vzhledem k tomu, že φ je bijekce platí díky Příkladu 1.8.21(c)

$$X_1 = \varphi^{-1}(\varphi(X_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(X_2)) = X_2,$$

čímž je prostota Φ ověřena.

Zobrazení Φ je na $\mathcal{P}(B)$. Necht $Y \in \mathcal{P}(B)$. Potom $\varphi^{-1}(Y) \in \mathcal{P}(A)$ a s použitím Příkladu 1.8.21(b) platí $\Phi(\varphi^{-1}(Y)) = \varphi(\varphi^{-1}(Y)) = Y$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

1.8.23. Příklad (hustota $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že potom existuje $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < z < b$.

Důkaz. Podle Věty 1.5.32 existuje racionální číslo $y \in (a, b)$. Podle téže věty aplikované na interval (y, b) nalezneme racionální číslo $y' \in (y, b)$. Položme $z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}}$. Protože $\sqrt{2} > 1$, máme

$$a < y < z = y + \frac{y'-y}{\sqrt{2}} < y + (y' - y) = y' < b.$$

Kdyby bylo číslo z racionální, pak by také číslo $\sqrt{2} = \frac{y'-y}{z-y}$ bylo racionální, což by bylo ve sporu s Příkladem 1.2.17. Číslo z je tedy iracionální, a tím je tvrzení dokázáno. ■

1.8.24. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Řešení. Protože zřejmě $\max M = 1$, platí podle Věty 1.4.16(a) také $\sup M = 1$. Dále platí, že všechny prvky v M jsou kladné, a tak je 0 dolní závorou M . Dokážeme, že

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \exists x \in M: x < y.$$

Zvolme $y \in \mathbb{R}, y > 0$. Podle Věty 1.5.29 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $n > \frac{1}{y}$. Pak $\frac{1}{n} \in M$ a $\frac{1}{n} < y$. Tím jsme pro číslo 0 ověřili podmínky (c) a (d) z 1.5.16, a platí tedy $\inf M = 0$. ♣

1.8.25. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = [0, 1)$.

Řešení. Protože $\min M = 0$, platí podle Věty 1.4.16(b) také $\inf M = 0$.

Zřejmě je 1 horní závorou M . Dokážeme

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1 \exists x \in [0, 1): y < x.$$

Zvolme $y \in \mathbb{R}, y < 1$. Položme $x = \max\{0, \frac{1}{2}(1+y)\}$. Potom $x \in M$ a z nerovnosti $y < 1$ dále plyne $y < \frac{1}{2}(1+y)$. Tedy $y < x$. Podle 1.5.16 je tedy $\sup M = 1$. ♣

1.8.26. Příklad. Určete supremum a infimum množiny $M = \{\frac{p}{p+q}; p, q \in \mathbb{N}\}$.

Řešení. Pro $p, q \in \mathbb{N}$ platí $\frac{p}{p+q} \in (0, 1)$. Tedy 0 je dolní závora M a 1 je horní závora M .

Ověření $\inf M = 0$. Platnost podmínky (c) z 1.5.16 jsme již ověřili. Pro ověření druhé podmínky máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y > 0 \exists p, q \in \mathbb{N}: y > \frac{p}{p+q}.$$

Zvolme $y \in \mathbb{R}, y > 0$. Položíme $p = 1$ a nalezneme pomocí Věty 1.5.29 $q \in \mathbb{N}$ splňující $q > \frac{1}{y} - 1$. Pak $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{1+q} < y$. Odtud plyne $\inf M = 0$.

Ověření $\sup M = 1$. Podmínka (a) z 1.5.16 je splněna, neboť 1 je horní závorou M . Pro ověření podmínky (b) máme dokázat

$$\forall y \in \mathbb{R}, y < 1 \exists p, q \in \mathbb{N}: y < \frac{p}{p+q}.$$

Položme $q = 1$ a zvolme $y \in \mathbb{R}, y < 1$. Podle Věty 1.5.29 nalezneme $p \in \mathbb{N}$ splňující $p > \frac{y}{1-y}$. Pak platí $\frac{p}{p+q} = \frac{p}{p+1} > y$. Ověřili jsme, že $\sup M = 1$. ♣

1.8.27. Příklad. Uvažujme funkci $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$.

- (a) Dokažte, že funkce f je klesající na $(0, 1]$ a rostoucí na $[1, \infty)$.
- (b) Dokažte, že funkce $g = f|_{(0,1]}, h = f|_{[1,\infty)}$ jsou prosté.
- (c) Dokažte, že platí $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(h) = [2, \infty)$. Nalezněte inverzní funkci k funkcím g a h .
- (d) Nalezněte $f \circ f$ a $\mathcal{H}(f \circ f)$.

Řešení. (a) Zvolme $x, y \in (0, 1]$ taková, že $x < y$. Potom $1 < \frac{1}{xy}$, a tedy

$$y - x < \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Odtud plyne $f(y) < f(x)$. Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0, 1)$.

Nyní zvolme $x, y \in [1, \infty)$ splňující $x < y$. Potom $1 > \frac{1}{xy}$ a obdobně jako výše odtud plyne, že f je rostoucí na $[1, \infty)$.

(b) Funkce g je klesající na $(0, 1]$ a funkce h rostoucí na $[1, \infty)$. Jsou tedy prosté.

(c) Z (a) plyne $\mathcal{H}(f) \subset [f(1), \infty) = [2, \infty)$, a tedy také $\mathcal{H}(g) \subset [2, \infty)$.

Zvolme $y \in [2, \infty)$. Položme

$$x = \frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 - 4}).$$

Potom $x \in (0, 1]$ a $g(x) = y$. Tedy $[2, \infty) \subset \mathcal{H}(g)$. Z výše uvedeného plyne $\mathcal{H}(g) = [2, \infty)$. Dále platí $g^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - \sqrt{y^2 - 4})$, $y \in [2, \infty)$.

Nyní polořme

$$x = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4}).$$

Potom $x \in [1, \infty)$ a $h(x) = y$. Tedy $[2, \infty) \subset \mathcal{H}(h)$. Z výše uvedeného plyne $\mathcal{H}(h) = [2, \infty)$. Dále platí $h^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + \sqrt{y^2 - 4})$, $y \in [2, \infty)$.

(d) Protože $\mathcal{H}(f) = [2, \infty) \subset (0, \infty)$, je $f \circ f$ dobře definované a pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Dále platí podle (c) a (a)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f \circ f) &= f(f((0, \infty))) = f([2, \infty)) \\ &\subset [f(2), \infty) = \left[\frac{5}{2}, \infty\right). \end{aligned}$$

Zvolme $z \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. Po dle (c) existuje $y \in [1, \infty)$ splňující $f(y) = z$. Protože je h rostoucí, platí $y \geq 2$. Opět podle (c) existuje $x \in [1, \infty)$ splňující $f(x) = y$. Tedy

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(y) = z,$$

takže $\mathcal{H}(f \circ f) \supset \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. Platí tedy $\mathcal{H}(f \circ f) = \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. ♣

Limita posloupnosti

2.1. Nekonečné posloupnosti

V běžném životě se často setkáváme s posloupnostmi reálných čísel. Může jít například o posloupnost měření teploty vzduchu, o posloupnost makroekonomických dat a podobně. Takové posloupnosti sestávají z konečného počtu členů. Definice konečné posloupnosti reálných čísel vypadá následovně (srovnejte s Definicí 1.4.34(a)).

2.1.1. Definice. Konečnou posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení množiny $\{1, \dots, k\}$, kde $k \in \mathbb{N}$, do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Pokud $n \mapsto a_n$, $n \in \{1, \dots, k\}$, je takové zobrazení, pak je značíme $\{a_n\}_{n=1}^k$. Číslo a_n , kde $n \in \{1, \dots, k\}$, nazýváme **n -tým členem** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^k$.

V řadě modelů z různých vědních oborů se používají i posloupnosti, které mají nekonečný počet členů. Zde je formální definice (srovnejte s Definicí 1.4.34(b)).

2.1.2. Definice. Nekonečnou posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme **n -tým členem** této posloupnosti.

V této kapitole budeme posloupností rozumět vždy nekonečnou posloupnost reálných čísel.

2.1.3 (posloupnost versus množina členů). Symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ označuje posloupnost, tedy zobrazení definované na $\mathbb{N}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$, zatímco symbol $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ značí množinu všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jde tedy o podmnožinu $\mathbb{R}$. Známe-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak známe i $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ a $\{b_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$ jsou sice různé, ale mají stejné množiny členů, neboť $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \{b_n; n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

Množina všech členů konstantní posloupnosti (vizte Definicí 1.5.19) je jednoprvková. Dalšími jednoduchými příklady posloupností, s nimiž se ještě setkáme, jsou $\{n\}$ a $\{\frac{1}{n}\}$. Množinu všech členů posloupnosti tvoří v prvním případě množina $\mathbb{N}$, ve druhém případě množina $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

V následujících třech příkladech jsou posloupnosti zadány rekurentně (vizte 1.4.35).

2.1.4. Fibonacciova¹ posloupnost je dána následujícím způsobem: $a_1 = 1, a_2 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, platí $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Zde je prvních osm členů této posloupnosti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Další informace o Fibonacciově posloupnosti lze nalézt například v knize [5].

2.1.5 (posloupnost všech prvočísel). Položme $p_1 = 2$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ již máme definován člen p_n . Podle Příkladu 1.8.16 je množina prvočísel nekonečná, a proto je množina $A_n = \{k \in \mathbb{N}; k > p_n, k \text{ je prvočíslo}\}$ neprázdná. Podle Věty 1.5.24 má tato množina nejmenší prvek. Položme $p_{n+1} = \min A_n$. Tím jsme rekurentně definovali nekonečnou posloupnost $\{p_n\}$, kde p_n je n -té prvočíslo, tedy $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, \dots$. Určit n -tý člen této posloupnosti pro dané $n \in \mathbb{N}$ je obecně velice obtížné. Další informace o prvočíslech je možné nalézt například v knize [7].

Zadání posloupnosti může být někdy velice osobité, jak ukazuje následující příklad.

2.1.6. Posloupnost, označovaná v anglicky psané literatuře výrazem **look and say sequence**, jejíž začátek má tvar

$$1, 11, 21, 1211, 111221, \dots,$$

je zadána následujícím předpisem: $a_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme hodnotu členu a_{n+1} „speciálním přečtením“ číslic v dekadickém zápisu členu a_n . Člen $a_1 = 1$ přečteme jako „jedna jednička“, což zapíšeme ve tvaru $a_2 = 11$. Člen a_2 přečteme jako „dvě jedničky“ a dostaneme $a_3 = 21$. Tímto způsobem postupujeme dále. Například člen a_6 získáme přečtením členu $a_5 = 111221$ ve formě „tři jedničky, dvě dvojky, jedna jednička“, takže $a_6 = 312211$. Posloupnost je tedy zadána rekurentně a přesná formulace její definice by vyžadovala ještě jisté úsilí. Další informace o této kuriózní posloupnosti lze nalézt například v článku [6].

Posloupnost chápeme jako zobrazení, neboť jde o zobrazení množiny přirozených čísel do množiny čísel reálných. Následující definice je tedy jenom opakovaním Definice 1.5.19 pro posloupnost.

2.1.7. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

2.1.8. Posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$. Podobně posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq K$. Konečně omezenost posloupnosti $\{a_n\}$ je charakterizována v následujícím lemmatu.

¹Leonardo Fibonacci (asi 1170–1250)

2.1.9. Lemma. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Pak $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky omezenosti množiny $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ nalezneme čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A \leq a_n \leq B$. Položme $K = \max\{|A|, |B|\}$. Pak zřejmě platí $-K \leq a_n \leq K$, a tedy $|a_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Necht $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|a_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $-K \leq a_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená. ■

Následující definice je obdobou Definice 1.7.1 pro posloupnosti.

2.1.10. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **rostoucí**, jestliže pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, platí $a_n < a_m$,
- **klesající**, jestliže pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, platí $a_n > a_m$,
- **neklesající**, jestliže pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, platí $a_n \leq a_m$,
- **nerostoucí**, jestliže pro každá $n, m \in \mathbb{N}, n < m$, platí $a_n \geq a_m$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, jestliže je nerostoucí nebo neklesající. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, jestliže je rostoucí, nebo klesající.

2.1.11. Upozorníme, že výrok „Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající.“ není negací výroku „Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.“ Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ není klesající, avšak není ani neklesající. Podobně je tomu s výroky „Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.“ a „Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.“ Srovnejte s 1.7.2.

2.1.12. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\{a_n\}$ je rostoucí právě tehdy, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$. Implikaci $\Leftarrow$ lze dokázat snadno matematickou indukcí, opačná implikace je zřejmá. Obdobná tvrzení platí i pro ostatní typy monotonie.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

2.2.1 (motivace pojmu limita). (a) Uvedeme dva jednoduché modely z oblasti bankovníctví. Klient banky si u ní uloží částku ve výši a korun českých s ročním úrokem p procent. Po uplynutí jednoho roku bude tedy zůstatek na účtu roven $(1 + \tilde{p})a$, kde $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Na konci n -tého roku bude potom zůstatek a_n roven $(1 + \tilde{p})^n a$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy vyjadřuje vývoj stavu konta na konci jednotlivých let.

Ve druhém příkladě půjčí banka klientovi částku ve výši a korun českých s úrokem p procent na dobu jednoho roku. Po uplynutí lhůty musí tedy dlužník zaplatit částku $(1 + \tilde{p})a$, kde opět $\tilde{p} = \frac{p}{100}$. Pokud by banka rozdělila rok na dvě půlroční úrokovací období, byla by dlužná částka na konci prvního půlroku rovna $(1 + \frac{\tilde{p}}{2})a$ a na konci roku by musel klient zaplatit částku $(1 + \frac{\tilde{p}}{2})^2 a$. Pokud by banka rozdělila rok na n stejně dlouhých úrokovacích období, musel by klient na konci roku zaplatit částku $b_n = (1 + \frac{\tilde{p}}{n})^n a$.

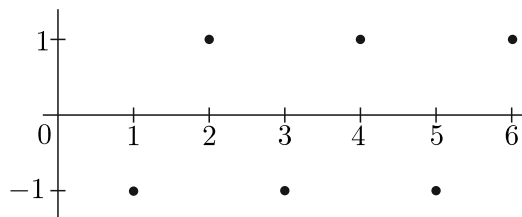
Budou hodnoty a_n a b_n s rostoucím n růst? Pokud ano, mohou růst „nade všechny meze“ nebo se budou „blížit“ k nějaké hodnotě? K zodpovězení těchto otázek použijeme výsledky, které odvodíme v této kapitole.

(b) Pomocí posloupnosti s nekonečným počtem členů můžeme také aproximovat hodnotu jistého čísla A , které je pro nás z nějakého důvodu zajímavé. Členy takové posloupnosti by měly s rostoucím n stále přesněji aproximovat hodnotu A . Takto postupoval Archimédés ([2]), když počítal délku obvodu kruhu přibližně pomocí obvodu pravidelného mnohoúhelníka. Čím měl mnohoúhelník více stran, tím byl jeho obvod lepším přiblížením skutečnému obvodu kruhu.

V uvedených příkladech, ke kterým se ještě později vrátíme (vizte 2.3.35 a ??), jsme neformálně užili slov „blížit se“ a „přibližovat se“ o členech posloupnosti. V této kapitole dáme těmto obrátům přesný matematický význam zavedením pojmu limita posloupnosti. Pojem limity má pro matematickou analýzu zásadní význam a v tomto textu se s ním budeme setkávat téměř neustále.

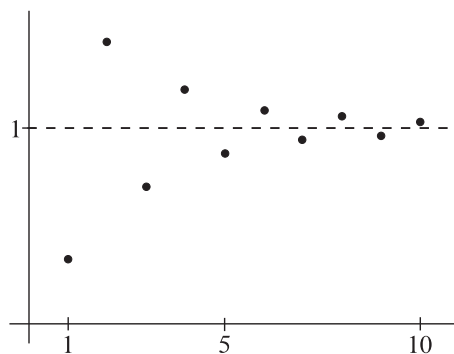
Definice limity.

2.2.2 (intuitivní pojem limity). Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$ definovanou předpisem $a_n = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zdá se být zřejmé, že pro tuto posloupnost nelze nalézt nějaké reálné číslo, k němuž by se její členy „blížily“ (vizte Obrázek 1).



OBRÁZEK 1.

Nechť nyní $a_n = 1 + (-\frac{2}{3})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Následující obrázek zachycuje chování prvních deseti členů této posloupnosti.



OBRÁZEK 2.

V tomto případě se naopak zdá, že členy posloupnosti $\{a_n\}$ se s rostoucím n „blíží“ k číslu 1. Tento intuitivní náhled nyní vyjádříme pomocí matematicky přesných pojmů.

2.2.3. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou A** , jestliže platí

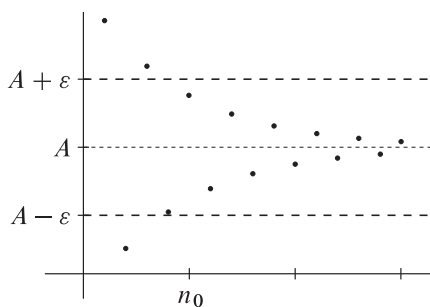
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

2.2.4. Chceme-li tvrdit, že limitou posloupnosti $\{a_n\}$ je reálné číslo A , musíme ověřit podmínku (2.1). Pro libovolné zadání kladné číslo ε musíme nalézt přirozené číslo (index) n_0 takové, aby byla odchylka každého členu posloupnosti s indexem n větším nebo rovným tomuto n_0 od hodnoty A menší než ε , tedy $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy, pro libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, hledáme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, aby platil výrok

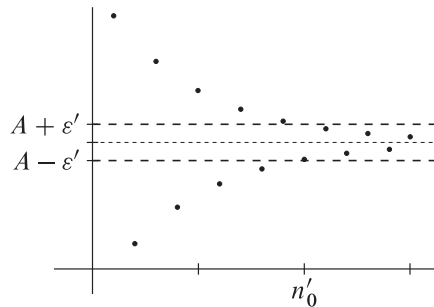
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Nalezené n_0 bude obecně záviset na volbě ε . Vizte následující dva obrázky.

Na Obrázku 3 vidíme jednu z možných voleb čísla n_0 pro zadání ε . Na Obrázku 4 bylo zadáno ε' menší než ε . Pro toto nové zadání ovšem index n_0 již podmínku (2.2) nesplňuje, neboť existuje $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, pro které nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon'$ neplatí. Proto musíme nalézt jiný index n'_0 (větší než n_0), aby podmínka (2.2), kde ε je zaměněno za ε' a n_0 je zaměněno za n'_0 , byla splněna.



OBRÁZEK 3.



OBRÁZEK 4.

2.2.5 (formule jako hra). Na ověřování podmínky (2.1) je možné také nahlížet jako na hru, v níž se utkají dva hráči. První hráč (naš protivník) volí v prvním tahu hry kladné reálné číslo ε . Naším úkolem (v roli druhého hráče) je zvolit ve druhém tahu hry přirozené číslo n_0 . Ve třetím (posledním) tahu hry volí první hráč přirozené číslo n splňující $n \geq n_0$. Pokud $|a_n - A| \geq \varepsilon$, vyhrává první hráč, v opačném případě vítězíme my. Pokud dokážeme vyhrát libovolnou takovou partii, je limitou posloupnosti $\{a_n\}$ číslo A . Všimněme si, že ve druhém tahu volíme n_0 , aniž bychom věděli, které n zvolí náš protivník v tahu následujícím. Tato skutečnost odpovídá pořadí kvantifikátorů v podmínce (2.1).

2.2.6. Věta (jednoznačnost limity). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}$. Potom platí $A = B$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom platí $n_0 \geq n_A$ i $n_0 \geq n_B$, a tedy $|a_{n_0} - A| < \varepsilon$ i $|a_{n_0} - B| < \varepsilon$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti (1.10) máme

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - a_{n_0} + a_{n_0} - B| \\ &\leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|A - B| < 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je podle Lemmatu 1.5.14 $|A - B| = 0$, neboli $A = B$. ■

2.2.7. Označení. Jestliže má posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou nějakému reálnému číslu, pak je tato limita podle Věty 2.2.6 určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A , pak píšeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ nebo $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme někdy pouze $\lim a_n = A$ nebo $a_n \rightarrow A$.

2.2.8. K zavedení symbolu $\lim a_n$ potřebujeme tvrzení Věty 2.2.6. Kdyby totiž posloupnost měla více než jednu limitu, pak by nebylo jasné, co symbol $\lim a_n$ vlastně označuje a rovnost $\lim a_n = A$ by nedávala smysl.

2.2.9. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$, neboli platí

$$\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Je-li posloupnost konvergentní, říkáme též, že má **vlastní limitu**. Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

2.2.10. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$. Dokažte, že $\lim a_n = c$.

Řešení. Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $n_0 = 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, máme $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, takže podle definice limity dostáváme $\lim a_n = c$. ♣

Následující příklad ukazuje, že hodnota limity konvergentní posloupnosti nemusí být prvkem množiny jejích členů.

2.2.11. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.29) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí $\frac{1}{n} > 0$, a tedy $\frac{1}{n} > -\varepsilon$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$, neboli $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. To podle definice limity znamená, že $\lim \frac{1}{n} = 0$. ♣

2.2.12. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{n}{n+2} = 1$.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| = \left| \frac{n - (n+2)}{n+2} \right| = \left| \frac{-2}{n+2} \right| = \frac{2}{n+2}.$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $0 < \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Tuto vlastnost má jakékoli $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{2}{\varepsilon} - 2$. Existence takového n_0 vyplývá z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.29). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, zřejmě platí $\frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n_0+2} < \varepsilon.$$

Podle definice limity tedy platí $\lim \frac{n}{n+2} = 1$. ♣

2.2.13. Negaci výroku „Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní.“ lze podle 1.1.31 zapsat ve tvaru

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

Máme-li dokázat, že zadaná posloupnost nemá vlastní limitu, pak musíme pro každé $A \in \mathbb{R}$ ukázat, že A není limitou této posloupnosti. Předpokládáme tedy, že A je libovolné reálné číslo a v závislosti na něm volíme vhodné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Tento postup předvedeme v následujících dvou příkladech.

2.2.14. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n^4\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme pro spor, že $\lim n^4 = A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |n^4 - A| < \varepsilon = 1. \quad (2.3)$$

S pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.29) nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq \max\{|A| + 1, n_0\}$. Pak platí $n^4 \geq n \geq |A| + 1$, a tedy podle Důsledku 1.5.12(a) platí

$$|n^4 - A| \geq n^4 - |A| \geq |A| + 1 - |A| = 1 = \varepsilon,$$

což je spor s (2.3). ♣

2.2.15. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Řešení. Necht A je libovolné reálné číslo. Položme $\varepsilon = 1$. Je-li $A \geq 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme liché $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |-1 - A| = 1 + A \geq 1 = \varepsilon.$$

Je-li $A < 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, pak volíme sudé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Potom platí

$$|(-1)^n - A| = |1 - A| = 1 - A \geq 1 = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ tedy nemá vlastní limitu.

Na rozdíl od Příkladu 2.2.14, kdy bylo možné za ε zvolit jakékoliv kladné číslo, nelze při řešení Příkladu 2.2.15 volit ε libovolně. Například volba $\varepsilon = 3$ by k řešení nevedla. Číslo ε zde musíme zvolit „dostatečně malé“. ♣

V Příkladu 2.2.12 jsme na základě definice ověřili, že číslo 1 je opravdu limitou posloupnosti $\{\frac{n}{n+2}\}$ ve smyslu Definice 2.2.3. V Příkladech 2.2.14 a 2.2.15 jsme užili této definice k důkazu neexistence vlastní limity příslušných posloupností. Definice sama nám ale nedává návod, jak limitu vypočítat. V další části této kapitoly odvodíme věty, které objasní základní vlastnosti limit a dále budou užitečné při výpočtech limit konkrétních posloupností.

2.2.16. Věta. Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$. Pak platí $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $|b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon$. Tedy $\lim b_n = A$. ■

2.2.17. Předcházející větu lze formulovat i následujícím způsobem. Změníme-li u dané konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$ konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost $\{b_n\}$ stejnou limitu jako posloupnost $\{a_n\}$. Pokud je totiž množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \neq b_n\}$ konečná, potom je omezená, a tedy existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n = b_n$.

Díky tomuto pozorování můžeme zesílit výsledek Příkladu 2.2.10. Necht $c \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ je posloupnost a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n = c$. Potom $\lim a_n = c$, jak vyplývá z Příkladu 2.2.10 a Věty 2.2.16.

Nyní zformulujeme několik podmínek ekvivalentních podmínce (2.1) v definici limity posloupnosti. Často je totiž snazší ověřit některou z těchto podmínek než podmínku původní.

2.2.18. Lemma. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < K\varepsilon. \quad (2.4)$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Z definice limity plyne, že (2.4) platí pro $K = 1$.

$\Leftarrow$ Necht $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je číslo splňující (2.4). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle (2.4) k tomuto ε' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. K zadanému $\varepsilon > 0$ jsme tedy našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy, platí $\lim a_n = A$. ■

2.2.19. Lemma. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, takové, že platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Položme $\varepsilon_0 = 1$. Potom (2.5) plyne z definice limity a 1.1.26(a), kde klademe $M_1 = (0, \infty)$, $M_2 = (0, 1)$ a $V(\varepsilon)$ je výroková forma

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$. Potom $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0)$, a tedy podle (2.5) k němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon' \leq \varepsilon$. Tedy $\lim a_n = A$. ■

2.2.20. Z Lemmatu 2.2.19 plyne, že pro ověření existence vlastní limity posloupnosti stačí vyšetřit jen ε z intervalu $(0, \varepsilon_0)$, kde ε_0 je dáno. Stačí se tedy zabývat jen „malými hodnotami“ ε , což v dalším textu usnadní některé důkazy.

2.2.21. V definici limity posloupnosti (Definice 2.2.3) může být nerovnost $n \geq n_0$ ekvivalentně nahrazena nerovností $n > n_0$. Podobně nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$ může být ekvivalentně nahrazena nerovností $|a_n - A| \leq \varepsilon$. První z těchto tvrzení je snadné. Pro důkaz druhého tvrzení si nejprve uvědomíme, že z podmínky (2.1) triviálně plyne výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| \leq \varepsilon. \quad (2.6)$$

Jestliže naopak platí (2.6), potom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < 2\varepsilon.$$

Odtud pomocí Lemmatu 2.2.18 vyplývá (2.1).

Následující dvě věty ukazují vztahy mezi limitami posloupností $\{a_n\}$ a $\{|a_n|\}$.

2.2.22. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim a_n = A$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí podle Důsledku 1.5.12(a) odhad $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$. Celkem tedy máme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: ||a_n| - |A|| < \varepsilon.$$

To ale podle definice znamená, že $\lim |a_n| = |A|$. ■

2.2.23. Opačná implikace ve Větě 2.2.22 obecně neplatí. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu (vizte Příklad 2.2.15), ale $\lim |(-1)^n| = \lim 1 = 1$. Pokud ovšem $A = 0$, pak opačná implikace platí, jak ukazuje následující věta.

2.2.24. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.

Důkaz. Podle definice limity je $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n| < \varepsilon,$$

zatímco $\lim |a_n| = 0$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: ||a_n|| < \varepsilon.$$

Protože $||a_n|| = |a_n|$, jsou oba výroky ekvivalentní. ■

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi existencí vlastní limity a omezeností posloupnosti.

2.2.25. Věta. Necht $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je $\{a_n\}$ omezená.

Důkaz. Podle předpokladu existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Položme $\varepsilon = 1$. Podle definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.6.14 omezená. Necht $M \in \mathbb{R}$ je její horní závora. Potom podle Věty 1.5.11 pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$|a_n| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|,$$

a tedy

$$|a_n| \leq \begin{cases} M, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ |A| + 1, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Nyní položme $K = \max\{M, |A| + 1\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$, a $\{a_n\}$ je tedy omezená. ■

2.2.26. (a) Z Věty 2.2.25 vyplývá, že každá neomezená posloupnost je divergentní.

(b) Omezenost posloupnosti není postačující podmínkou pro její konvergenci. Například posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, avšak není konvergentní.

Limita vybrané posloupnosti.

2.2.27. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.28. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Následující posloupnosti jsou vybranými posloupnostmi z posloupnosti $\{a_n\}$:

- posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ členů s „lichým indexem“ a posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ členů se „sudým indexem“, kde příslušnými posloupnostmi $\{n_k\}$ jsou po řadě $\{2k-1\}$ a $\{2k\}$,
- posloupnost $\{a_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k+1, k \in \mathbb{N}$,
- posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $n_k = k^2, k \in \mathbb{N}$,
- posloupnost $\{a_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde p_k je k -té prvočíslo, $k \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ v Definici 2.2.27 určuje výběr těch členů posloupnosti $\{a_n\}$, které se objeví v podposloupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí být podle definice rostoucí. Například posloupnost $a_3, a_2, a_1, a_4, a_5, a_6, \dots$ obecně neurčuje podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$.

2.2.29. Necht $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$. Uvažujme podposloupnosti $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -1$. Také posloupnost $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní a splňuje $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$. Konečně posloupnost $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty}$ splývá s původní posloupností, a tedy je divergentní.

Pro divergentní posloupnost $\{(-1)^n\}$ jsme našli dvě její konvergentní podposloupnosti s různými limitami a jednu její divergentní podposloupnost. Posloupnosti vybrané z divergentní posloupnosti mohou tedy konvergovat k různým limitám nebo mohou divergovat. Pro posloupnosti vybrané z konvergentní posloupnosti je situace jednodušší, jak ukazuje následující věta.

2.2.30. Věta (limita vybrané posloupnosti). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma.

2.2.31. Lemma. Necht $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k . Protože $n_1 \in \mathbb{N}$, zřejmě máme $n_1 \geq 1$. Předpokládejme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$. Potom platí $n_{k+1} > n_k \geq k$, neboť $\{n_k\}$ je rostoucí. Z Lemmatu 1.5.28 plyne, že $n_{k+1} \geq k+1$. Tím je tvrzení podle principu matematické indukce dokázáno. ■

Důkaz Věty 2.2.30. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^*: |a_n - A| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.31 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.7) dostaneme $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána. ■

2.2.32. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé vlastní limity, pak je $\{a_n\}$ divergentní. Kdyby totiž posloupnost $\{a_n\}$ měla vlastní limitu A , pak by obě podposloupnosti musely mít podle Věty 2.2.30 limitu A , což by byl spor.

2.2.33. Úvaha z předchozího odstavce nám umožňuje dokázat, že limita posloupnosti $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ neexistuje, jiným způsobem, než to bylo provedeno v Příkladu 2.2.15. Podle 2.2.29 je totiž $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -1$. Nalezli jsme dvě podposloupnosti s různými limity, a tedy $\lim(-1)^n$ neexistuje.

Aritmetika limit. V další části tohoto oddílu ukážeme, jak pojem limity souvisí s aritmetickými operacemi.

2.2.34. Věta (aritmetika limit). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (c) je-li $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Důkaz. (a) Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A , n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|b_n - B| < \varepsilon$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí obě uvedené nerovnosti.

Z trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.11) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.18 pro $K = 2$.

(b) Před vlastním ověřením tvrzení podle definice limity provedeme několik přípravných úvah. Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a je tedy podle Věty 2.2.25 omezená. Jinými slovy, existuje $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq L$. Úpravou výrazu $a_n b_n - AB$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti (Věta 1.5.11) dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \\ &\leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &= |b_n| |a_n - A| + |A| |b_n - B| \\ &\leq L |a_n - A| + |A| |b_n - B|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nyní zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Stejně jako v bodě (a) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$ a $|b_n - B| < \varepsilon$. Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí díky (2.8) $|a_n b_n - AB| < (L + |A|)\varepsilon$. Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Lemmatu 2.2.18 pro $K = L + |A|$.

(c) Obdobnými úpravami jako v důkazech předchozích tvrzení dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{a_n B - b_n A}{b_n B} \right| = \left| \frac{a_n B - AB + AB - Ab_n}{b_n B} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_n B - AB}{b_n B} \right| + \left| \frac{AB - Ab_n}{b_n B} \right| \\ &= \frac{1}{|b_n|} |a_n - A| + \frac{|A|}{|b_n| |B|} |b_n - B|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Podle definice limity nalezneme ke kladnému číslu $\frac{1}{2} |B|$ takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|B - b_n| < \frac{1}{2} |B|. \quad (2.10)$$

Podle Důsledku 1.5.12(a) a (2.10) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$||B| - |b_n|| \leq |B - b_n| < \frac{1}{2} |B|. \quad (2.11)$$

Vzhledem k tomu, že navíc platí $|B| - |b_n| \leq ||B| - |b_n||$, dostáváme podle (2.11) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnost $|B| - |b_n| < \frac{1}{2} |B|$, a tedy také

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}. \quad (2.12)$$

Položme

$$K = \max \left\{ \frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{B^2} \right\}. \quad (2.13)$$

Pak podle (2.9), (2.12) a (2.13) máme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| &\leq \frac{2}{|B|} |a_n - A| + \frac{2|A|}{B^2} |b_n - B| \\ &\leq K(|a_n - A| + |b_n - B|). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nyní zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$ a $|b_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, potom díky (2.14) máme

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B} \right| < 2K\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení pak plyne z Lemmatu 2.2.18. ■

V dalším textu se budeme někdy odkazovat na dílčí tvrzení (a), (b), (c) Věty 2.2.34 po řadě jako na větu o limitě součtu, větu o limitě součinu a větu o limitě podílu.

2.2.35. Příklad. Dokažte, že platí $\lim \frac{1}{n^2} = 0$.

Řešení. Tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.11 a věty o limitě součinu (Věta 2.2.34(b)) pro posloupnosti $\{a_n\} = \{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$. ♣

2.2.36. Podstatným předpokladem věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34) je konvergence posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. Uvedeme několik příkladů.

- Necht $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ a $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$. Pak jsou obě posloupnosti divergentní, ale $\lim a_n b_n = 1$.
- Necht $\{a_n\} = \{n^2\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$, a tedy $\{a_n b_n\} = \{n\}$. Pak $\{a_n\}$ a $\{a_n b_n\}$ divergují podle Věty 2.2.25 a $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.11.
- Necht $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{\frac{1}{n^2}\}$. Pak $\{a_n\}$ diverguje, $\{b_n\}$ konverguje podle Příkladu 2.2.35 a $\{a_n b_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ konverguje.

Situace vypadá obdobně i v případě ostatních aritmetických operací. Konstrukce příslušných příkladů není obtížná.

V dalším výkladu se nám budou hodit následující obecnější verze vět o limitě součtu a limitě součinu.

2.2.37. Věta. Necht $l \in \mathbb{N}$ a pro každé $j \in \{1, \dots, l\}$ je $\{a_n^j\}_{n=1}^\infty$ posloupnost splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^j = A_j \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l a_n^j = \sum_{j=1}^l A_j$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^l a_n^j = \prod_{j=1}^l A_j$.

Důkaz. (a) Použijeme matematickou indukci. Pro $l = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní jeho platnost pro $l \in \mathbb{N}$. Mějme posloupnosti $\{a_n^1\}, \dots, \{a_n^{l+1}\}$ s limitami $A_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l+1$. Podle indukčního předpokladu platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l a_n^j = \sum_{j=1}^l A_j. \quad (2.15)$$

Dále máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{l+1} a_n^j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^l a_n^j + a_n^{l+1} \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^l A_j \right) + A_{l+1} = \sum_{j=1}^{l+1} A_j, \end{aligned}$$

přičemž druhá rovnost plyne z (2.15) a Věty 2.2.34(a).

(b) Tvrzení lze dokázat obdobně. ■

2.2.38. Příklad. Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2+7}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{n^2+n}{2n^2+7} = \frac{n^2+n}{2n^2+7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n^2}}.$$

Podle Příkladu 2.2.10 je $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ a podle Příkladu 2.2.11 je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$. Podobně odvodíme $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{7}{n^2}) = 2$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.34(c)) dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{7}{n^2})} = \frac{1}{2}.$$

Při počítání limit posloupností obvykle zapisujeme výpočet stručněji. V našem příkladu by zkrácený zápis vypadal následovně:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{7}{n^2})} \quad (2.16)$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \quad (2.17)$$

$$= \frac{1 + 0}{2 + 7 \cdot 0} = \frac{1}{2}. \quad (2.18)$$

Napíšeme-li v průběhu výpočtu nejprve rovnost (2.16), musíme si být vědomi toho, že zatím nevíme, zda tato rovnost platí. Rovnost bude platit, pokud ukážeme, že obě limity ve zlomku na pravé straně existují vlastní a limita ve jmenovateli je nenulová. Podobně rovnost (2.17) bude platit, pokud ukážeme, že všechny limity jsou vlastní a výsledný výraz ve jmenovateli je nenulový. Hodnoty limit ve výrazu (2.17) však již známe a výpočet (2.18) ukazuje, že výraz ve jmenovateli je nenulový. Dostáváme tak platnost první rovnosti v (2.18), a díky tomu i platnost rovnosti (2.17). Odtud potom dostáváme platnost rovnosti (2.16), a tím korektnost celého řešení.

Při počítání limit musíme každý krok výpočtu zdůvodnit. Někdy jde jen o algebraickou úpravu počítaného výrazu, často pak používáme větu o aritmetice limit, případně již vypočítané limity. Bez zdůvodnění *není řešení úplné*. Později v pokročilejších částech skript již nebudeme podrobná zdůvodnění uvádět, což ale neznamená, že jsme je neprovedli. ♣

Následující výsledek obsahuje jednoduché, ale užitečné tvrzení o limitě posloupnosti definované jako součin omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou.

2.2.39. Věta. Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

Důkaz. Protože $\{b_n\}$ je omezená, existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $|b_n| \leq K$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tudíž platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| |b_n| < K \varepsilon.$$

Tedy podle Lemmatu 2.2.18 platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$. ■

2.2.40. Tvrzení Věty 2.2.39 neplatí z věty o limitě součinu (Věta 2.2.34(b)), protože posloupnost $\{b_n\}$ nemusí mít vlastní limitu.

2.2.41. Příklad. Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Řešení. Tvrzení plyne z Věty 2.2.39, neboť posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. ♣

Limita a uspořádání. V předchozích větách jsme uvedli několik důležitých souvislostí mezi pojmem limity a operacemi na množině reálných čísel. Nyní se zaměříme na vztah mezi limitou a uspořádáním reálných čísel.

2.2.42. Věta (limita a uspořádání). Necht $A, B \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

- (a) Necht $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.
- (b) Necht existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(B - A)$. Pak podle definice limity existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n < A + \varepsilon$. Dále opět podle definice limity existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n > B - \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \varepsilon = \frac{A + B}{2} = B - \varepsilon < b_n,$$

čímž je tvrzení (a) dokázáno.

(b) Předpokládejme pro spor, že platí $A < B$. Potom podle tvrzení (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$. Položme $m = \max\{n_0, n^*\}$. Pak dostáváme $a_m < b_m \leq a_m$, což je spor. ■

2.2.43. Věta 2.2.42 nám poskytuje možnost odhadnout shora nebo zdola hodnotu limity dané posloupnosti, o níž víme, že konverguje, ale jejíž limitu neznáme, pomocí jiné posloupnosti, jejíž limitu známe.

V tvrzení Věty 2.2.42(b) nelze nerovnosti $a_n \geq b_n$ a $A \geq B$ nahradit nerovnostmi $a_n > b_n$ a $A > B$. Položme například $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ a $\{b_n\} = \{0\}$. Potom zřejmě platí $a_n > b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, máme však $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

2.2.44. Věta (o dvou strážnících). Necht $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,
- (b) $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom je $\{c_n\}$ konvergentní a platí $\lim c_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu podle předpokladu (b) nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Odtud a z předpokladu (a) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_3$, platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

a tedy $|c_n - A| < \varepsilon$. Tím jsme ověřili, že platí $\lim c_n = A$. ■

Několik příkladů. V následujících příkladech použijeme právě odvozené výsledky a příklady samotné použijeme v dalších výpočtech.

2.2.45. Příklad. Spočítejte $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $1 < 1 + \frac{1}{n} < (1 + \frac{1}{n})^2$. Podle 1.7.12 tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Vzhledem k tomu, že $\lim 1 = \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$, dostáváme podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$. ♣

2.2.46. Příklad. Necht' $A \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že $A \geq 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

Řešení. Nezápornost čísla A plyne z Věty 2.2.42(b). Předpokládejme nejprve, že $A = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \varepsilon^k$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, díky monotonii odmocniny (vizte 1.7.12) platí $0 \leq \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$. Dostáváme tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = 0 = \sqrt[k]{A}$.

Nyní předpokládejme, že $A > 0$. Pak podle Příkladu 1.5.7 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} |\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}| &= |(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}) \cdot \frac{\sum_{j=1}^k (\sqrt[k]{a_n})^{k-j} (\sqrt[k]{A})^{j-1}}{\sum_{j=1}^k (\sqrt[k]{a_n})^{k-j} (\sqrt[k]{A})^{j-1}}| \\ &= \left| \frac{a_n - A}{\sum_{j=1}^k (\sqrt[k]{a_n})^{k-j} (\sqrt[k]{A})^{j-1}} \right| \leq \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}} |a_n - A|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Poslední nerovnost platí díky snadnému odhadu

$$\sum_{j=1}^k (\sqrt[k]{a_n})^{k-j} (\sqrt[k]{A})^{j-1} \geq (\sqrt[k]{A})^{k-1},$$

jenž vyplývá z nezápornosti členů posloupnosti $\{a_n\}$ a nezápornosti A . Odtud a použitím rovnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[k]{A})^{k-1}} |a_n - A| = 0$$

obdržíme podle Věty 2.2.44 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}| = 0$. Podle Věty 2.2.24 platí $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{A}) = 0$. Odtud díky větě o limitě součtu (Věta 2.2.34(a)) dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$. ♣

2.2.47. Příklad. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{n} \geq 1$, můžeme psát $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, kde $\theta_n \geq 0$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom podle binomické věty (Věta 1.5.6) platí

$$n = (1 + \theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2.$$

Protože platí $n-1 \geq \frac{n}{2}$, dostáváme

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \geq \frac{n^2}{4}\theta_n^2.$$

Odtud a z monotonie odmocniny (1.7.12) plyne $\frac{2}{\sqrt[n]{n}} \geq \theta_n$. Uvedená nerovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a tedy podle Příkladu 2.2.11, Příkladu 2.2.46 pro $k = 2$ a z věty o limitě součinu (Věta 2.2.34(b)) dostaneme $\lim \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 0$, takže podle Věty 2.2.44 máme $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$. Odtud plyne dokazované tvrzení. ♣

2.2.48. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Dokažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Řešení. Necht nejprve $c \geq 1$. Pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.29) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > c$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) a Příkladu 2.2.47 plyne $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Necht nyní $c \in (0, 1)$. Potom podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.34(c)) a podle již dokázaného tvrzení platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{c}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

♣

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice nevlastní limity. Posloupnost $\{a_n\} = \{n\}$ je sice divergentní, má však následující vlastnost. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. Vskutku, stačí pomocí Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.29) nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > K$. Obdobnou vlastnost má například posloupnost $\{b_n\} = \{-n^2\}$, přičemž nerovnost $a_n > K$ je nahrazena nerovností $b_n < K$. Obě vlastnosti můžeme chápat jako jisté typy limitního chování posloupnosti, i když jiné, než je konvergence k reálnému číslu, kterou jsme studovali v předcházejícím oddílu. Tyto typy limitního chování formálně zavedeme v následující definici.

2.3.1. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** ∞ (čteme plus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n > K.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** $-\infty$ (čteme mínus nekonečno), jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou plus nebo mínus nekonečno, říkáme, že **má nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞ , pak říkáme, že **diverguje** k ∞ . Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

2.3.2. Příklad. Dokažte, že $\lim \sqrt{n} = \infty$.

Řešení. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z Archimédovy vlastnosti reálných čísel (Věta 1.5.29) vyplývá existence $n_0 \in \mathbb{N}$ splňujícího $n_0 > K^2$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $\sqrt{n} \geq \sqrt{n_0} > |K| \geq K$, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

Rozšířená množina reálných čísel.

2.3.3. Některé poznatky z předcházejícího oddílu rozšíříme i na nevlastní limity. K tomuto účelu přidáme k množině reálných čísel dva nové prvky ∞ a $-\infty$ a odpovídajícím způsobem rozšíříme aritmetické operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a relaci uspořádání. Operace sčítání a odčítání nelze definovat pro *všechny* dvojice prvků z $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tak, aby tyto operace měly zároveň některé žádoucí vlastnosti (vizte Větu 2.3.5). Podobně je tomu s násobením a dělením. Aritmetické operace tedy budeme definovat jen pro některé dvojice prvků z $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Kritériem pro to, který výraz a jak definujeme, je platnost věty o aritmetice limit i pro nevlastní limity (vizte Větu 2.3.26).

2.3.4. Definice. **Rozšířenou množinou reálných čísel** budeme nazývat množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a budeme ji značit $\mathbb{R}^*$.

Operace sčítání. Sčítání rozšiřujeme takto:

- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}: \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}: -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$.

Operace odčítání. Operace odčítání dvou reálných čísel a, b je definována jako součet čísla a a čísla opačného k b , tj. $a - b = a + (-b)$. Pro rozšíření této operace postačí definovat čísla opačná k ∞ a $-\infty$ a použít předchozí rozšíření operace sčítání. Definujeme $-(\infty) = -\infty$ a $-(-\infty) = \infty$.

Operace násobení. Definujeme:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}: a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}: a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0): a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0): a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$.

Operace dělení. Operace dělení dvou reálných čísel a, b je definována jako součin čísla a a inverzního prvku k b , tj. $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$. Pro rozšíření operace dělení postačí tedy definovat $\frac{1}{\infty} = 0$ a $\frac{1}{-\infty} = 0$.

Následující výrazy tedy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Relace uspořádání. Definujeme:

- $\forall a \in \mathbb{R}^*: -\infty \leq a$,
- $\forall a \in \mathbb{R}^*: a \leq \infty$.

2.3.5. Věta. Necht $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Pak platí následující rovnosti, pokud je alespoň jedna strana příslušné rovnosti definována:

- (a) $x + y = y + x$,
- (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- (c) $xy = yx$,
- (d) $(xy)z = x(yz)$.

Důkaz. Dokážeme tvrzení (b). Předpokládejme, že $\infty \in \{x, y, z\}$. Pak $-\infty \notin \{x, y, z\}$, jinak by výrazy na levé i pravé straně nebyly definovány. Dále je levá i pravá strana rovna ∞ , takže rovnost platí. Podobně pokud $-\infty \in \{x, y, z\}$, pak $\infty \notin \{x, y, z\}$ a ověření rovnosti dokončíme obdobně. Zbývá možnost, kdy $x, y, z \in \mathbb{R}$. Pak jde o známou rovnost pro reálná čísla.

Ostatní tvrzení lze dokázat podobným rozбором případů. ■

2.3.6 (supremum a infimum v $\mathbb{R}^*$). Relace $\leq$ na $\mathbb{R}^*$, jak jsme ji právě definovali, je zřejmě reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní, a proto je relace $\leq$ uspořádáním na množině $\mathbb{R}^*$ ve smyslu Definice 1.4.4. Navíc jde zřejmě o lineární uspořádání podle téže definice. Pojem suprema a infima máme tedy definován i v tomto případě podle Definice 1.4.12.

Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem supremu v množině $\mathbb{R}$ shoduje s pojmem suprema v $\mathbb{R}^*$. Shora neomezená podmnožina $\mathbb{R}$ nemá v $\mathbb{R}$ supremum, v $\mathbb{R}^*$ je však tímto supremem ∞ . Podobně zdola neomezená množina v $\mathbb{R}$ má infimum v $\mathbb{R}^*$ rovné $-\infty$. Konečně pro prázdnou množinu platí podle definice $\inf \emptyset = \infty$ a $\sup \emptyset = -\infty$, pokud uvažujeme supremum a infimum vzhledem k $\mathbb{R}^*$.

2.3.7. Úmluva. V následujícím textu budeme suprema a infima množin uvažovat vzhledem k množině $\mathbb{R}^*$. Pojmy omezenosti shora, omezenosti zdola, omezenosti podmnožin $\mathbb{R}$ však budeme uvažovat jako doposud vzhledem k množině $\mathbb{R}$.

2.3.8 (absolutní hodnota v $\mathbb{R}^*$). Absolutní hodnotu rozšíříme na $\mathbb{R}^*$ tak, že klade-me $|\infty| = \infty$ a $|\infty| = \infty$.

Základní vlastnosti limit podruhé.

2.3.9. Definice 2.3.1 je doplněním Definice 2.2.3 o případy, kdy limitou je buď ∞ , nebo $-\infty$. Víme tedy, co znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A , kde buď $A \in \mathbb{R}$, nebo $A = \infty$, nebo $A = -\infty$. Následující věta ukazuje, že věta o jednoznačnosti limity (Věta 2.2.6) zůstává v platnosti i pro takto rozšířenou definici.

2.3.10. Věta (jednoznačnost limity podruhé). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, která má limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$ a zároveň má limitu rovnou $B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí $A = B$.

Důkaz. Dokázali jsme již, že nejvýše jedno reálné číslo může být limitou posloupnosti $\{a_n\}$ (Věta 2.2.6). Zbývá dokázat, že nemůže nastat žádný z případů:

- (a) $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞ ,
- (b) $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu $-\infty$,
- (c) $\{a_n\}$ má limitu ∞ a současně $-\infty$.

Případ (a). Předpokládejme pro spor, že platí (a). Podle Věty 2.2.25 je $\{a_n\}$ omezená, a tedy je omezená shora. Tudíž existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože ale současně má posloupnost $\{a_n\}$ limitu ∞ , existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $a_n > K$, což je spor.

Případy (b) a (c). Důkaz je obdobný. ■

2.3.11. Označení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$. Ke korektnímu zavedení tohoto značení potřebujeme Větu 2.3.10 (pro srovnání vizte 2.2.8).

2.3.12. Pro každou posloupnost $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty, \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

2.3.13. Definice. Necht $c \in \mathbb{R}$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $B(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $B(\infty, \varepsilon) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. **Okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $B(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

2.3.14. Lemma. Necht $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Důkaz. Rozlišíme následující případy.

Případ $\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Je-li také $A \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2}|\tilde{A} - A|$. Potom zřejmě platí $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = \infty$ nebo $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět dostaneme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = \infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{|A|+1}$. Potom $A < |A| + 1 = \frac{1}{\varepsilon}$, a tedy $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět obdržíme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = -\infty$. Tvrzení lze dokázat obdobně jako pro $\tilde{A} = \infty$. ■

Zavedení pojmu okolí (Definice 2.3.13) nám umožňuje ekvivalentně formulovat pojem limity posloupnosti (vlastní i nevlastní). To je obsahem následující věty.

2.3.15. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \in B(A, \varepsilon). \quad (2.20)$$

Důkaz. *Případ* $A \in \mathbb{R}$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, výrok $a_n \in B(A, \varepsilon)$ ekvivalentní výroku $|a_n - A| < \varepsilon$. Takže v tomto případě je formule (2.20) shodná a formulí (2.1).

Případ $A = \infty$. Předpokládejme nejprve, že $\lim a_n = A$. Ověříme (2.20). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Položme $K = \frac{1}{\varepsilon}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n > K$. To podle definice okolí bodu ∞ znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Odtud plyne (2.20).

Nyní předpokládejme, že platí (2.20). Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, následujícím způsobem. Je-li $K \leq 0$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, libovolně. Je-li $K > 0$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{K}$. V obou případech pak platí $\frac{1}{\varepsilon} \geq K$. K tomuto ε pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$, a tedy $a_n > K$. Odtud plyne $\lim a_n = A$.

Případ $A = -\infty$. Důkaz lze provést obdobně jako v předchozím případě. ■

Ve zbývajících částech tohoto oddílu uvedeme obecnější varianty některých vět, které již známe z předcházejícího textu. Zatímco se však dříve uvedená tvrzení týkala pouze vlastních limit, zde budou věty formulovány i pro nevlastní limity. Nejprve uvedeme obdobu Věty 2.2.16.

2.3.16. Věta. Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$. Pak také $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n = a_n$, a tedy $b_n \in B(A, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že $\lim b_n = A$. ■

2.3.17. Z předchozí věty plyne následující zobecnění 2.2.17. Změníme-li u posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ splňující $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ konečně mnoho členů, pak má nově vzniklá posloupnost opět limitu A .

Následující výsledek je zobecněním Věty 2.2.22.

2.3.18. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim |a_n| = |A|$.

Důkaz. Je-li $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení plyne z Věty 2.2.22. Necht $A = \infty$. Díky předpokladu $\lim a_n = A$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \geq 0$, a tedy $|a_n| = a_n$. Tudíž podle Věty 2.3.16 platí $\lim |a_n| = \lim a_n$. Protože $\lim a_n = \infty$ a $|\infty| = \infty$, plyne odtud, že $\lim |a_n| = |A|$.

Konečně necht $A = -\infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \in B(-\infty, \varepsilon)$, a tedy také $-a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $-a_n > 0$, a tedy $|a_n| = -a_n$. To

znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| \in B(\infty, \varepsilon)$, tedy $\lim |a_n| = \infty$. Protože $|A| = \infty$, dokázali jsme, že $\lim |a_n| = |A|$. ■

Následující věta je jistou „jednostrannou“ obdobou Věty 2.2.25.

2.3.19. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $\lim a_n = \infty$. Pak je $\{a_n\}$ zdola omezená.

Důkaz. Položme $K = 1$. Podle Definice 2.3.1 k tomuto K nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > 1$. Množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je podle Věty 1.6.14 omezená. Necht $M \in \mathbb{R}$ je některá její dolní závora. Potom

$$a_n \geq \begin{cases} M, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ 1, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $a_n \geq \min\{M, 1\}$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. ■

2.3.20. Obdobně jako ve Větě 2.3.19 lze dokázat, že je-li $\{a_n\}$ posloupnost a $\lim a_n = -\infty$, potom je $\{a_n\}$ shora omezená.

Limita vybrané posloupnosti podruhé. Následující věta je zobecněním Věty 2.2.30, které zahrnuje i nevlastní limity.

2.3.21. Věta. Necht $A \in \mathbb{R}^*$, $\{a_n\}$ je posloupnost splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n^*: a_n \in B(A, \varepsilon). \quad (2.21)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n^*$, platí díky Lemmatu 2.2.31 nerovnost $n_k \geq k \geq n^*$, a tedy podle (2.21) dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n^*$, platí $a_{n_k} \in B(A, \varepsilon)$. Tím je věta dokázána. ■

2.3.22. Tvrzení Věty 2.3.21 nelze obrátit. Jako příklad může opět posloužit posloupnost $\{(-1)^n\}$ a její podposloupnost $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^\infty$. Nicméně platí následující tvrzení, které v dalším textu ještě využijeme (například v Kapitole 3).

2.3.23. Věta. Necht $l \in \mathbb{N}$ a $\{n_k^1\}_{k=1}^\infty, \{n_k^2\}_{k=1}^\infty, \dots, \{n_k^l\}_{k=1}^\infty$ jsou rostoucí posloupnosti přirozených čísel takové, že

$$\{n_k^j; j \in \{1, \dots, l\}, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Necht $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel taková, že pro každé $j \in \{1, \dots, l\}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k^j} = A$. Potom $\lim a_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu podle definice limity nalezneme $k_1, k_2, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_1: a_{n_k^1} &\in B(A, \varepsilon), \\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_2: a_{n_k^2} &\in B(A, \varepsilon), \\ &\vdots \\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_l: a_{n_k^l} &\in B(A, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Položme $n_0 = \max\{n_{k_1}^1, n_{k_2}^2, \dots, n_{k_l}^l\}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Díky podmínce (2.22) existují $j \in \{1, \dots, l\}$ a $m \in \mathbb{N}$ taková, že $n = n_m^j$. Potom platí

$$n_m^j = n \geq n_0 \geq n_{k_j}^j.$$

Posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí, a proto $m \geq k_j$. Podle j -té podmínky v (2.23) dostaneme $a_n = a_{n_m^j} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

2.3.24. Speciálním případem předchozí věty je následující tvrzení. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost splňující

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = A \in \mathbb{R}^*.$$

Potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

2.3.25. Ve Větě 2.3.23 je důležité, že počet posloupností $\{n_k^1\}_{k=1}^\infty, \{n_k^2\}_{k=1}^\infty, \dots, \{n_k^l\}_{k=1}^\infty$ je konečný. Pro nekonečný počet těchto posloupností tvrzení neplatí, jak ukazuje Příklad 2.5.10.

Aritmetika limit podruhé. Následující věta je zobecněním věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34).

2.3.26. Věta (aritmetika limit). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- (a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (c) je-li $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Tuto větu lze dokázat obdobně jako Větu 2.2.34. Uvedeme pouze důkaz tvrzení (b), a to v případě, kdy $A \in \mathbb{R}, A < 0$, a $B = -\infty$.

Chceme tedy dokázat, že $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$. Necht $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = -\frac{1}{2}A$. Potom $\varepsilon > 0$. Z předpokladu $\lim a_n = A$ a z definice limity vyplývá existence takového $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) = (\frac{3}{2}A, \frac{1}{2}A)$. Podobně z předpokladu $\lim b_n = -\infty$ plyne existence takového $n_2 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$, platí $b_n < \min\{0, \frac{2K}{A}\}$. Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$a_n \cdot b_n > \frac{1}{2}A \cdot b_n > K.$$

Tím je dokázáno, že $\lim(a_n \cdot b_n) = \infty$. ■

2.3.27. Víme-li pouze, že $\lim a_n = \infty$ a $\lim b_n = -\infty$, pak odtud nemůžeme vyvodit žádnou informaci o existenci nebo hodnotě $\lim(a_n + b_n)$. Necht' například $A \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + A\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim(a_n + b_n) = A.$$

Výraz $\infty - \infty$ nelze tedy definovat tak, aby platila věta o limitě součtu. Existence a případně i hodnota $\lim(a_n + b_n)$ závisí na jemnějším chování posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) vynechat.

2.3.28. Necht' $l \in \mathbb{N}$ a pro každé $j \in \{1, \dots, l\}$ je $\{a_n^j\}_{n=1}^\infty$ posloupnost splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^j = A_j \in \mathbb{R}^*$. Potom platí:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l a_n^j = \sum_{j=1}^l A_j$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^l a_n^j = \prod_{j=1}^l A_j$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Tvrzení lze dokázat obdobně jako Větu 2.2.37.

Podle odstavce 2.3.27 pro výpočet $\lim \frac{a_n}{b_n}$, kde $\lim b_n = 0$, nemůžeme bezprostředně použít větu o limitě podílu (Věta 2.3.26(c)), nicméně platí následující věta.

2.3.29. Věta. Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$,
- $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $A > 0$,
- $\lim b_n = 0$,
- existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n > 0$.

Potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ je dobře definována, neboť $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Případ $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}A$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1: a_n > A - \varepsilon = A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A.$$

Položme $L = \max\{1, K\}$. Nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: b_n < \frac{A}{2L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{b_n} > \frac{1}{2}A \cdot \frac{1}{\frac{A}{2L}} = L \geq K.$$

Tím jsme ověřili, že $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Případ $A = \infty$. Zvolme opět $K \in \mathbb{R}$ a položme $L = \max\{1, K\}$. Nalezneme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1: a_n &> 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2: b_n &< \frac{1}{L}.\end{aligned}$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > 1 \cdot \frac{1}{b_n} > 1 \cdot L = L \geq K.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

Limita a uspořádání podruhé. Následující větu je možno dokázat obdobně jako Větu 2.2.42.

2.3.30. Věta (limita a uspořádání). Necht $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti splňující $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.

- (a) Necht $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.
- (b) Necht existuje $n^* \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n^*$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.

Pro nevlastní limity platí následující dvě varianty věty o dvou strážnících.

2.3.31. Věta. Necht $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n$,
- (b) $\lim a_n = \infty$.

Potom platí $\lim c_n = \infty$.

Důkaz. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$, platí $a_n > K$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_0, n_1\}$, pak platí $c_n \geq a_n$, a tedy $c_n > K$. Tím je dokázáno, že $\lim c_n = \infty$. ■

Podle předchozí věty stačí nalézt pouze jednoho „strážníka“ k důkazu tvrzení $\lim c_n = \infty$. Následující věta je její zřejmou obdobou pro posloupnosti s limitou $-\infty$.

2.3.32. Věta. Necht $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

- (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n \geq c_n$,
- (b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom platí $\lim c_n = -\infty$.

2.3.33. Definice. Necht $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^\infty$ nazýváme **geometrickou posloupností**.

2.3.34. Příklad (limita geometrické posloupnosti). Dokažte, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } q \in (1, \infty), \\ 1, & \text{pokud } q = 1, \\ 0, & \text{pokud } q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje,} & \text{pokud } q \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Řešení. *Případ* $q \in (1, \infty)$. Můžeme psát $q = 1 + h$, kde $h > 0$. Odtud a z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne $q^n = (1 + h)^n \geq 1 + hn$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + hn) = \infty$, a tedy podle Věty 2.3.31 máme $\lim q^n = \infty$.

Případ $q \in (0, 1)$. Podle předchozího odstavce platí $\lim (q^{-1})^n = \infty$, neboť $q^{-1} \in (1, \infty)$. Aplikací Věty 2.3.26(c) dostaneme

$$\lim q^n = \lim \frac{1}{(q^{-1})^n} = 0.$$

Případ $q \in \{0, 1, -1\}$. Pro $q = 0$ a $q = 1$ je tvrzení zřejmé. Pokud $q = -1$, pak $\{q^n\} = \{(-1)^n\}$. Neexistence $\lim (-1)^n$ jakožto prvku $\mathbb{R}$ byla ukázána v Příkladu 2.2.15, neexistence $\lim (-1)^n$ jakožto prvku $\mathbb{R}^*$, o kterou nyní jde, plyne z Věty 2.3.21.

Případ $q \in (-1, 0)$. Pak $\lim |q^n| = \lim |q|^n = 0$, a tedy podle Věty 2.2.24 také $\lim q^n = 0$.

Případ $q \in (-\infty, -1)$. Pak $q^2 > 1$, a tedy máme $\lim q^{2n} = \lim (q^2)^n = \infty$. Potom platí podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.26(b)) $\lim q^{2n+1} = \lim q(q^2)^n = -\infty$. Nalezli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami, a tedy limita původní posloupnosti neexistuje. ♣

2.3.35 (úroky). Vraťme se nyní k posloupnosti $\{a_n\}$ z 2.2.1, která splňuje $a_n = (1 + \tilde{p})^n a$, $n \in \mathbb{N}$. Jde o geometrickou posloupnost, jejíž limita je podle Příkladu 2.3.34 rovna ∞ , neboť $1 + \tilde{p} > 1$.

Následující tvrzení dává do souvislosti pojmy limity a suprema množiny. Obdobné tvrzení platí i pro infimum.

2.3.36. Věta. Necht $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $G \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) Platí $G = \sup M$.
- (ii) Prvek G je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}$ bodů z M splňující $\lim x_n = G$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Prvek G je zřejmě horní závorou M . Pokud $G = \infty$, pak M není shora omezená, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ splňující $x_n > n$. Podle Věty 2.3.31 je pak $\lim x_n = \infty = G$.

V případě, že $G \in \mathbb{R}$, existuje podle definice suprema ke každému $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in M$ splňující $x_n > G - \frac{1}{n}$. Protože G je horní závorou M , platí $x_n \leq G$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy máme $\lim x_n = G$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $G' \in \mathbb{R}$, $G' < G$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ pro které $x_{n_0} > G'$. V případě $G = \infty$ to plyne přímo z definice, v případě $G \in \mathbb{R}$ stačí v definici vzít $\varepsilon = G - G'$. Našli jsme tedy prvek z množiny M , který je větší než G' , čímž jsme ověřili podmínku (b) z 1.5.16. ■

2.3.37. Příklad. Necht $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim a_n = A$. Dokažte, že potom $A \geq 0$ a platí

$$\lim \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[k]{A}, & \text{pokud } A \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{pokud } A = \infty. \end{cases}$$

Řešení. Pokud $A \in \mathbb{R}$, pak tvrzení vyplývá z Příkladu 2.2.46. Předpokládejme tedy, že $A = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > |K|^k$. Potom podle monotonie odmocniny (vizte 1.7.12) pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $\sqrt[k]{a_n} > |K| \geq K$. Odtud plyne $\lim \sqrt[k]{a_n} = \infty$. ♣

2.3.38. Příklad. Vypočítejte $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Řešení. Podle Příkladu 2.3.2 a Příkladu 2.3.37 dostaneme $\lim \sqrt{n} = \infty$. Odtud a z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) dále plyne, že $\lim \sqrt{n+1} = \infty$. To znamená, že pro výpočet zadané limity nemůžeme užít větu o aritmetice limit přímočarým způsobem. Upravíme proto nejprve zadaný výraz tak, aby bylo možné bezprostředně použít větu o aritmetice limit. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pak podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.26(c)) můžeme počítat

$$\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

♣

2.3.39 (zobecněná posloupnost). Na závěr tohoto oddílu ještě uvedeme následující možné rozšíření pojmu posloupnost. Posloupností reálných čísel budeme rozumět každé zobrazení množiny $A \subset \mathbb{Z}$ do $\mathbb{R}$, přičemž A je zdola omezená a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\} \subset A$. Obecnější definicí chceme postihnout zejména následující dva případy: jednak posloupnosti tvaru $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (značíme $\{a_n\}_{n=0}^\infty$) a jednak posloupnosti, jejichž členy jsou definovány pro každé přirozené n vyjma konečné množiny, například posloupnost $\{\frac{1}{n-7}\}$, jejíž definiční obor je $\mathbb{N} \setminus \{7\}$. V těchto případech zůstávají v platnosti všechny poznatky o posloupnostech, které jsme dosud odvodili.

2.4. Hlubší věty o limitách

Limita monotónní posloupnosti. Uvedeme nejprve důležitou vlastnost monotónních posloupností.

2.4.1. Věta (limita monotónní posloupnosti). Necht $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Důkaz. Rozlišíme následující možnosti.

Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a není shora omezená. Potom $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > K$. Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_n \geq a_{n_0} > K$. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \infty$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a je shora omezená. Označme $A = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pak platí $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice suprema nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A + \varepsilon$ platí dokonce pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy našli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. V tomto případě lze tvrzení dokázat obdobně. Můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 1.5.17 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.26(b)) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

■

2.4.2. Důsledek. Necht posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená nebo nerostoucí zdola omezená. Potom je $\{a_n\}$ konvergentní.

Důkaz. Necht $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost. Z Věty 2.4.1 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ nerostoucí a zdola omezená, pak lze důkaz provést obdobně. ■

Věta 2.4.1 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

2.4.3. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Spočtete limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána rekurentně: $a_1 = \sqrt{c}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná. Člen a_1 je dobře definován a je kladný. Předpokládáme-li, že člen a_n je definován a je kladný, pak je definován i člen a_{n+1} a je kladný. Podle principu matematické indukce a 1.4.35 je tedy posloupnost $\{a_n\}$ dobře definovaná a její členy jsou nezáporné.

Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Matematickou indukci dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$, odkud podle 2.1.12 vyplyne dokazovaná vlastnost. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$. Potom máme

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{a_{n+1} + c} = a_{n+2}.$$

Odtud plyne tvrzení.

Posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Matematickou indukci dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Zřejmě platí nerovnost $a_1 < \sqrt{c} + 1$. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Potom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c} + 1)^2} = \sqrt{c} + 1. \end{aligned}$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c} + 1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady Důsledku 2.4.2. Posloupnost $\{a_n\}$ má tedy vlastní limitu. Označme ji symbolem A .

Výpočet limity. Z rekurentní definice posloupnosti plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Číslo A tedy splňuje kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$ nebo $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$. Dle Věty 2.2.42(b) pro $B = 0$ a $b_n = 0, n \in \mathbb{N}$, platí $A \geq 0$. Tedy neplatí $A = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$, protože výraz na pravé straně je záporné číslo. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$. ♣

2.4.4. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{b_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$b_1 = -1, \quad b_{n+1} = -b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim b_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení Příkladu 2.4.3 odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{b_n\}$ ale není rovna 0, neboť $b_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

2.4.5. Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dokažte, že platí:

- $\{a_n\}$ je omezená a rostoucí,
- $\{b_n\}$ je omezená a klesající,
- $\lim a_n = \lim b_n \in \mathbb{R}$.

Řešení. Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne, že

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n \frac{-1}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Odtud dostaneme

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Tedy

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n < \frac{n+2}{n+1}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tudíž platí

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti (Příklad 1.8.10) plyne odhad

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Nerovnost lze přepsat ve tvaru

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

a tedy

$$\frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2},$$

jinými slovy,

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Omezenost posloupností. Z monotonie posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a jejich definice dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$

Odtud plyne omezenost obou posloupností.

Existence společné vlastní limity. Z Důsledku 2.4.2 plyne, že existují vlastní limity $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.42) platí $A, B \in [2, 4]$. Podle věty o limitě podílu (Věta 2.3.26(c)) tedy dále platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Podle definice posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Tedy $A = B$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.4.6. Definice. Označíme

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z Příkladu 2.4.5 vyplývá, že číslo e je dobře definováno. Nazýváme jej **Eulerovým číslem**.

2.4.7. Věta (Bolzano²–Weierstrass³). Necht $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.

Důkaz. Zkonstruujeme pomocné posloupnosti $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí:

- (a) $\alpha_k \leq \beta_k$,
- (b) $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = [\alpha_k, \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)]$, nebo $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] = [\frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_k]$,
- (c) množina $\{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$ je nekonečná.

Konstrukce pomocných posloupností. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, a proto existují $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_1 \leq a_n \leq \beta_1$. Potom platí $\{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\alpha_1, \beta_1]\} = \mathbb{N}$, což je nekonečná množina.

Předpokládáme, že pro $k \in \mathbb{N}$ máme již zvolena čísla α_k a β_k a platí (c). Je-li množina

$$L = \{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\alpha_k, \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)]\}$$

nekonečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ a $\beta_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$. Je-li množina L konečná, pak je množina

$$P = \{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k), \beta_k]\}$$

nekonečná. Podle (c) je totiž množina

$$L \cup P = \{j \in \mathbb{N}; a_j \in [\alpha_k, \beta_k]\}$$

nekonečná. V tomto případě položíme $\alpha_{k+1} = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$ a $\beta_{k+1} = \beta_k$. Uvedený postup zaručuje splnění podmínek (a)–(c) i pro $k+1$. Tím je konstrukce provedena (vizte 1.4.37).

Limita pomocných posloupností. Podle (a) a (b) je $\{\alpha_k\}$ neklesající a $\{\beta_k\}$ nerostoucí. Navíc opět podle (b) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\beta_k - \alpha_k = 2^{-(k-1)}(\beta_1 - \alpha_1)$ a také $\alpha_1 \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_1$. Posloupnosti $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$ jsou tedy omezené. Tudíž existují

²Bernard Bolzano (1781–1848)

³Karl Weierstrass (1815–1897)

vlastní limity $\lim \alpha_k$ a $\lim \beta_k$, které po řadě označíme α a β . Z věty o aritmetice limit plyne, že $\lim(\beta_k - \alpha_k) = \beta - \alpha$. Platí také

$$\lim(\beta_k - \alpha_k) = \lim \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}} = 0,$$

takže $\alpha = \beta$.

Konstrukce vybrané posloupnosti. Položme $n_1 = 1$ a předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ taková, že pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Podle výše uvedené konstrukce je množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ nekonečná. Tudíž také množina $\{n \in \mathbb{N}; n > n_k, a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná. Tedy existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Dle věty o dvou strážnících tedy platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha$. Protože $\alpha \in \mathbb{R}$, našli jsme konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. ■

Limes superior a limes inferior.

2.4.8. Necht $\{a_n\}$ je shora omezená posloupnost. Položíme-li $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existuje $\lim b_n$. Necht je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Položíme-li $c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost, a tedy $\lim c_n$ opět existuje. Tyto úvahy ukazují, že následující definice je korektní, neboť v ní uvedené limity existují.

2.4.9. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Pak definujeme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ shora omezená,} \\ \infty, & \text{není-li } \{a_n\} \text{ shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, & \text{je-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{není-li } \{a_n\} \text{ zdola omezená.} \end{cases}$$

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme místo symbolů $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ psát pouze $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

2.4.10. Poznámka. V literatuře se často vyskytují symboly $\overline{\lim} a_n$ a $\underline{\lim} a_n$ označující $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$, v našem textu je ale nebudeme používat.

2.4.11. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Na rozdíl od limity posloupnosti, která nemusí existovat, hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují vždy a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$. Z definice limes inferior a limes superior plyne, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat, jak ukazuje následující příklad.

2.4.12. Příklad. Dokažte, že $\limsup(-1)^n = 1$ a $\liminf(-1)^n = -1$.

Řešení. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|(-1)^n| = 1$. Odtud vyplývá, že

$$\limsup(-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{(-1)^k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}.$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje sudé číslo $k \geq n$. To znamená, že

$$\sup\{(-1)^k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} = 1,$$

a tedy

$$\limsup(-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Obdobně lze dokázat, že $\liminf(-1)^n = -1$. ♣

2.4.13. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Rozlišíme následující případy.

Případ $A \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.2.25 omezená. Uvažujme posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ definované v 2.4.8. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > A - \varepsilon$, z definice infima dostáváme nerovnost $c_{n_0} \geq A - \varepsilon$. Podobně lze odvodit nerovnost $b_{n_0} \leq A + \varepsilon$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$A - \varepsilon \leq c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.42(b)) dostáváme

$$A - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq A + \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně, platí podle Lemmatu 1.5.14 $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Případ $A = \infty$. Pak $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je omezená zdola (Věta 2.3.19). Tedy podle definice dostáváme $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = \lim c_n$. Necht $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$, a tedy také $c_n \geq K$. Odtud plyne $\lim c_n = \infty$, a tudíž $\liminf a_n = \infty$.

Případ $A = -\infty$. Postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

$\Leftarrow$ *Případ $A \in \mathbb{R}$.* Potom je podle definice limes superior a limes inferior posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Necht posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou definovány stejně jako v 2.4.8. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$. Navíc z předpokladu vyplývá, že $\lim c_n = \lim b_n = A$. Pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy dostáváme $\lim a_n = A$.

Případ $A = \infty$. Potom je podle Věty 2.3.19 posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, takže je možné definovat posloupnost $\{c_n\}$ jako v 2.4.8. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n$. Z definice limes inferior navíc víme, že $\liminf a_n = \lim c_n$, a tedy podle předpokladu platí $\lim c_n = \infty$. Podle Věty 2.3.31 tedy platí $\lim a_n = \infty$.

Případ $A = -\infty$. Tvrzení lze dokázat obdobně jako v případě $A = \infty$, přičemž místo Věty 2.3.31 je třeba použít Větu 2.3.32. ■

2.4.14. Věta. Necht $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti. Potom

- (a) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$, pokud je výraz na levé straně definován,
- (b) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (b). Nejprve předpokládejme, že $\limsup x_n + \limsup y_n = \infty$. Potom je dokazovaná nerovnost zřejmá. Předpokládejme tedy, že $\limsup x_n + \limsup y_n < \infty$. Potom jsou $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ shora omezené, a tedy také posloupnost $\{x_n + y_n\}$ je shora omezená. Takže platí

$$\limsup(x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k + y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}. \quad (2.24)$$

Označme

$$z_n = \sup\{x_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} + \sup\{y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom je posloupnost $\{z_n\}$ nerostoucí, a tedy podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) má limitu. Navíc z Věty 1.5.21(a) plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sup\{x_k + y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq z_n.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k + y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z_n. \quad (2.25)$$

Z definice limes superior a věty o limitě součtu (Věta 2.3.26(a)) pak dostáváme

$$\lim z_n = \limsup x_n + \limsup y_n. \quad (2.26)$$

Konečně z (2.24), (2.25) a (2.26) plyne dokazované tvrzení.

Tvrzení (a) je možné dokázat obdobně. ■

2.4.15. Věta. Necht $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti. Předpokládejme, že platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: x_n \leq y_n.$$

Potom $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ a $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

Důkaz. Odvodíme pouze první nerovnost, druhou lze dokázat obdobně. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora neomezená, pak $\limsup y_n = \infty$ a nerovnost zřejmě platí. Pokud je posloupnost $\{y_n\}$ shora omezená, pak je shora omezená i posloupnost $\{x_n\}$. Dokazovaná nerovnost potom plyne z nerovnosti

$$\sup\{x_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\} \leq \sup\{y_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,$$

a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)). ■

2.4.16. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost.

- (a) Pro každé $A \in \mathbb{R}$ splňující $A < \liminf a_n$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $A < a_n$.

- (b) Pro každé $B \in \mathbb{R}$ splňující $B > \limsup a_n$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $B > a_n$.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že $A \in \mathbb{R}$ a $A < \liminf a_n$. Potom $\liminf a_n > -\infty$, a tedy $\liminf a_n = \lim c_n$, kde $c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. Podle Věty 2.3.30 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $c_{n_0} > A$. Pak platí, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, máme $a_n > A$.

- (b) Důkaz lze provést obdobně jako v (a). ■

Hromadná hodnota.

2.4.17. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ z posloupnosti $\{a_n\}$ taková, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

2.4.18. Necht $A \in \mathbb{R}^*$, $\{a_n\}$ je posloupnost a $\lim a_n = A$. Potom je limita každé podposloupnosti rovna A , a proto $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

2.4.19. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ je její podposloupnost. Potom platí $H(\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty) \subset H(\{a_n\})$, neboť vybraná posloupnost z podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ je také vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}$. Jsou-li totiž $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ a $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ rostoucí posloupnosti přirozených čísel, pak také $\{n_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

2.4.20. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $m \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^\infty) = H(\{a_n\}).$$

Řešení. Inkluze $\subset$. Posloupnost $\{a_{n+m}\}_{n=1}^\infty$ je podposloupností posloupnosti $\{a_n\}$, takže inkluze $H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^\infty) \subset H(\{a_n\})$ plyne z 2.4.19.

Inkluze $\supset$. Necht $A \in H(\{a_n\})$. Pak existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Posloupnost přirozených čísel $\{n_{j+m}\}_{j=1}^\infty$ je rostoucí, takže podle Věty 2.3.21 platí $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{j+m}} = A$. Položme $p_j = n_{j+m} - m$ pro $j \in \mathbb{N}$. Poněvadž podle Lemmatu 2.2.31 pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $n_{j+m} \geq j + m > m$, je $\{p_j\}_{j=1}^\infty$ rostoucí posloupností přirozených čísel. Potom posloupnost $\{a_{p_j+m}\}_{j=1}^\infty = \{a_{n_{j+m}}\}_{j=1}^\infty$ konverguje k A a je vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_{n+m}\}_{n=1}^\infty$. Platí tedy $A \in H(\{a_{n+m}\}_{n=1}^\infty)$. ♣

2.4.21. Příklad. Dokažte, že $H(\{(-1)^n\}) = \{-1, 1\}$.

Řešení. Protože podposloupnosti $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^\infty$ a $\{(-1)^{2k+1}\}_{k=1}^\infty$ posloupnosti $\{(-1)^n\}$ splňují $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k} = 1$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k+1} = -1$, dostáváme inkluzi $\{-1, 1\} \subset H(\{(-1)^n\})$.

Opačnou inkluzi dokážeme sporem. Předpokládejme pro spor, že existuje $A \in H(\{(-1)^n\}) \setminus \{-1, 1\}$. Potom existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{n_k} = A$. Díky Lemmatu 2.3.14 nalezneme $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon_1 >$

0, takové, že $-1 \notin B(A, \varepsilon_1)$ a $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 > 0$, takové, že $1 \notin B(A, \varepsilon_2)$. Položme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Potom $B(A, \varepsilon) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí buď $(-1)^{n_k} = 1$, nebo $(-1)^{n_k} = -1$, a tedy $(-1)^{n_k} \notin B(A, \varepsilon)$, což je ve sporu s tím, že $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{n_k} = A$. Odtud plyne $H(\{(-1)^{n_k}\}) \subset \{-1, 1\}$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.4.22. Příklad. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ je posloupnost taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a \leq a_n \leq b$, a $A \in H(\{a_n\})$. Dokažte, že potom $A \in [a, b]$.

Řešení. Necht $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Položme $b_k = a$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = a$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \geq b_k$. Podle Věty 2.2.42(b) platí $A \geq a$. Obdobně lze dokázat, že $A \leq b$. ♣

2.4.23. Věta. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\limsup a_n, \liminf a_n \in H(\{a_n\})$ a pro každé $y \in H(\{a_n\})$ platí $\liminf a_n \leq y \leq \limsup a_n$.

Důkaz. Označme $\limsup a_n = A$. Rozlišíme několik případů.

Případ $A \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a $\lim b_n = A$. Induktivně sestrojíme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|A - a_{n_k}| < \frac{2}{k}. \quad (2.27)$$

Protože $\lim b_n = A$, nalezneme $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $A \leq b_{m_1} < A + 1$. Díky definici b_{m_1} nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq m_1$, splňující $b_{m_1} \geq a_{n_1} > b_{m_1} - 1$. Pak platí

$$|A - a_{n_1}| \leq |A - b_{m_1}| + |b_{m_1} - a_{n_1}| < 1 + 1 = 2.$$

Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ již máme určeno n_k . Protože $\lim b_n = A$, nalezneme $m_k \in \mathbb{N}$, $m_k > n_k$, takové, že $b_{m_k} < A + \frac{1}{k+1}$. Díky definici b_{m_k} nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} \geq m_k$, takové, že $b_{m_k} \geq a_{n_{k+1}} > b_{m_k} - \frac{1}{k+1}$. Pak platí $n_{k+1} > n_k$ a

$$|A - a_{n_{k+1}}| \leq |A - b_{m_k}| + |b_{m_k} - a_{n_{k+1}}| < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1}.$$

Tím je konstrukce posloupností provedena.

Potom díky (2.27) dostáváme $\lim a_{n_k} = A$. Odtud vyplývá, že $A \in H(\{a_n\})$.

Případ $A = \infty$. Potom není $\{a_n\}$ shora omezená. Existuje tedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ jsme již určili přirozené číslo n_k . Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N}, j > n_k\}$ není shora omezená. Můžeme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, takové, že $a_{n_{k+1}} > k + 1$. Podle Věty 2.3.31 platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \infty$, takže $\infty \in H(\{a_n\})$.

Případ $A = -\infty$. Podle 2.4.11 platí $\liminf a_n \leq -\infty$, tedy $\liminf a_n = -\infty$. To podle Věty 2.4.13 znamená, že $\lim a_n = -\infty$. Tvrzení tedy plyne z 2.4.18.

Dokázali jsme, že $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$. Obdobně lze dokázat, že $\liminf a_n \in H(\{a_n\})$.

Důkaz nerovnosti. Předpokládejme, že $y \in H(\{a_n\})$. Je-li $\limsup a_n = \infty$, pak zřejmě platí $y \leq \limsup a_n$. Je-li $\limsup a_n < \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$, kde $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$. Necht $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = y$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \leq b_{n_k}$, a tedy dle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.3.30(b)) platí $y \leq \limsup a_n$. Obdobně lze dokázat, že $y \geq \liminf a_n$. Tím je důkaz věty proveden. ■

2.4.24. Důsledek. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom je $H(\{a_n\})$ neprázdná.

Důkaz. Podle Věty 2.4.23 obsahuje množina $H(\{a_n\})$ prvek $\limsup a_n$, je tedy neprázdná. ■

Bolzanova–Cauchyova podmínka.

2.4.25. Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu⁴ podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Význam a důležitost Bolzanovy–Cauchyovy podmínky ukazuje následující věta.

2.4.26. Věta. Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n_0, n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Potom pro $m = n_0$ dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, nerovnosti $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N}, j \geq n_0\}$ je tedy omezená. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N}, j < n_0\}$ je konečná, a proto je také omezená. Odtud plyne, že $\{a_n\}$ je omezená, takže můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako v 2.4.8. Z definice těchto posloupností vyplývají pro každé $m \in \mathbb{N}, m \geq n_0$, odhady

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_m \leq b_m \leq a_{n_0} + \varepsilon,$$

a tedy také

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Odtud dostáváme $\liminf a_n \in \mathbb{R}, \limsup a_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n < 2\varepsilon,$$

⁴Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

a tedy, protože ε bylo zvoleno libovolně, $\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}$. Označíme-li $A = \liminf a_n$, pak podle Věty 2.4.13 platí $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, což jsme měli dokázat. ■

Borelova věta. Na závěr této kapitoly uvedme důležitou Borelovu větu, jejíž význam však bude zřejmý později.

2.4.27. Věta (Borel⁵). Necht $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, a $\mathcal{I}$ je množina otevřených intervalů taková, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{I}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ taková, že $[a, b] \subset \bigcup \mathcal{I}_0$.

Důkaz. Označme symbolem M množinu všech $x \in [a, b]$, pro které existuje konečná množina $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{I}$ taková, že $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{I}_x$. Naším cílem je ukázat, že $b \in M$.

Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_a \in \mathcal{I}$ splňující $a \in I_a$. Položme $\mathcal{I}_a = \{I_a\}$. Potom je zřejmě $\mathcal{I}_a$ konečná množina a platí $[a, a] \subset \bigcup \mathcal{I}_a$. Tedy $a \in M$, a množina M je neprázdná. Navíc je zřejmě b horní závorou množiny M , a tedy M je shora omezená. Označme $y = \sup M$. Z výše uvedených faktů vyplývá, že $y \in [a, b]$. K důkazu věty stačí ukázat, že $y \in M$ a $y = b$.

Dokážeme, že $y \in M$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_y \in \mathcal{I}$ splňující $y \in I_y$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že $(y - \delta, y] \subset I_y$. Podle definice suprema nalezneme $z \in M \cap (y - \delta, y]$. Pak nalezneme konečnou množinu $\mathcal{I}_z \subset \mathcal{I}$ splňující $[a, z] \subset \bigcup \mathcal{I}_z$. Položme $\mathcal{I}_y = \mathcal{I}_z \cup \{I_y\}$. Potom je $\mathcal{I}_y$ konečná množina otevřených intervalů. Předpokládejme, že $x \in [a, y]$. Je-li $x \in [a, z]$, potom $x \in \bigcup \mathcal{I}_z$. Je-li $x \in (z, y]$, potom $x \in I_y$. V každém případě platí $x \in \bigcup \mathcal{I}_y$, takže $[a, y] \subset \bigcup \mathcal{I}_y$. Odtud vyplývá, že $y \in M$.

Zbývá dokázat, že $y = b$. Předpokládejme pro spor, že $y < b$. Potom nalezneme otevřený interval $I_y \in \mathcal{I}$ splňující $y \in I_y$. Pak nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $y + \varepsilon < b$ a $[y, y + \varepsilon] \subset I_y$. Poněvadž $y \in M$, nalezneme konečný systém $\mathcal{I}_y \subset \mathcal{I}$ takový, že $[a, y] \subset \bigcup \mathcal{I}_y$. Systém $\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I}_y \cup \{I_y\}$ je konečný a platí

$$[a, y + \varepsilon] = [a, y] \cup [y, y + \varepsilon] \subset \left(\bigcup \mathcal{I}_y\right) \cup I_y = \bigcup \tilde{\mathcal{I}}.$$

Odtud plyne, že $y + \varepsilon \in M$, což je spor s definicí y . ■

2.5. Teoretické příklady k limitě posloupnosti

2.5.1. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim a_n = A$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, je množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$ konečná.

Řešení. $\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$ je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, položíme $n_0 = 1$. Pokud je neprázdná, existuje její maximum podle Věty 1.6.14 a můžeme položit

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}; a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\} + 1.$$

⁵Émile Borel (1871–1956)

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, dokázali jsme, že $\lim a_n = A$.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \notin (A - \varepsilon, A + \varepsilon)\}$ je tudíž podmnožinou konečné množiny $\{n \in \mathbb{N}; n < n_0\}$, a tedy je sama konečná. ♣

2.5.2. Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.29) k němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$, a tedy $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Zároveň zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \varepsilon$. Podle definice limity odtud vyplývá, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. ♣

2.5.3. Příklad. Necht' $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Řešení. *Případ* $k = 1$. Označme $\psi = a - 1$. Potom $\psi > 0$, a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí podle binomické věty (Věta 1.5.6)

$$a^n = (1 + \psi)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \psi^k \geq \binom{n}{2} \psi^2 = \frac{n(n+1)\psi^2}{2}.$$

Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$0 < \frac{n}{a^n} \leq n \cdot \frac{2}{n(n+1)\psi^2} = \frac{2}{\psi^2(n+1)}.$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\psi^2(n+1)} = 0$, plyne z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44), že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

Obecný případ $k \in \mathbb{N}$. Označme $b = \sqrt[k]{a}$. Pak $b > 1$, a tedy dle již dokázané části tvrzení platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0$. Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34(b)) dostáváme dokazovaný vztah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{b^n} \right)^k = 0^k = 0.$$

♣

2.5.4. Příklad. Necht' $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Řešení. Podle Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.29) existuje $m \in \mathbb{N}$ splňující $m > a$. Pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq m$, potom platí $\frac{a}{j} < 1$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, dostáváme tedy odhad

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^m}{m!} \cdot \prod_{j=m+1}^n \frac{a}{j} \leq \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{a}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{a}{n} \quad \text{a} \quad c_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy dostáváme dokazovaný vztah. ♣

2.5.5. Příklad. Dokažte, že

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{j=2}^n \frac{j}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \prod_{j=2}^n 1 = \frac{1}{n}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad c_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$ a navíc $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy dostáváme dokazovaný vztah. ♣

2.5.6. Příklad. Ukažte, že požadujeme-li platnost tvrzení Věty 2.3.5(b) a vztahů $\infty + 0 = \infty$, $\infty + \infty = \infty$, pak nelze definovat $\infty - \infty = 0$.

Řešení. Kdyby platilo $\infty - \infty = 0$, potom

$$\infty = \infty + 0 = \infty + (\infty - \infty) = (\infty + \infty) - \infty = \infty - \infty = 0,$$

což je spor. ♣

2.5.7. Příklad. Dokažte, že

$$\lim \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $1 \leq \frac{n}{2} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq n$, a tedy také

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{j=1}^n j \geq \prod_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n j \geq \prod_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n \frac{n}{2} \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}} = \sqrt{\frac{1}{2}n}.$$

Dále zřejmě platí $\lim \frac{1}{2}n = \infty$ a podle Příkladu 2.3.37 máme také $\lim \sqrt{\frac{1}{2}n} = \infty$. Z Věty 2.3.31 tudíž vyplývá, že $\lim \sqrt[n]{n!} = \infty$. ♣

2.5.8. Příklad. Dokažte, že

$$\lim \log n = \infty.$$

Řešení. Necht $K \in \mathbb{R}$. Podle Archimédovy vlastnosti (Věta 1.5.29) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 > e^K$. Logaritmus je rostoucí funkce, takže potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\log n \geq \log n_0 > K$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.9. Příklad. Necht $q, \alpha \in \mathbb{R}$. Dokažte, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^\infty$ je monotónní právě tehdy, když $q \geq 0$ nebo $\alpha = 0$.

Řešení. Je-li $\alpha = 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^\infty$ konstantní, a tedy monotónní. Předpokládejme, že $\alpha > 0$. Je-li $q \in [0, 1]$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \leq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \leq \alpha q^n$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^\infty$ je tedy v tomto případě nerostoucí. Je-li $q \in [1, \infty)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $q^{n+1} \geq q^n$, a tedy také $\alpha q^{n+1} \geq \alpha q^n$ a posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^\infty$ je tedy v tomto případě neklesající. Obdobně lze dokázat, že je-li $\alpha < 0$, pak je posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^\infty$ neklesající pro každé $q \in [0, 1]$ a nerostoucí pro každé $q \in [1, \infty)$.

Předpokládejme, že $\alpha > 0$ a $q < 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n > 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n < 0$. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ sudé platí $\alpha q^n > \alpha q^{n+1}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ liché platí $\alpha q^n < \alpha q^{n+1}$. Posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^\infty$ tedy není monotónní. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^\infty$ není monotónní, je-li $\alpha < 0$ a $q < 0$. ♣

2.5.10. Příklad (srovnejte s 2.3.25). Pro každé $j \in \mathbb{N}$ definujme posloupnost přirozených čísel $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ předpisem

$$n_k^j = \begin{cases} k, & \text{pokud } k \leq j, \\ 2k, & \text{pokud } k > j. \end{cases}$$

Dokažte, že

- $\{n_k^j; j, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$,
- pro každé $j \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ rostoucí,
- pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{n_k^j} = 1$,

přesto však $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ neexistuje.

Řešení. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $n_j^j = j$, a tedy $\{n_k^j; j, k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$.

Necht $j \in \mathbb{N}$. Zvolme $k, k' \in \mathbb{N}$, $k < k'$. Pokud $k \leq j$, pak $n_k^j = k < k' \leq n_{k'}^j$. Pokud $j < k$, pak platí $j < k'$ a $n_k^j = 2k < 2k' = n_{k'}^j$. Tím je ověřeno, že posloupnost $\{n_k^j\}_{k=1}^\infty$ je rostoucí.

Necht $j \in \mathbb{N}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k > j$, je číslo n_k^j sudé, a tedy $(-1)^{n_k^j} = 1$. Tudíž $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{n_k^j} = 1$.

Neexistence $\lim(-1)^n$ jakožto prvku $\mathbb{R}$ byla ukázána v Příkladu 2.2.15, neexistence $\lim(-1)^n$ jakožto prvku $\mathbb{R}^*$, o kterou nyní jde, plyne z 2.3.21. ♣

2.5.11. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $A \in H(\{a_n\})$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq k : a_n \in B(A, \varepsilon). \quad (2.28)$$

Řešení. $\Rightarrow$ Pro $A \in H(\{a_n\})$ existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Pro ověření (2.28) zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a $k \in \mathbb{N}$. Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}, j \geq k_0$, platí $a_{n_j} \in B(A, \varepsilon)$. Zvolme $j_0 \geq \max\{k_0, k\}$. Položme $n = n_{j_0}$. Pak máme podle Lemmatu 2.2.31 $n = n_{j_0} \geq j_0 \geq k$ a dále $a_n \in B(A, \varepsilon)$, neboť $n = n_{j_0} \geq j_0 \geq k_0$. Tím je podmínka (2.28) ověřena.

$\Leftarrow$ Budeme konstruovat rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ bude platit $a_{n_k} \in B(A, \frac{1}{k})$. Pro $\varepsilon = 1$ a $k = 1$ nalezneme podle (2.28) $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující $a_{n_1} \in B(A, 1)$. Předpokládejme, že jsem již zkonstruovali n_k . Potom (2.28) použijeme pro $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ a $k = n_k + 1$. Dostaneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in B(A, \frac{1}{k+1})$. Tím je konstrukce $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ provedena.

Dokážeme, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \in B(A, \frac{1}{k}) \subset B(A, \frac{1}{k_0}) \subset B(A, \varepsilon)$. Odtud již podle Věty 2.3.15 plyne $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$, a tedy $A \in H(\{a_n\})$. ♣

2.5.12. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Dokážte, že platí

$$H(\{a_n\}) = \{c \in \mathbb{R}^*; \liminf a_n \leq c \leq \limsup a_n\}.$$

Řešení. Označme $a = \liminf a_n$ a $b = \limsup a_n$. Z Věty 2.4.23 plyne inkluze „ $\subset$ “ a fakt, že $a, b \in H(\{a_n\})$. Stačí proto dokázat, že platí $H(\{a_n\}) \supset (a, b)$.

Pomocné tvrzení. Ukážeme, že pro každé $A \in (a, b)$ platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}, n \geq k : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Zvolme $A \in (a, b)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $j_0 \geq k$ a pro každé $j \in \mathbb{N}, j \geq j_0$, platí $|a_{j+1} - a_j| < \varepsilon$. Protože $a < A$, z definice limes inferior existuje $j_1 \in \mathbb{N}, j_1 \geq j_0$, splňující $a_{j_1} < A$ a protože $A < b$, z definice limes superior existuje $j_2 \in \mathbb{N}, j_2 > j_1$, splňující $a_{j_2} > A$. Položme

$$J = \{j \in \mathbb{N}; j_1 \leq j \leq j_2 \wedge a_j < A\}.$$

Protože $j_1 \in J$, je J neprázdná konečná množina, a existuje tak $m = \max J$. Protože $j_2 \notin J$, platí $m < j_2$. Potom máme

$$A \leq a_{m+1} = a_m + (a_{m+1} - a_m) < A + \varepsilon.$$

Platí tedy $|a_{m+1} - A| < \varepsilon$, čímž je pomocné tvrzení dokázáno, neboť stačí položit $n = m + 1$.

Díky pomocnému tvrzení a Příkladu 2.5.11 dostáváme $A \in H(\{a_n\})$ pro každé $A \in (a, b)$. Tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.13. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Dokažte, že platí

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Řešení. První nerovnost. Poněvadž posloupnost $\{a_n\}$ sestává z kladných členů, platí $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 0$ a $\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq 0$. Pokud $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Můžeme tedy předpokládat $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > K > 0$. K němu podle Věty 2.4.16 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} > K.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \right)^{\frac{1}{n}} \geq (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}.$$

Z Věty 2.4.15 dostaneme

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.48 spočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} K(K^{-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = K.$$

Podle Věty 2.4.13 tedy také platí

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (K^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = K,$$

takže celkem dostáváme $\liminf \sqrt[n]{a_n} \geq K$.

Pro spor předpokládejme, že dokazovaná nerovnost neplatí. Pak stačí zvolit K takové, že $\liminf \sqrt[n]{a_n} < K < \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Odtud plyne podle předchozí úvahy $K \leq \liminf \sqrt[n]{a_n}$, což je spor.

Druhá nerovnost. Tato nerovnost platí podle 2.4.11.

Třetí nerovnost. Poněvadž posloupnost $\{a_n\}$ sestává z kladných členů, platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 0$. Pokud $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < \infty$. Zvolme $L \in \mathbb{R}, L > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. K němu podle Věty 2.4.16 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} < L.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} \right)^{\frac{1}{n}} \leq (L^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}. \quad (2.29)$$

Z Věty 2.4.15 dostaneme

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup (L^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}}.$$

Pomocí Příkladu 2.2.48 spočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} L(L^{-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = L.$$

Podle Věty 2.4.13 tedy také platí $\limsup_{n \rightarrow \infty} (L^{n-n_0} a_{n_0})^{\frac{1}{n}} = L$, a tedy celkem dostáváme $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L$. Díky volbě L odtud plyne platnost třetí nerovnosti. ♣

2.5.14. Příklad. Necht $\{a_n\}, \{b_k\}$ jsou posloupnosti, pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $b_k \in H(\{a_n\})$ a $\lim b_k = b \in \mathbb{R}^*$. Dokažte, že platí $b \in H(\{a_n\})$.

Řešení. Zkonstruujeme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ takovou, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ bude platit $a_{n_j} \in B(b, \frac{1}{j})$.

Poněvadž $\lim b_k = b$, můžeme pro každé $j \in \mathbb{N}$ nalézt $k_j \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{k_j} \in B(b, \frac{1}{j})$. Nyní pro každé $j \in \mathbb{N}$ nalezneme $\varepsilon_j > 0$ takové, že $B(b_{k_j}, \varepsilon_j) \subset B(b, \frac{1}{j})$. Díky tomu, že $b_{k_1} \in H(\{a_n\})$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} \in B(b_{k_1}, \varepsilon_1) \subset B(b, 1)$. Necht $j \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že již máme určena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_j$. Díky tomu, že $b_{k_{j+1}} \in H(\{a_n\})$, existuje podle Příkladu 2.5.11 přirozené číslo n_{j+1} takové, že $n_{j+1} > n_j$ a $a_{n_{j+1}} \in B(b_{k_{j+1}}, \varepsilon_{j+1}) \subset B(b, \frac{1}{j+1})$.

Posloupnost $\{a_{n_j}\}$ tedy splňuje $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = b$, a tedy $b \in H(\{a_n\})$. ♣

2.5.15. Příklad. Necht $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokažte, že pro posloupnost $\{a_n\} = \{n\alpha - [n\alpha]\}$ platí $H(\{a_n\}) = [0, 1]$. (Připomeňme, že $[x]$ značí celou část čísla $x \in \mathbb{R}$.)

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \in [0, 1)$, a proto inkluze $H(\{a_n\}) \subset [0, 1]$ plyne z Příkladu 2.4.22. K důkazu použijeme následující tvrzení.

Pomocné tvrzení. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Potom platí

$$\exists p \in \mathbb{Z} \exists q \in \mathbb{N}: 0 < |q\alpha - p| < \varepsilon. \quad (2.30)$$

Důkaz pomocného tvrzení. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Interval $[0, 1)$ je sjednocením intervalů tvaru

$$[0, \frac{1}{m}), [\frac{1}{m}, \frac{2}{m}), \dots, [\frac{m-1}{m}, 1). \quad (2.31)$$

Vzhledem k tomu, že těchto intervalů je konečně mnoho a množina $\mathbb{N}$ je nekonečná, musí existovat $i, j \in \mathbb{N}, i < j$, taková, že členy a_i, a_j jsou společně v jednom z intervalů uvedených v (2.31). Pak platí $|a_j - a_i| < \frac{1}{m}$. Položme $p = [\alpha j] - [\alpha i]$ a $q = j - i$. Potom $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ a platí

$$|q\alpha - p| = |(j - i)\alpha - ([\alpha j] - [\alpha i])| = |a_j - a_i| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Dále platí $q\alpha - p \neq 0$, neboť α je iracionální. Tím je dokázáno (2.30).

Vlastní důkaz. Zvolme $x \in (0, 1)$. Pro x ověříme podmínku (2.28) z Příkladu 2.5.11. Necht tedy $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a $k \in \mathbb{N}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat,

že $0 < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 1$. Pro ε nalezneme příslušná p, q podle pomocného tvrzení. Označme $\eta = q\alpha - p$. Předpokládejme nejprve, že $\eta > 0$. Vzhledem k tomu, že $a_k < 1 + x$ a $0 < \eta < \varepsilon$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující

$$a_k + n_0\eta \in (1 + x - \varepsilon, 1 + x + \varepsilon).$$

Potom platí $[a_k + n_0\eta] = 1$, a tedy $a_k + n_0\eta - [a_k + n_0\eta] \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. V následujícím odvození využijeme opakovaně zřejmý vztah $[x + m] = [x] + m$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{Z}$. Platí

$$\begin{aligned} a_{k+n_0q} &= (k + n_0q)\alpha - [(k + n_0q)\alpha] = k\alpha + n_0q\alpha - [a_k + [k\alpha] + n_0q\alpha] \\ &= k\alpha - [k\alpha] + n_0q\alpha - [a_k + n_0q\alpha - n_0p] - n_0p \\ &= a_k + n_0\eta - [a_k + n_0\eta] = a_k + n_0\eta - 1. \end{aligned}$$

Máme tedy $a_{k+n_0q} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a $k + n_0q > k$, čímž jsme ověřili podmínku (2.28). Odtud vyplývá, že $x \in H(\{a_n\})$.

Předpokládejme nyní, že $\eta < 0$. Vzhledem k tomu, že $a_k > -1 + x$ a $0 > \eta > -\varepsilon$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující

$$a_k + n_0\eta \in (-1 + x - \varepsilon, -1 + x + \varepsilon).$$

Potom platí $[a_k + n_0\eta] = -1$, a tedy $a_k + n_0\eta - [a_k + n_0\eta] \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Stejně jako v předchozím případě platí $a_{k+n_0q} = a_k + n_0\eta - 1$. Máme tedy $a_{k+n_0q} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a $k + n_0q > k$, čímž jsme ověřili podmínku (2.28). Odtud opět vyplývá, že $x \in H(\{a_n\})$.

Z předchozího tedy plyne $(0, 1) \subset H(\{a_n\})$. Podle Příkladu 2.5.14 dostáváme $[0, 1] \subset H(\{a_n\})$, a tím je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.16. Příklad (Stolz⁶). Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim b_n = \infty$ a

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A \in \mathbb{R}^*.$$

Dokažte, že potom $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$.

Řešení. Položme $a_0 = b_0 = 0$. Předpokládejme nejprve, že $A > -\infty$. Zvolme $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < A$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} > \alpha. \quad (2.32)$$

Navíc můžeme díky předpokladu $\lim b_n = \infty$ požadovat, aby pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platilo $b_k > 0$. Necht $n \in \mathbb{N}$, $n > k_0$. Potom

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} + \sum_{k=k_0+1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n}. \quad (2.33)$$

⁶Otto Stolz (1842–1905)

Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > k_0$, máme $\frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} > 0$, a proto můžeme druhý sčítanec v (2.33) odhadnout následovně

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0+1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} &= \sum_{k=k_0+1}^n \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} \\ &\geq \sum_{k=k_0+1}^n \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \cdot \alpha = \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Protože podle věty o aritmetice limit a z předpokladu $\lim b_n = \infty$ plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = 0,$$

a navíc zřejmě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} = 1,$$

dostáváme celkem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \alpha.$$

Protože $\alpha < A$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq A$. Tato nerovnost platí tedy pro každé $A \in \mathbb{R}^*$, neboť pro $A > -\infty$ jsme ji právě dokázali a pro $A = -\infty$ je triviální. Obdobným způsobem odvodíme nerovnost $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A$. Odtud plyne

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

čímž je tvrzení věty dokázáno. ♣

2.5.17. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Dokažte, že $\{a_n\}$ má monotónní podposloupnost.

Řešení. Rozlišíme dva případy.

1. případ. Předpokládejme, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ má množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq m\}$ největší prvek.

Položme $n_0 = 0$. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$a_{n_1} = \max\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Předpokládejme nyní, že máme nalezena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ taková, že pro každé $j \in \mathbb{N}, j \leq k$, platí

$$a_{n_j} = \max\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq n_{j-1} + 1\}.$$

Díky našemu předpokladu nalezneme $n_{k+1} \in \mathbb{N}, n_{k+1} > n_k$, takové, že

$$a_{n_{k+1}} = \max\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq n_k + 1\}.$$

Podle 1.4.35 je takto zkonstruována posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, která je rostoucí. Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je pak vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zřejmě je nerostoucí.

2. *případ.* Předpokládejme, že existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq m\}$ nemá největší prvek.

Potom pro každé $m' \in \mathbb{N}$, $m' \geq m$, nemá množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq m'\}$ největší prvek. Položme $n_1 = m$. Předpokládejme nyní, že máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n \geq n_k\}$ nemá podle předpokladu největší prvek. Protože je a_{n_k} jejím prvkem, existuje $n_{k+1} > n_k$ takové, že $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. Podle 1.4.35 takto zkonstruujeme posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, která je rostoucí. Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je zřejmě také rostoucí, čímž je tvrzení dokázáno. ♣

2.5.18. Poznámka. Příklad 2.5.17 lze využít k alternativnímu důkazu Bolzanovy–Weierstrassovy věty. Je-li totiž $\{a_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel, pak z ní lze podle Příkladu 2.5.17 vybrat monotónní podposloupnost, která bude opět omezená. Taková posloupnost je konvergentní podle Důsledku 2.4.2.

2.6. Početní příklady k limitě posloupnosti

2.6.1. Příklad. Necht $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, a posloupnost $\{a_n\}$ je definována předpisem

$$a_n = \left(\frac{x^3}{3x-2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vyšetřete, pro která $x \in \mathbb{R}$ je posloupnost $\{a_n\}$ monotónní, a určete typ její monotonie v závislosti na parametru x .

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{2}{3}$, je $\{a_n\}$ geometrická posloupnost. Označíme $q_x = \frac{x^3}{3x-2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$. Podle Příkladu 2.5.9 je tato posloupnost monotónní právě tehdy, když platí $q_x \geq 0$. Navíc je rostoucí právě tehdy, když $q_x > 1$; klesající právě tehdy, když $q_x \in (0, 1)$; a konstantní právě tehdy, když $q_x \in \{0, 1\}$. Podmínku $q_x > 1$ splňují ta x , která jsou řešením nerovnice

$$\frac{x^3}{3x-2} > 1.$$

Převedením členu 1 na levou stranu a algebraickou úpravou obdržíme nerovnici

$$\frac{(x-1)^2(x+2)}{3x-2} > 0.$$

Odtud již snadno vidíme, že $q_x > 1$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, \infty)$.

Zbývající nerovnice $0 < q_x$, $q_x < 1$ a rovnice $q_x = 0$, $q_x = 1$ lze vyřešit obdobně. Pak dostaneme, že posloupnost $\{a_n\}$

- je rostoucí pro $x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, \infty)$,
- je klesající pro $x \in (-2, 0)$,

- je konstantní pro $x \in \{-2, 0, 1\}$,
- není monotónní pro $x \in (0, \frac{2}{3})$.

♣

2.6.2. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}.$$

Řešení. Výraz $\frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ je podílem hodnot dvou polynomů v bodě n , přičemž polynom v čitateli má stupeň 2 a polynom ve jmenovateli má stupeň 3. Vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem n^3 , tedy mocninou čísla n odpovídající vyššímu z obou stupňů. Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2\frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{0 + 0 - 0}{1 - 0} = 0. \end{aligned}$$

♣

2.6.3. Příklad. Necht $a, b \in (0, 1)$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}.$$

Řešení. Z Příkladu 1.5.8 plyne, že

$$\frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n} = \frac{(1 - b) \cdot (1 - a^{n+1})}{(1 - a) \cdot (1 - b^{n+1})}.$$

Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) a Příkladu 2.3.34 dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1 - a \cdot 0 = 1$$

a obdobně také

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - b^{n+1}) = 1.$$

Z věty o aritmetice limit pak vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - b}{1 - a} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a^{n+1})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - b^{n+1})} = \frac{1 - b}{1 - a}.$$

♣

2.6.4. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}.$$

Řešení. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Potom z binomické věty dostaneme

$$(n+4)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1}4n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}4^i n^{100-i}$$

a podobně

$$(n+3)^{100} = n^{100} + \binom{100}{1}3n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}3^i n^{100-i}.$$

Tedy

$$(n+4)^{100} - (n+3)^{100} = 100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}(4^i - 3^i)n^{100-i}.$$

Obdobným postupem lze odvodit, že

$$(n+2)^{100} - n^{100} = 200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}2^i n^{100-i}.$$

Odtud, z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) a ze známé limity $\lim \frac{1}{n} = 0$ (Příklad 2.2.11) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \lim \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}} &= \lim \frac{100n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}(4^i - 3^i)n^{100-i}}{200n^{99} + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}2^i n^{100-i}} \\ &= \lim \frac{100 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}(4^i - 3^i)\frac{1}{n^{i-1}}}{200 + \sum_{i=2}^{100} \binom{100}{i}2^i \frac{1}{n^{i-1}}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

♣

2.6.5. Příklad. Vypočítejte $\lim \frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8} + \sqrt[3]{n^4}}$.

Řešení. Nejprve provedeme následující *neformální* úvahu. Čísla 5 a 8, která vystupují pod druhými odmocninami, jsou malá ve srovnání s n , které neomezeně roste. Jestliže tato čísla zanedbáme, budou ve zlomku figurovat následující mocniny proměnné n : $n^{\frac{3}{2}}$, $n^{\frac{1}{3}}$, $n^{\frac{3}{2}}$ a $n^{\frac{4}{3}}$. Nejvyšší exponent je $\frac{3}{2}$. Na základě této předběžné úvahy rozšíříme zlomek výrazem $n^{-\frac{3}{2}}$. Dostaneme tak pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+8} + \sqrt[3]{n^4}} = \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}}.$$

Limitu posledního výrazu snadno spočteme na základě Věty 2.3.26 o aritmetice limit a Příkladu 2.3.37:

$$\lim \frac{\sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3\sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \frac{\lim \sqrt{2 + \frac{5}{n}} - 3 \lim \sqrt[6]{\frac{4}{n^7}}}{\lim \sqrt{1 + \frac{8}{n^3}} + \lim \sqrt[6]{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2}.$$



2.6.6. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

Řešení. Větu o aritmetice limit (Věta 2.3.26) nemůžeme použít přímo, protože

$$\lim \sqrt{n^2 + n} = \infty \quad \text{a} \quad \lim \sqrt{n^2 + 1} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\lim \sqrt{n^2 + n} - \lim \sqrt{n^2 + 1}$$

není definován. Zapišeme výraz $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}) \cdot (\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{n^2 + n - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Nyní rozšíříme výsledný zlomek výrazem $\frac{1}{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Podle Příkladu 2.2.45 platí

$$\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}},$$

plyne odtud a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44), že

$$\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Celkem tedy z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) vyplývá, že

$$\begin{aligned} \lim(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}) &= \frac{\lim 1 - \lim \frac{1}{n}}{\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \lim \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1 - 0}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



2.6.7. Příklad. Vypočtěte $\lim(\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$.

Řešení. Uvědomíme si, že nelze užít větu o limitě součtu, protože $\lim \sqrt{4n^2 - n} = \lim \sqrt{n(4n - 1)} = \infty$ (Věta 2.3.26(b) a Příklad 2.3.37) a $\lim(-2n) = -\infty$. Nejprve rozšíříme n -tý člen naší posloupnosti výrazem

$$\frac{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}$$

a použijeme vzorec $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, kde položíme $a = \sqrt{4n^2 - n}$, $b = 2n$. Dostaneme tak

$$\sqrt{4n^2 - n} - 2n = (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n} = \frac{-n}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n}.$$

Tento zlomek ještě rozšíříme výrazem $\frac{1}{n}$ a dostaneme

$$\sqrt{4n^2 - n} - 2n = \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2}.$$

Protože poslední rovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, obdržíme podle Věty 2.3.26 a Příkladu 2.2.46

$$\lim(\sqrt{4n^2 - n} - 2n) = \lim \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2} = -\frac{1}{4}.$$



2.6.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$$

Řešení. Podobně jako v předcházejícím příkladu, ani zde nelze ihned využít věty o aritmetice limit. Tentokrát použijeme vzorec $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ pro $a = \sqrt[3]{n+1}$ a $b = \sqrt[3]{n}$ (vizte Příklad 1.5.7). Obdržíme tak pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} &= \frac{(\sqrt[3]{n+1})^3 - (\sqrt[3]{n})^3}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}}. \end{aligned}$$

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Dostaneme

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ dále platí

$$1 \leq \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \leq 1 + \frac{1}{n},$$

a tedy z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) dostaneme

$$\lim \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} = \lim \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

Z Příkladů 2.2.35 a 2.2.46 vyplývá, že

$$\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0.$$

Pomocí věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) dostaneme

$$\begin{aligned} \lim(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) &= \frac{\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\lim \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n})^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} \\ &= \frac{0}{1 + 1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

♣

2.6.9. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim n(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \sqrt[6]{(n^3 + 1)^2} - \sqrt[6]{(n^2 + 1)^3}.$$

Dále pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí podle Příkladu 1.5.7

$$(a^6 - b^6) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5).$$

Tuto identitu aplikujeme na čísla

$$a = \sqrt[6]{(n^3 + 1)^2} \quad a \quad b = \sqrt[6]{(n^2 + 1)^3}$$

a dostaneme

$$\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{(n^3 + 1)^2 - (n^2 + 1)^3}{\sqrt[6]{(n^3 + 1)^{10}} + \sqrt[6]{(n^3 + 1)^8(n^2 + 1)^3} + \dots + \sqrt[6]{(n^2 + 1)^{15}}}.$$

Tento zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{n^5}$ a obdržíme

$$\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1} = \frac{-3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2} - 3\frac{1}{n^3}}{\sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^8(1 + \frac{1}{n^2})^3} + \dots + \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^2})^{15}}},$$

a tedy

$$n(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) = \frac{-3 + 2\frac{1}{n} - 3\frac{1}{n^2}}{\sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^{10}} + \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^8(1 + \frac{1}{n^2})^3} + \dots + \sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^2})^{15}}}.$$

Kombinací Příkladů 2.2.11, 2.2.35, 2.2.46 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) konečně dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

♣

2.6.10. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}).$$

Řešení. Pokud bychom ihned použili větu o limitě součinu, tak dostaneme neurčitý výraz $\infty \cdot 0$. Zkusíme tedy zadaný výraz nejprve upravit za použití vzorce

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

z Příkladu 1.5.7. Snadno pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \cdot (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) &= \sqrt{n} \cdot (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) \cdot \frac{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2^{n-1}}} \\ &= \frac{\sqrt{n} \cdot (3 - 2)}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Nyní si stačí uvědomit, že ve jmenovateli posledního zlomku je n členů, z nichž každý je větší než 1, a odhadneme tedy

$$0 \leq \sqrt{n} \cdot (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) \leq \frac{\sqrt{n}}{n}.$$

Z $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících.

♣

2.6.11. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!}.$$

Řešení. Výraz $\frac{3^n + n^2}{n^3 + n!}$ obsahuje kromě mocnin čísla n navíc exponenciální výraz 3^n a výraz $n!$. Z předcházejících příkladů vyplývá, že bude výhodné rozšířit čitatele i jmenovatele výrazem $\frac{1}{n!}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^2}{n!}}{\frac{n^3}{n!} + 1}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 pro $a = 3$ máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

Podle Příkladů 2.5.3 a 2.5.4 a podle věty o limitě součinu (Věta 2.3.26(b)) je

$$\lim \frac{n^2}{n!} = \lim \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n!} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Obdobně lze dokázat, že platí

$$\lim \frac{n^3}{n!} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) tedy dostáváme

$$\lim \frac{3^n + n^2}{n^3 + n!} = \frac{\lim \frac{3^n}{n!} + \lim \frac{n^2}{n!}}{\lim \frac{n^3}{n!} + \lim 1} = \frac{0 + 0}{0 + 1} = 0.$$

♣

2.6.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}.$$

Řešení. Z Věty 1.7.16(a) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $-1 \leq \sin(n!) \leq 1$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Kombinací odhadů dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \leq -\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Podle Příkladu 2.2.46 platí

$$\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

a tedy také

$$\lim -\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0,$$

Podle věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy dostáváme

$$\lim \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} = 0.$$

♣

2.6.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Řešení. Podle Příkladu 1.8.8 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, platí

$$n^2 \leq 2^n \leq 3^n.$$

Pro každé takové n tedy platí

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n + 3^n} = 3 \sqrt[n]{3}.$$

Podle Příkladu 2.2.48 a věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) platí $\lim 3\sqrt[n]{3} = 3$. Z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) tedy plyne, že

$$\lim \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3.$$

♣

2.6.14. Příklad. Necht $a_n = \left[\sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} \right], n \in \mathbb{N}$. Spočtěte $\lim a_n$.

Řešení. Označme $b_n = \sqrt[3]{n^3 + 8n^2} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2}, n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{6n^2}{(n^3 + 8n^2)^{\frac{2}{3}} + (n^3 + 8n^2)^{\frac{1}{3}}(n^3 + 2n^2)^{\frac{1}{3}} + (n^3 + 2n^2)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{6}{\left(1 + \frac{8}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Limita posloupnosti $\{b_n\}$ je tedy rovna 2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$3 < \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{3}},$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $b_n < 2$.

Nyní nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $b_n > 1$. Pro tato n pak platí $1 < b_n < 2$, a tedy $[b_n] = 1$. Odtud dostáváme $\lim a_n = \lim [b_n] = \lim 1 = 1$.

♣

2.6.15. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]100}{\sqrt{n}}.$$

Řešení. V řadě příkladů s celou částí stačí použít elementární odhad

$$\forall x \in \mathbb{R}: x - 1 < [x] \leq x.$$

Díky tohoto odhadu dostaneme

$$0 = \frac{n^3 - \frac{n^3}{100}100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3 - \left(\frac{n^3}{100} - 1\right)100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}.$$

Vzhledem k tomu, že platí $\lim \frac{100}{\sqrt{n}} = 0$, dostáváme, že hledaná limita je rovna 0 podle věty o dvou strážnících.

♣

2.6.16. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{4k} = 0$ a $a_{4k+1} = 1$, a tedy $\lim a_{4k} = 0$ a $\lim a_{4k+1} = 1$. Podle Věty 2.3.21 tedy limita zadané posloupnosti neexistuje.

♣

2.6.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádříme výraz $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ve tvaru zlomku

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1},$$

a tento zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

a tedy

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a dostaneme

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) a Příkladu 2.2.45 tedy platí

$$\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

Odtud a opět z věty o aritmetice limit dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim a_{2k} = \frac{1}{2}$, zatímco $\lim a_{2k+1} = -\frac{1}{2}$. Podle Věty 2.3.21 tedy limita zadané posloupnosti neexistuje. ♣

2.6.18. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim \left(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + n \right).$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + n.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} = \frac{2n}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}}.$$

Podle Příkladu 2.5.4 a Věty 2.3.26 platí

$$\lim \frac{2^n}{(n-1)!} = \lim 2 \cdot \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Tedy opět podle Věty 2.3.26 dostáváme

$$\lim \left(\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n \right) = \lim n \left(\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1 \right) = \infty$$

a

$$\lim \left(-\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n \right) = \lim n \left(-\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} + 1 \right) = -\infty.$$

Protože

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } n \in \{4k+1; k \in \mathbb{N}\}, \\ -1, & \text{pokud } n \in \{4k-1; k \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

dostáváme celkem $\lim a_{4k+1} = \infty$ a $\lim a_{4k-1} = -\infty$, a tedy podle Věty 2.3.21 $\lim a_n$ neexistuje. ♣

2.6.19. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \frac{(-1)^n + 2}{2^n(3 - (-1)^n)}.$$

Řešení. Zadaná posloupnost je součinem posloupností $\left\{\frac{(-1)^n+2}{3-(-1)^n}\right\}$ a $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. První z nich je omezená, neboť každý její člen je roven buď $\frac{1}{4}$ nebo $\frac{3}{2}$. Druhá posloupnost má limitu rovnou 0. Podle Věty 2.2.39 má tedy naše posloupnost limitu rovnou 0. ♣

2.6.20. Příklad. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$.

Řešení. *Korektnost definice posloupnosti.* Matematickou indukcí dokážeme následující tvrzení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou členy $a_1, \dots, a_n$ definovány a $a_n > 5$. Pro $n = 1$ tvrzení platí, neboť $a_1 = 10 > 5$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a pro toto n předpokládejme platnost našeho tvrzení. Pokud máme $x \in \mathbb{R}, x > 5$, pak $6 - \frac{5}{x} > 6 - 1 = 5$. Podle tohoto pozorování a indukčního předpokladu je definován i prvek a_{n+1} splňující $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 5$.

Odtud spolu s 1.4.35 dostáváme, že definice naší posloupnosti je korektní.

Posloupnost $\{a_n\}$ je klesající. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že

$$a_n > a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},$$

jinými slovy,

$$a_n - 6 + \frac{5}{a_n} = \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} = \frac{(a_n - 5)(a_n - 1)}{a_n} > 0.$$

Poslední nerovnost ovšem snadno plyne z předchozího tvrzení.

Výpočet limity. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) a předchozích dvou tvrzení je $\{a_n\}$ konvergentní. Limitu označme A . Podle prvního pomocného tvrzení a věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.42(b)) dostáváme $A \geq 5$. Díky Větě 2.2.30 pak dostaneme $\lim a_{n+1} = A$. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) obdržíme

$$\lim a_{n+1} = \lim \left(6 - \frac{5}{a_n} \right) = 6 - \frac{5}{A},$$

a tedy $A = 6 - \frac{5}{A}$. Rovnice má dvě řešení, a sice $A = 1$ a $A = 5$. Poněvadž platí $A \geq 5$, dostáváme $A = 5$. ♣

2.6.21. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku $a_1 < a_2$ a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$. Spočítejte $\lim a_n$.

Řešení. S pomocí 1.4.35 vidíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definována. Nyní matematickou indukcí ukážeme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}. \quad (2.34)$$

Případ $k = 1$. Ze zadané nerovnosti $a_1 < a_2$ vyplývá, že

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) < \frac{1}{2}(a_2 + a_2) = a_2$$

a

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) > \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1.$$

Odtud dále plyne, že

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_2) < \frac{1}{2}(a_2 + a_2) = a_2$$

a podobně

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_2) > \frac{1}{2}(a_3 + a_3) = a_3.$$

Kombinací odhadů dostaneme $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$, což je (2.34) pro $k = 1$.

Indukční krok. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že (2.34) platí pro toto k . Pak z nerovnosti $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ odvodíme

$$a_{2k+3} = \frac{1}{2}(a_{2k+1} + a_{2k+2}) \begin{cases} < a_{2k+2} \\ > a_{2k+1} \end{cases}.$$

Z nerovnosti $a_{2k+3} < a_{2k+2}$ dostaneme

$$a_{2k+4} = \frac{1}{2}(a_{2k+3} + a_{2k+2}) \begin{cases} < a_{2k+2} \\ > a_{2k+3} \end{cases}.$$

Ověřili jsme tedy platnost nerovností (2.34) pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Výpočet limity. Z (2.34) plyne, že posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_1 \leq a_n \leq a_2$. Posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ jsou tedy omezené. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) tedy existují vlastní limity $\lim a_{2n} = A$ a $\lim a_{2n-1} = B$. Ze vztahu

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1})$$

vyplývá, že $B = \frac{1}{2}(A + B)$, a tedy $A = B$. Obě posloupnosti $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ tedy konvergují ke stejné limitě.

Nechť $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Přepíšeme vzorec definující a_k ve tvaru

$$a_{k+1} - a_k = a_{k-1} - a_{k+1}.$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro hodnoty $k = 2, 3, \dots, n$ postupně dostaneme

$$\begin{aligned} a_3 - a_2 &= a_1 - a_3, \\ a_4 - a_3 &= a_2 - a_4, \\ &\vdots \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= a_{n-3} - a_{n-1}, \\ a_n - a_{n-1} &= a_{n-2} - a_n, \\ a_{n+1} - a_n &= a_{n-1} - a_{n+1}. \end{aligned}$$

Sečtením všech těchto rovností dostaneme vztah $a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}$. Odtud plyne, že $A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A$, a tedy $A = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$. ♣

2.6.22. Příklad. Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně pomocí vztahů $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte $\lim a_n$.

Řešení. Korektnost definice. Matematickou indukcí ověříme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou definovány členy posloupnosti $a_1, \dots, a_n$ a $a_n \in [0, 1]$. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro toto n . Potom $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, a tedy $a_{n+1} \leq \frac{1}{1+0} = 1$ a $a_{n+1} \geq \frac{1}{1+1} > 0$. Odtud spolu s 1.4.35 dostáváme, že definice naší posloupnosti je korektní.

Výpočet limity. Definujme funkci

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad g(x) = f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}, \quad x \in [0, 1].$$

Pomocí elementárního výpočtu ověříme, že

- rovnice $g(x) = x$ má v intervalu $[0, 1]$ právě jeden kořen $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$,
- $x < g(x) < c$ pro $x \in [0, c)$ a $c < g(x) < x$ pro $x \in (c, 1]$.

Jelikož $a_2 < c < a_1$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{k+2} = g(a_k)$, dostáváme z vlastností funkce g nerovnosti

$$a_2 < a_4 < \dots < a_{2k} < a_{2k+2} < c < a_{2k+1} < a_{2k-1} < \dots < a_3 < a_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Posloupnosti $\{a_{2k}\}$ a $\{a_{2k-1}\}$ jsou tedy monotónní a omezené, což znamená podle Věty 2.4.1, že jsou konvergentní. Označme $a = \lim a_{2k}$ a $b = \lim a_{2k-1}$. Protože $a_{2k+2} = g(a_{2k}) = \frac{1+a_{2k}}{2+a_{2k}}$, dostáváme z věty o aritmetice limit (Věta 2.2.34) rovnost $a = g(a)$. Proto platí $a = c$. Obdobně odvodíme, že $b = c$, a tedy $\lim a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (vizte Větu 2.3.23). ♣

2.6.23. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Řešení. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.3.21), Příkladu 2.4.5, a Definice 2.4.6 platí

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e.$$

Tudíž podle Příkladu 2.2.46 dostáváme

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

♣

2.6.24. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}}$$

a tedy

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}.$$

Díky Příkladu 2.4.5, Definici 2.4.6 a větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) víme, že

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e.$$

Podle věty o limitě podílu (Věta 2.2.34(c)) je tedy

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

♣

2.6.25. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

♣

2.6.26. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Řešení. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$1 - \frac{1}{j^2} = \frac{j^2 - 1}{j^2} = \frac{(j-1)(j+1)}{j^2},$$

a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

2.6.27. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n b_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Navíc pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $\frac{2j-1}{2j} \leq \frac{2j}{2j+1}$ a součinem těchto n nerovností dostaneme $a_n \leq b_n$. Tedy platí

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Odtud dostaneme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} = 0.$$

♣

Číselné řady

Nejen v matematice, ale i ve fyzice, chemii, ekonomii a dalších vědách, se často setkáváme s posloupnostmi, které vznikají následujícím způsobem. Je dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nová posloupnost má členy:

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots,$$

tj. m -tý člen nové posloupnosti je součtem prvních m členů posloupnosti $\{a_n\}$. Tato situace nastává tak často, že stojí za to těmto speciálním posloupnostem věnovat zvláštní kapitolu.

Stejně jako v předchozí kapitole bude termín posloupnost označovat posloupnost reálných čísel.

3.1. Základní pojmy

Definice konvergentních a divergentních řad.

3.1.1. Definice. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** (je **konvergentní**), je-li $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ vlastní. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (je **divergentní**), jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jemnější rozlišení budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k ∞** , respektive **diverguje k $-\infty$** , jestliže $\lim s_m = \infty$, respektive $\lim s_m = -\infty$. Číslo $a_n, n \in \mathbb{N}$, je **n -tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a číslo $s_m, m \in \mathbb{N}$, je jejím **m -tým částečným součtem**.

3.1.2 (Co je to řada?). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je jakožto matematický objekt totožná s posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokud tedy hovoříme o řadě a ne o posloupnosti, říkáme tím, že nás zajímají otázky související s příslušnou posloupností částečných součtů.

Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí tedy jednak řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojznačnost nepůsobí žádné potíže.

3.1.3. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_m\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_m \begin{cases} \text{existuje} & \begin{cases} \text{vlastní, pak jde o konvergentní řadu,} \\ \text{nevlastní a je rovna} & \begin{cases} \infty, \text{ pak řada diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{ pak řada diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada diverguje a nemá součet.} \end{cases}$$

3.1.4. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti v 2.3.39. Necht $k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel (ve smyslu rozšířené definice uvedené v 2.3.39). Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje řadu, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_m\}_{m=k}^{\infty}$, kde $s_m = \sum_{j=k}^m a_j$, pak tuto limitu nazýváme **součtem řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ neexistuje nebo je nevlastní. Pro jednoduchost se až na drobné výjimky v této kapitole omezíme na řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Případná zobecnění výsledků pro řady tvaru $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ jsou přímočará.

Příklady řad.

3.1.5. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$. Potom platí:

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ tedy diverguje. ♣

3.1.6. Definice. Necht $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

3.1.7. Příklad. Necht $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

- (a) řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$,
- (b) pokud $|q| < 1$, potom $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Řešení. (a) Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^n q^k$. S použitím Příkladu 1.5.8 dostáváme

$$s_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{pro } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ n+1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Případ $q \geq 1$. Potom z výše uvedeného vyplývá, že $\lim s_n = \infty$. Naše řada tedy diverguje.

Případ $|q| < 1$. Potom platí $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$, a tedy naše řada konverguje.

Případ $q = -1$. Řada diverguje podle Příkladu 3.1.5.

Případ $q < -1$. Platí $\lim s_{2n} = \infty$ a $\lim s_{2n-1} = -\infty$, a tedy $\lim s_n$ neexistuje. Proto řada diverguje.

(b) Plyne z předchozího. ♣

3.1.8. Příklad. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Řešení. Podle Příkladu 2.6.25 dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

♣

3.1.9 (součet versus konvergence). Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. Pokud však ukážeme, že je řada konvergentní, můžeme její součet alespoň přiblížit pomocí hodnot částečných součtů.

3.1.10 (změna konečného počtu členů řady). Pro nekonečné řady platí tvrzení obdobné Větě 2.3.16, tedy že změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na konvergenci či divergenci řady či na existenci jejího součtu. Přesněji, máme-li dvě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pro něž existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n = b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (respektive má součet) právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje (respektive má součet).

Pro důkaz předchozího tvrzení označme n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako s_n a n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jako t_n . Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$s_n - \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k = \sum_{k=n_1}^n a_k = \sum_{k=n_1}^n b_k = t_n - \sum_{k=1}^{n_1-1} b_k,$$

neboli $s_n = t_n + c$, kde $c = \sum_{k=1}^{n_1-1} a_k - \sum_{k=1}^{n_1-1} b_k \in \mathbb{R}$. Má-li tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet $A \in \mathbb{R}^*$, pak $\lim s_n = A$, a tedy $\lim t_n = A - c$. Výraz $A - c$ je definován, neboť $c \in \mathbb{R}$. Pokud je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $A \in \mathbb{R}$, a tedy také $A - c \in \mathbb{R}$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Tím je dokázána jedna implikace. Opačnou lze dokázat obdobně.

Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

Základní vlastnosti. Nyní uvedeme jednoduchou nutnou podmínku konvergence řady.

3.1.11. Věta (nutná podmínka konvergence řady). Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Položme $s_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Potom $a_n = s_n - s_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu věty existuje vlastní $\lim s_n$. Zřejmě existuje

také $\lim s_{n-1}$ a platí $\lim s_{n-1} = \lim s_n$. Podle Věty 2.2.34 tedy platí $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. ■

3.1.12. V některých případech lze použít Větu 3.1.11 k odvození divergence řady. Jestliže je $\{a_n\}$ posloupnost a neplatí $\lim a_n = 0$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Například $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje. Věta 3.1.11 nám tak poskytuje jiné řešení Příkladu 3.1.5.

3.1.13. Věta (Bolzanova–Cauchyova podmínka konvergence řady). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní,
- (ii) platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Důkaz. Položme $s_0 = 0$ a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$, platí $\sum_{k=n}^m a_k = s_m - s_{n-1}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Posloupnost $\{s_n\}$ konverguje, a proto podle Věty 2.4.26 splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Pomocí této podmínky ověříme (ii). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Potom nalezneme $p_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq p_0, m \geq p_0: |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = p_0 + 1$. Pro každá $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0$, platí $m > n - 1 \geq n_0 - 1 = p_0$, a tedy

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| = |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Tím je tvrzení (ii) dokázáno.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ověříme Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro posloupnost $\{s_n\}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ podle (3.1). Zvolme $n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0$. Potom podle (ii) platí

$$|s_n - s_m| = \begin{cases} \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon & \text{pro } n > m, \\ 0 < \varepsilon & \text{pro } n = m, \\ \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon & \text{pro } m > n. \end{cases}$$

V prvním případě používáme nerovnost $n \geq m + 1 > n_0$ a ve třetím $m \geq n + 1 > n_0$. Podle Věty 2.4.26 $\{s_n\}$ konverguje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ■

3.1.14. Není těžké si rozmyslet, že výrok (3.1) je ekvivalentní výroku

$$\exists C \in \mathbb{R}, C > 0 \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < C\varepsilon.$$

3.1.15. Příklad. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Řešení. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je zřejmě rostoucí. Z Důsledku 2.4.2 vyplývá, že existuje $\lim s_n$, kterou označíme symbolem A . Navíc platí $A = \sup\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$, a tedy $A \geq s_1 > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme $n = n_0 + 1$ a $m = 2n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n_0$, platí $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0}$. Tudíž máme

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}.$$

Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ jsme tedy odvodili

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tedy nesplňuje (ii) ve Větě 3.1.13, a proto diverguje. Platí tedy $A \notin \mathbb{R}$. Protože $A > 0$, platí $A = \infty$. ♣

3.1.16. Definice. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme **harmonickou řadou**.

3.1.17. Harmonická řada ukazuje, že opačná implikace v tvrzení Věty 3.1.11 neplatí. Platí totiž $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak podle Příkladu 3.1.15 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

3.1.18. Věta. Necht řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet.

- (a) Necht $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (b) Necht je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován. Potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ a $t_m = \sum_{n=1}^m b_n$.

(a) Použitím věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) obdržíme existenci limity částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ a rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \alpha a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha s_m = \alpha \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Obdobně obdržíme existenci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a vztah

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m (a_n + b_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_m + t_m) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} s_m + \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \end{aligned}$$

■

3.1.19. Důsledek (linearita konvergentních řad). Necht jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.1.20. Věta. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní řada. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergentní.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentní. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, je podle Důsledku 3.1.19 také řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. To je spor. ■

3.2. Řady s nezápornými členy

Důležitý speciální případ řad představují řady s nezápornými členy, tedy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq 0$. Takové řady mají vždy součet (Věta 3.2.1) a ke zkoumání jejich konvergence máme k dispozici speciální kritéria (např. Věty 3.2.5, 3.2.8 a 3.2.11).

3.2.1. Věta. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak má $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet.

Důkaz. Označme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ pro $m \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající, protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy. Podle Věty 2.4.1 $\lim\{s_m\}$ existuje, a tedy existuje součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

V tomto a následujících dvou oddílech bude pro nás hlavním problémem rozhodnout, zda daná řada je konvergentní, či ne. Ukážeme několik vět, kterým říkáme *kritéria*, jež nám pomohou tento problém v jistých situacích vyřešit, aniž bychom museli určovat součet dané řady. Nejprve uvedeme kritéria, která umožňují rozhodnout o konvergenci řady na základě srovnání s jinou řadou, o které víme, zda konverguje, či nikoli.

3.2.2. Věta (srovnávací kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.

(a) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak je i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, pak je i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ a $t_m = \sum_{n=1}^m b_n$. Posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající, protože členy posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. Dokážeme, že posloupnost $\{s_m\}$ je shora omezená. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ zřejmě platí

$$s_m = s_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^m a_n \leq s_{n_0} + t_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^m b_n = s_{n_0} + t_m.$$

Posloupnost $\{t_m\}$ je konvergentní, a tedy je posloupnost $\{s_{n_0} + t_m\}$ shora omezená. Proto je i posloupnost $\{s_m\}$ shora omezená. Protože posloupnost $\{s_m\}$ je neklesající a shora omezená, je podle Důsledku 2.4.2 konvergentní. Podle definice je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Tvzení bezprostředně plyne z již dokázaného tvrzení (a). ■

3.2.3. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1}{n^2}$ a $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Z Příkladu 3.1.8 vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.4. Poznámka. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je roven číslu $\frac{1}{6}\pi^2$. K důkazu tohoto tvrzení jsou však třeba pokročilejší pasáže matematické analýzy. K tvrzení se vrátíme v Příkladu ??.

3.2.5. Věta (limitní srovnávací kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a $\lim \frac{a_n}{b_n}$ existuje. Označme $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

- (a) Necht $A \in (0, \infty)$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- (b) Necht $A = 0$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (c) Necht $A = \infty$. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}A$. K tomuto ε nalezneme podle definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{1}{2}A < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}A. \quad (3.2)$$

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Z (3.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n < \frac{2}{A}a_n$. Podle Důsledku 3.1.19(a) je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{A}a_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Z (3.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \frac{3}{2}Ab_n$. Podle Důsledku 3.1.19(a) je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}Ab_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} < 1$. Pak $a_n < b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Položme $K = 1$. Podle definice nevlastní limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} > 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > b_n$. Podle Věty 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. ■

3.2.6. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^4+3} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Potom platí $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Podle Příkladu 3.2.3 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Podle Věty 3.2.5(a) je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. ♣

3.2.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+100}}$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+100}} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Podle Příkladu 3.1.15 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Použitím Věty 3.2.5(c) dostáváme divergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♣

3.2.8. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

(e) Jestliže $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Důkaz. (a) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0, 1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní (Příklad 3.1.7). Podle Věty 3.2.2(a) je tedy také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Předpokládejme, že $A < 1$. Zvolme $q \in (A, 1)$. Pak podle definice limes superior nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sup\{\sqrt[n]{a_n}; n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} < q.$$

Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{a_n} < q,$$

a tedy tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (a).

(c) Předpokládejme, že $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$. Podle Věty 2.4.13 platí

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

a tedy tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (b).

(d) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Předpokládejme, že $A > 1$. Podle Věty 2.4.23 nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = A$. Protože $A > 1$, nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Odtud plyne, že pro každé $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \geq 1$. To znamená, že neplatí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = 0$. Podle Věty 2.2.30 tedy neplatí ani $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Není tudíž splněna nutná podmínka konvergence řady, a tedy podle Věty 3.1.11 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Tvrzení plyne z již dokázaného tvrzení (d) a Věty 2.4.13. ■

3.2.9. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost nezáporných reálných čísel splňující $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ není možné rozhodnout na základě Věty 3.2.8. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{b_n} = 1$, řada $\sum a_n$ je divergentní (Příklad 3.1.15) a řada $\sum b_n$ je konvergentní (Příklad 3.2.3).

3.2.10. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Řešení. Podle Příkladu 2.2.47 platí $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Odtud a z věty o aritmetice limit pro posloupnosti (Věta 2.2.34) plyne, že

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n^k}{a^n}} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Podle Věty 3.2.8(c) tedy řada konverguje. ♣

3.2.11. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad (3.3)$$

pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Jestliže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(d) Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak neplatí $\lim a_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Předpokládejme, že platí (3.3). Matematickou indukcí dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}. \quad (3.4)$$

Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3.4) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

příčemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.4).

Podle Příkladu 3.1.7 a Důsledku 3.1.19 je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle 3.1.10 je také řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konvergentní. Podle Věty 3.2.2(a) je tedy konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Předpokládejme, že platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Pak podle definice limes superior nalezneme $q \in (0, 1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

Tvrzení nyní plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b) a Věty 2.4.13.

(d) Předpokládejme, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Pak podle definice limity nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1. \quad (3.5)$$

Dokážeme, že platí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n \geq a_{n_0}. \quad (3.6)$$

Pro $n = n_0$ je toto tvrzení zřejmé. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \geq a_{n_0}$, pak podle (3.5) platí

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \geq a_n \geq a_{n_0}.$$

Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3.6). Řada má podle předpokladu kladné členy, a tedy $a_{n_0} > 0$. To znamená, že neplatí $\lim a_n = 0$. Podle Věty 3.1.11 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. ■

3.2.12. Příklad. Necht $k \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$ konverguje.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$. Řada diverguje pro $k = 1$, neboť $\lim a_n = 1 \neq 0$ a není tedy splněna nutná podmínka konvergence (Věta 3.1.11).

Předpokládejme, že $k \geq 2$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$ a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(kn+1) \cdots (kn+k)} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^k}{(k + \frac{1}{n}) \cdots (k + \frac{k}{n})}.$$

Z věty o limitě součinu (Věta 2.2.34(b)) dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k^{-k} < 1$. Podle Věty 3.2.11(c) tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ♣

3.2.13. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak o konvergenci či divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůžeme rozhodnout na základě Věty 3.2.11. Označíme-li například $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak platí $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$, $\sum a_n$ diverguje a $\sum b_n$ konverguje.

3.2.14. V souvislosti s tvrzením (d) ve Větě 3.2.11 a s tvrzením (d) ve Větě 3.2.8 upozorníme na to, že předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+(-1)^n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq 2^{-n+(-1)^n} \leq 2^{-n+1},$$

a tedy je uvedená řada konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)). Přesto však platí $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, neboť

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-1+2(-1)^{n+1}} = \begin{cases} 2, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \frac{1}{8}, & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

takže $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

3.2.15. Příklad. Necht $a > 0$. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konverguje.

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0.$$

Řada tedy konverguje podle Věty 3.2.11(c). ♣

3.2.16. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Z Příkladu 2.5.13 plyne, že pokud $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existuje, pak existuje i $\lim \sqrt[n]{a_n}$ a limity se rovnají. To znamená, že je-li splněn předpoklad tvrzení (c) (respektive (d)) Věty 3.2.11, pak je též splněn předpoklad (c) (respektive (e)) Věty 3.2.8. Výpočet $\lim \sqrt[n]{a_n}$ však může být v některých případech podstatně obtížnější než výpočet $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

3.2.17. Věta (kondenzační kritérium). Necht $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$s_k = \sum_{j=1}^k a_j \quad \text{a} \quad t_k = \sum_{j=0}^k 2^j a_{2^j}.$$

$\Leftarrow$ Označme $A = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m < 2^k$. Potom $t_k \leq A$, a tedy platí

$$\begin{aligned} s_m &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \leq t_k \leq A. \end{aligned}$$

Podle Věty 3.2.1 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet. Označme jej B . Podle předchozího platí $B < \infty$ a zřejmě také platí $B \geq 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy konvergentní.

$\Rightarrow$ Označme $C = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom $C \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k \leq m$. Potom $s_m \leq C$ a navíc platí

$$\begin{aligned} s_m &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &= a_1 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_i \geq a_1 + \sum_{j=1}^k 2^{j-1} a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k 2^j a_{2^j} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k 2^j a_{2^j} = \frac{1}{2} t_k, \end{aligned}$$

takže $t_k \leq 2C$. To znamená, že posloupnost $\{t_k\}$ je shora omezená. Podle Věty 3.2.1 má řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ součet. Označme jej D . Podle předchozího platí $D < \infty$ a zřejmě také platí $D \geq 0$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ je tedy konvergentní. ■

Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje (Příklad 3.1.15), zatímco $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (Příklad 3.2.3). V následující větě uvedeme charakterizaci konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. Věta je důležitou aplikací kondenzačního kritéria.

3.2.18. Věta. Necht $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Důkaz. Dokazovaná ekvivalence plyne z následující diskuze.

Případ $\alpha \leq 0$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{n^\alpha} \geq 1$, takže není splněna podmínka $\lim a_n = 0$. Podle Věty 3.1.11 tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje.

Případ $\alpha > 0$. Z definice výrazu n^α (vizte 1.7.15) a vlastností funkcí $\exp$ a $\log$ (vizte 1.7.13 a 1.7.14) plyne, že $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ je nerostoucí posloupnost kladných reálných čísel. Podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$ je geometrickou řadou s kvocientem $2^{1-\alpha}$, a tedy je podle Příkladu 3.1.7 konvergentní právě tehdy, když $2^{1-\alpha} < 1$. To nastává právě tehdy, když $\alpha > 1$. ■

3.2.19. Příklad. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ konverguje.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}}$ a $b_n = n^{-\frac{7}{6}}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > 0$ a $b_n > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{7}{6} > 1$. Navíc platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim n^{\frac{7}{6}} \cdot \frac{1+\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n^3}} = \lim \frac{n^{\frac{7}{6}} + n^{\frac{3}{2}}}{1+n^{\frac{3}{2}}} = \lim \frac{1+n^{-\frac{1}{3}}}{1+n^{-\frac{3}{2}}} = 1.$$

Podle Věty 3.2.5(a) tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ♣

3.3. Řady s obecnými členy

V tomto oddílu odvodíme několik postačujících podmínek pro konvergenci řad, jejichž členy mohou být kladné i záporné. Prvním výsledkem tohoto typu bude Leibnizova věta.

3.3.1. Věta (Leibniz¹). Necht $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost splňující $\lim a_n = 0$. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergentní.

¹Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Odtud, z předpokladu věty a Věty 2.4.1 plyne, že $\inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$, tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = \sum_{n=1}^m (-1)^n a_n.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k+2} - s_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0 \quad \text{a} \quad s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0,$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2k}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2k+1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.4.1) mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.3.21) také $\lim a_{2k+1} = 0$. Z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26) tedy dostáváme

$$\lim s_{2k+1} = \lim(s_{2k} - a_{2k+1}) = \lim s_{2k} - \lim a_{2k+1} = \lim s_{2k},$$

takže posloupnosti $\{s_{2k}\}$ a $\{s_{2k+1}\}$ mají společnou limitu $s \in \mathbb{R}^*$. Protože ale pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$. Odtud díky Větě 2.3.23 (vizte též 2.3.24) plyne, že $\lim s_n = s$, a naše řada je tedy konvergentní.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, potom je posloupnost $\{-a_n\}$ nerostoucí a $\lim(-a_n) = 0$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-a_n)$ podle již dokázaného konverguje. Podle Důsledku 3.1.19 konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. ■

3.3.2. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí a navíc platí $\lim \frac{1}{n} = 0$. Z Věty 3.3.1 tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní. ♣

3.3.3. Předpoklad monotonie ve Větě 3.3.1 nelze vynechat. Příkladem je řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ liché.} \end{cases}$$

Posloupnost $\{a_n\}$ sestává z nezáporných čísel a konverguje k 0, není však monotónní. Označme $\{s_m\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2k} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}.$$

Podle Příkladu 3.1.15 je $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = \infty$, a tedy uvedená řada diverguje.

V následujícím lemmatu využíváme úmluvu uvedenou v Označení 1.5.2.

3.3.4. Lemma (Abelova² parciální sumace). Necht $m \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ jsou reálná čísla.

(a) Necht $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, a $\sigma_k = \sum_{j=n}^k a_j$, $k = n, \dots, m$. Pak platí

$$\sum_{j=n}^m a_j b_j = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \quad (3.7)$$

(b) Označme $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$, $k = 0, \dots, m$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, platí

$$\sum_{j=n}^m a_j b_j = -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \quad (3.8)$$

Důkaz. (a) Pomocí elementárních úprav dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^m a_j b_j &= a_n b_n + \dots + a_m b_m \\ &= \sigma_n b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) b_{n+1} + \dots + (\sigma_m - \sigma_{m-1}) b_m \\ &= \sigma_n (b_n - b_{n+1}) + \dots + \sigma_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + \sigma_m b_m \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) + \sigma_m b_m. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (a).

(b) Podobně jako v důkazu tvrzení (a) platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^m a_j b_j &= a_n b_n + \dots + a_m b_m \\ &= (s_n - s_{n-1}) b_n + (s_{n+1} - s_n) b_{n+1} + \dots + (s_m - s_{m-1}) b_m \\ &= -s_{n-1} b_n + s_n (b_n - b_{n+1}) + \dots + s_{m-1} (b_{m-1} - b_m) + s_m b_m \\ &= -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m. \end{aligned}$$

Tím je dokázáno tvrzení (b). ■

3.3.5. Věta (Abelovo a Dirichletovo³ kritérium). Necht $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je monotónní. Necht je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

- (A) posloupnost $\{b_n\}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- (D) $\lim b_n = 0$ a posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

²Niels Henrik Abel (1802–1829)

³Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

Důkaz. Nejprve budeme předpokládat, že posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí, neboli platí

$$\forall n \in \mathbb{N}: b_n - b_{n+1} \geq 0. \quad (3.9)$$

Tvrzení věty dokážeme za předpokladu, že je splněna podmínka (A), a poté za předpokladu splnění (D). V obou případech dokážeme konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ověřením Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro řady (Věta 3.1.13).

Podmínka (A). S pomocí (A) nalezneme $K \in (0, \infty)$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}: |b_n| \leq K. \quad (3.10)$$

Pro ověření Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je podle (A) konvergentní, a proto splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku (Věta 3.1.13), takže k našemu ε můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{j=n}^m a_j \right| < \varepsilon. \quad (3.11)$$

Zvolme $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a označme $\sigma_k = \sum_{j=n}^k a_j, k = n, \dots, m$. Potom díky (3.11) platí

$$\forall k \in \{n, \dots, m\}: |\sigma_k| < \varepsilon. \quad (3.12)$$

Pak postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=n}^m a_j b_j \right| &= \left| \left(\sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j (b_j - b_{j+1}) \right) + \sigma_m b_m \right| && \text{(Lemma 3.3.4(a))} \\ &\leq \left(\sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j| (b_j - b_{j+1}) \right) + |\sigma_m| |b_m| && \text{(trojúhelníková nerovnost a (3.9))} \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{j=n}^{m-1} (b_j - b_{j+1}) \right) + \varepsilon |b_m| && \text{(podle (3.12))} \\ &= \varepsilon (b_n - b_m) + \varepsilon |b_m| && \text{(teleskopická suma, vizte 1.5.5)} \\ &\leq \varepsilon (|b_n| + 2|b_m|) \leq 3K\varepsilon. && \text{(podle (3.10))} \end{aligned}$$

Díky předchozímu a 3.1.14 splňuje $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, a tedy je podle Věty 3.1.13 konvergentní.

Podmínka (D). Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $s_k = \sum_{j=1}^k a_j$. Díky podmínce (D) nalezneme $M \in (0, \infty)$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}: |s_n| \leq M. \quad (3.13)$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. S pomocí (D) k němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |b_n| < \varepsilon \quad (3.14)$$

Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ splňují $m \geq n \geq n_0$. Z Lemmatu 3.3.4(b) plyne

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{j=n}^m a_j b_j \right| \\
 &= \left| -s_{n-1} b_n + \sum_{j=n}^{m-1} s_j (b_j - b_{j+1}) + s_m b_m \right| \quad (\text{Lemma 3.3.4(b)}) \\
 &\leq M |b_n| + \sum_{j=n}^{m-1} M (b_j - b_{j+1}) + M |b_m| \quad (\text{trojúhelníková nerovnost, (3.9) a (3.13)}) \\
 &= M |b_n| + M (b_n - b_m) + M |b_m| \quad (\text{teleskopická suma, vizte 1.5.5}) \\
 &\leq 4M\varepsilon. \quad (\text{podle (3.14)})
 \end{aligned}$$

Díky předchozímu a 3.1.14 splňuje $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, a tedy je podle Věty 3.1.13 konvergentní.

Je-li posloupnost $\{b_n\}$ neklesající, lze důkaz provést obdobně, nebo lze již dokázané tvrzení použít pro posloupnost $\{-b_n\}$. ■

3.3.6. Leibnizova věta (Věta 3.3.1) je speciálním případem Věty 3.3.5(D), protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů (vizte Příklad 3.1.5).

3.3.7. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sin(nx) = \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $m \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sum_{n=1}^m \sin(nx) &= \sum_{n=1}^m (\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x) \\
 &= \cos\left(1 - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x \quad (\text{teleskopická suma}) \\
 &= \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x.
 \end{aligned}$$

Jestliže $x \notin \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak z předchozího plyne pro každé $m \in \mathbb{N}$ odhad

$$\left| \sum_{n=1}^m \sin(nx) \right| \leq \frac{|\cos(\frac{1}{2}x) - \cos(m + \frac{1}{2})x|}{|2 \sin(\frac{1}{2}x)|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{1}{2}x)|},$$

a tedy má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů.

Jestliže $x \in \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak sestává řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ z nulových členů, a má tedy omezenou posloupnost částečných součtů. ♣

3.3.8. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 \sin(\tfrac{1}{2}x) \cos(kx) = \sin(n + \tfrac{1}{2})x - \sin(n - \tfrac{1}{2})x.$$

Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $m \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2 \sin(\tfrac{1}{2}x) \cdot \sum_{n=1}^m \cos(nx) &= \sum_{n=1}^m (\sin(n + \tfrac{1}{2})x - \sin(n - \tfrac{1}{2})x) \\ &= -\sin(1 - \tfrac{1}{2})x + \sin(m + \tfrac{1}{2})x \quad (\text{teleskopická suma}) \\ &= \sin(m + \tfrac{1}{2})x - \sin(\tfrac{1}{2}x). \end{aligned}$$

Jestliže $x \notin \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak z předchozího plyne

$$\left| \sum_{n=1}^m \cos(nx) \right| \leq \frac{|\sin(m + \tfrac{1}{2})x - \sin(\tfrac{1}{2}x)|}{|2 \sin(\tfrac{1}{2}x)|} \leq \frac{1}{|\sin(\tfrac{1}{2}x)|},$$

a tedy má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ omezenou posloupnost částečných součtů.

Jestliže $x \in \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ zřejmě nemá omezenou posloupnost částečných součtů. ♣

3.3.9. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Necht $x \in \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sin nx$, $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7 je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezená. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a splňuje $\lim b_n = 0$. Z Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)) tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ konverguje. ♣

3.3.10. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Jestliže $x \in \mathbb{R} \setminus \{2l\pi; l \in \mathbb{Z}\}$, pak lze konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ dokázat obdobně jako v řešení Příkladu 3.3.9. Jestliže $x = 2l\pi$, kde $l \in \mathbb{Z}$, potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos nx = 1$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.15. ♣

3.4. Absolutní konvergence číselných řad

3.4.1. Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale není absolutně konvergentní, říkáme, že je **neabsolutně konvergentní**.

3.4.2. Řada, jejíž členy nemění znaménko, konverguje právě tehdy, když konverguje absolutně.

3.4.3. Věta. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Důkaz. Podle Věty 3.1.13 splňuje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0$, platí $\sum_{j=n}^m |a_j| < \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0$, platí

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| \leq \sum_{j=n}^m |a_j| < \varepsilon,$$

a tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Podle Věty 3.1.13 je tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$ a $\sigma_m = \sum_{n=1}^m |a_n|$. Potom zřejmě platí pro každé $m \in \mathbb{N}$ nerovnost $s_m \leq \sigma_m$. Odtud, z definice součtu řady a Věty 2.2.42(b) plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ■

3.4.4. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje (vizte Příklad 3.2.3), je podle Věty 3.4.3 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolutně konvergentní. ♣

3.4.5. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\{b_n\}$ monotónní posloupnost splňující $\lim b_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní podle Věty 3.3.1. Naproti tomu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentní podle Věty 3.2.18. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní. ♣

Následující dvě věty jsou variantami Cauchyova odmocninového a d'Alembertova podílového kritéria pro absolutní konvergenci řad.

3.4.6. Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) Podle již dokázaného Cauchyova kritéria pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.8(a)) dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Tvrzení (b) a (c) lze odvodit obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.8(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekongruje k nule. Podle Věty 2.2.24 pak $\{a_n\}$ také nekongruje k nule. Odtud plyne podle Věty 3.1.11 divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(e) Tvrzení bezprostředně plyne z (d). ■

3.4.7. Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nenulovými členy.

(a) Jestliže platí

$$\exists q \in (0, 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(b) Je-li $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(c) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.

(d) Je-li $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak není pravda, že $\lim a_n = 0$, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Důkaz. (a) D'Alembertovo podílové kritérium pro řady s nezápornými členy (Věta 3.2.11(a)) ukazuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Při důkazu tvrzení (b) a (c) lze postupovat obdobně.

(d) Podle Věty 3.2.11(d) dostáváme, že posloupnost $\{|a_n|\}$ nekongruje k 0. Podle Věty 2.2.24 pak $\{a_n\}$ také nekongruje k 0. Odtud plyne díky Větě 3.1.11 divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

3.4.8. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ konverguje neabsolutně.

Řešení. Neplatnost absolutní konvergence. Protože

$$\lim \frac{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{(n+1)\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 1$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje podle Věty 3.2.18, z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ diverguje. Proto řada ze zadání nekongruje absolutně.

Neabsolutní konvergence. Použijeme Leibnizovo kritérium (Věta 3.3.1). Řada zřejmě pravidelně střídá znaménka. Dále platí

$$\lim \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\frac{1}{n+1}} = 0.$$

Nakonec potřebujeme rozhodnout o platnosti nerovnosti

$$a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \geq \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} = a_{n+1}. \quad (3.15)$$

Tuto nerovnost však snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost

$$(n+1)(n+2) \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right) + 1 \geq 0,$$

jež platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí i (3.15). Ověřili jsme, že naše řada splňuje předpoklady Věty 3.3.1, a proto řada konverguje. Řada ze zadání je tedy neabsolutně konvergentní. ♣

3.4.9. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Zadaná řada je konvergentní podle Příkladu 3.3.9. K ověření neabsolutní konvergence je třeba ukázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n} \right|$. Protože však

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left| \frac{\sin n}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n},$$

stačí podle Věty 3.2.2(b) dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$. Pomocí vzorce pro dvojnásobný argument kosinu dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n}.$$

Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$ konverguje. Pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2n}{2n}$. Podle Příkladu 3.3.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$ konverguje. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{n} + \frac{\cos 2n}{n}.$$

Podle Důsledku 3.1.19(b) konverguje i harmonická řada, což je spor (Příklad 3.1.15). ♣

3.4.10. Věta (Toeplitz⁴). Necht $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla splňující

- (a) pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = 0$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,
- (c) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| < \infty$.

Necht $\{a_k\}$ je konvergentní posloupnost. Potom je posloupnost $\{b_n\}$, kde $b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$, dobře definovaná a platí $\lim b_n = \lim a_n$.

Důkaz. Označme $C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|$. Posloupnost $\{a_k\}$ je omezená, neboť je konvergentní. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom podle (c) platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \leq C \cdot \sup\{|a_k|; k \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

a tedy řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$ konverguje absolutně, takže b_n je reálné číslo.

Speciální případ $\lim a_k = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0: |a_k| < \varepsilon. \quad (3.16)$$

⁴Otto Toeplitz (1881–1940)

Potom platí

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \right|.\end{aligned}$$

Díky (a) platí rovnost

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k = 0,$$

neboť uvažovaná suma má konečný počet sčítanců, a tedy lze užít větu o aritmetice limit. Dále odhadneme s pomocí (c) a (3.16)

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \right| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k} a_k| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{n,k}| \varepsilon \leq C \varepsilon.\end{aligned}$$

Dohromady tedy díky Větě 2.4.14 máme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |b_n| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^{k_0} c_{n,k} a_k \right| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} c_{n,k} a_k \right| \leq C \varepsilon.$$

Odtud plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Obecný případ. Označme $\lim a_n = A$. Máme $A \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} (a_k - A), \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A$$

jsou konvergentní, a proto podle Věty 3.1.19(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} (a_k - A) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A.$$

Potom můžeme psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} (a_k - A) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} A.$$

První limita je rovna 0 podle předchozí části, neboť $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k - A) = 0$. Druhá limita je rovna A díky (b). Dohromady tedy dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

V následující větě ukážeme důležitý speciální případ Toeplitzovy věty.

3.4.11. Věta. Necht' $\{a_n\}$ je posloupnost. Jestliže platí $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = A.$$

Důkaz. Pro $n, k \in \mathbb{N}$ položme

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{pokud } k \leq n, \\ 0, & \text{pokud } k > n. \end{cases}$$

Ověříme předpoklady Toeplitzovy věty (Věta 3.4.10). Necht' $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

a tedy předpoklad (a) je splněn. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

je splněn i předpoklad (b). Konečně protože $c_{n,k} \geq 0$ pro každé $n, k \in \mathbb{N}$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Platí tedy $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| = 1 < \infty$, takže i předpoklad (c) je ověřen. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k,$$

plyne tvrzení z Toeplitzovy věty (Věta 3.4.10). ■

Z následujícího příkladu vyplývá, že implikaci ve Větě 3.4.11 nelze obrátit.

3.4.12. Příklad. Necht' $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud s pomocí Věty 2.3.23 snadno plyne dokazované tvrzení. ♣

3.5. Přerovnání řad

Sčítáme-li konečně mnoho reálných čísel $a_1, \dots, a_m$, pak výsledný součet nezávisí na pořadí sčítanců $a_1, \dots, a_m$. Jinými slovy, je-li π libovolná bijekce množiny $\{1, \dots, m\}$ na sebe, pak platí $\sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^m a_{\pi(n)}$. V tomto oddílu ukážeme, za jakých podmínek platí analogie uvedeného pozorování i pro nekonečné řady.

3.5.1. Definice. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Je-li $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ **přerovnáním** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.5.2. Uvažujme například bijekci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definovanou předpisem

$$\pi(n) = \begin{cases} n+1 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ n-1 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Máme-li řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots,$$

pak pomocí bijekce π obdržíme přerovnanou řadu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} &= a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)} + a_{\pi(4)} + \dots \\ &= a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \dots \end{aligned}$$

Přerovnání absolutně konvergentní řady. Následující jednoduché lemma v dalším výkladu několikrát použijeme.

3.5.3. Lemma. Necht $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je zobrazení a $A \subset f(\mathbb{N})$ je konečná množina. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A \subset \{f(1), \dots, f(n)\}$.

Důkaz. Pokud je A prázdná, pak stačí položit například $n = 1$. Předpokládejme, že A je neprázdná. Pro každé $a \in A$ nalezneme $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že platí $f(n_a) = a$. Množina $B = \{n_a; a \in A\}$ je neprázdná a konečná, neboť A je neprázdná a konečná. Položme $n = \max B$. Potom platí

$$A = f(B) \subset f(\{1, \dots, n\}) = \{f(1), \dots, f(n)\},$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

3.5.4. Lemma. Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n| < \varepsilon$.

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a s její součet. Necht $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|s - s_{n_0-1}| < \varepsilon$. Označme $\{t_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ částečné součty řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, tj.

$$t_n = a_{n_0} + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $s_n = s_{n_0-1} + t_n$, a tedy také

$$\lim t_n = \lim(s_n - s_{n_0-1}) = s - s_{n_0-1}.$$

Posloupnost $\{t_n\}_{n=n_0}^\infty$ tedy konverguje, takže $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ je konvergentní a její součet je roven $s - s_{n_0-1}$. Tedy platí

$$\left| \sum_{n=n_0}^\infty a_n \right| = |s - s_{n_0-1}| < \varepsilon.$$

■

3.5.5. Věta. Necht řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolutně konverguje a $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. Pak přerovnaná řada $\sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$.

Důkaz. Absolutní konvergence. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a množinu $A = \{1, \dots, m\}$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$

Máme tedy $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^m |a_{\pi(j)}| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{i=1}^\infty |a_i|.$$

Odtud podle Věty 3.2.1 plyne, že řada $\sum_{j=1}^\infty |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^\infty a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně.

Rovnost součtů. Označme

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{l=1}^n a_l, & t_n &= \sum_{l=1}^n a_{\pi(l)}, & n &\in \mathbb{N}, \\ s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, & t &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n. \end{aligned}$$

Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ a $\sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pomocí Lemma 3.5.4 nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{l=m+1}^\infty |a_l| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{l=m+1}^\infty |a_{\pi(l)}| < \varepsilon. \quad (3.17)$$

Lemma 3.5.3 aplikujeme na zobrazení π^{-1} a π a nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}, \\ \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}. \end{aligned}$$

Položíme-li $k = \max\{j, n\}$, máme $k \geq n$, a dostaneme

$$\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\}, \quad (3.18)$$

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}. \quad (3.19)$$

Zvolme libovolné $p \in \mathbb{N}$, $p \geq k$. Označme

$$A = \{1, \dots, p\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(p)\},$$

$$B = \{\pi(1), \dots, \pi(p)\} \setminus \{1, \dots, p\}.$$

Pak podle (3.19) máme $A \subset \{l \in \mathbb{N}; l > m\}$ a podle (3.18) je $B \subset \{\pi(l); l \in \mathbb{N}, l > m\}$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} |s_p - t_p| &= \left| \sum_{l=1}^p a_l - \sum_{l=1}^p a_{\pi(l)} \right| = \left| \sum_{i \in A} a_i - \sum_{j \in B} a_j \right| \leq \sum_{i \in A} |a_i| + \sum_{j \in B} |a_j| \\ &\leq \sum_{l=m+1}^{\infty} |a_l| + \sum_{l=m+1}^{\infty} |a_{\pi(l)}| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{p \rightarrow \infty} (s_p - t_p) = 0$, a tedy $s = t$. Tím je důkaz dokončen. ■

Riemannova věta. Předcházející věta říká, že přerovnání absolutně konvergentní řady nemění její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady však toto tvrzení neplatí. Nejprve ukážeme příklad řady a jejího přerovnání s rozdílnými součty.

3.5.6. Příklad. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdots$$

Dokažte, že existuje přerovnání této řady, které má jiný součet než původní řada.

Řešení. Zadanou řadu přepíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $a_{2n} = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $s_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Odtud podle Věty 2.3.23 plyne, že $\lim s_n = 0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$.

Položme

$$\pi(n) = \begin{cases} 4k-3 & \text{pro } n = 3k-2, k \in \mathbb{N}, \\ 4k-1 & \text{pro } n = 3k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 2k & \text{pro } n = 3k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom platí

$$a_{\pi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\pi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\pi(3k)} = -\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots$$

Označme n -tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n . Potom platí

$$\sigma_{3n} = \sum_{k=1}^n (a_{\pi(3k-2)} + a_{\pi(3k-1)} + a_{\pi(3k)}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)2k}, \quad (3.20)$$

$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1}, \quad (3.21)$$

$$\sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}. \quad (3.22)$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k} \leq \frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2(a)) a Věty 3.2.18. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (3.20) tedy platí vztah $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n} = s \in (0, \infty)$. Nyní snadno podle (3.21) a (3.22) dostáváme, že platí také $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n+2} = s$. Podle Věty 2.3.23 obdržíme $\lim \sigma_n = s$. Součet přerovnané řady je s , takže se liší od součtu původní řady. ♣

Následující věta mimo jiné ukazuje, že chování řady a jejího přerovnání popsané v předcházejícím příkladu nastává pro každou neabsolutně konvergentní řadu.

3.5.7. Věta (Riemann⁵). Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a necht $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s .

Zbytek tohoto oddílu bude věnován důkazu Riemannovy věty.

3.5.8. Označení. Pro $x \in \mathbb{R}$ označme $x^+ = \max\{x, 0\}$ a $x^- = \max\{-x, 0\}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující vztahy:

$$x^+ \geq 0, x^- \geq 0, x = x^+ - x^-, |x| = x^+ + x^-, (-x)^+ = x^-, (-x)^- = x^+.$$

3.5.9. Lemma. Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Pak platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.

Důkaz. Jelikož obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ sestávají z nezáporných čísel, jejich součty existují a jsou buď konečné nebo rovné ∞ . Označme tyto součty po řadě s_+ a s_- . Jestliže jsou s_+ i s_- vlastní, potom podle Důsledku 3.1.19 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$$

konverguje, což je spor s předpokladem.

Předpokládáme-li $s_+ = \infty$ a $s_- \in \mathbb{R}$, pak dostaneme snadno z věty o aritmetice limit (Věta 2.3.26)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \infty,$$

což je opět spor s předpokladem. Analogicky bychom pak přivedli ke sporu předpoklad $s_+ \in \mathbb{R}$ a $s_- = \infty$. Zbývá tedy pouze možnost $s_+ = s_- = \infty$. ■

3.5.10. Lemma. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ a $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\pi(n)} = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_k \in B(A, \varepsilon)$. Podle Lemmatu 3.5.3 nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\{1, \dots, k_0\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, pak máme $\pi(n) > k_0$, a tedy $a_{\pi(n)} \in B(A, \varepsilon)$, čímž je tvrzení dokázáno. ■

Riemannova věta (Věta 3.5.7) bude snadným důsledkem následující obecnější věty.

⁵Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

3.5.11. Věta. Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \leq \beta$. Pak existuje bijekce $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro částečné součty $\{\sigma_n\}$ přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí

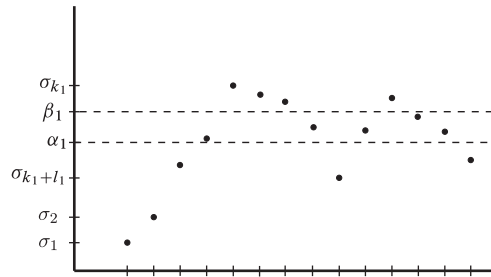
$$\liminf \sigma_n = \alpha \quad \text{a} \quad \limsup \sigma_n = \beta. \quad (3.23)$$

3.5.12 (myšlenka důkazu). Důkaz Věty 3.5.11 je obtížnější než zatím uvedené důkazy, ale základní myšlenka je jednoduchá. Označíme

$$P = \{n \in \mathbb{N}; a_n \geq 0\} \quad \text{a} \quad Q = \{n \in \mathbb{N}; a_n < 0\}.$$

Množiny P a Q zřejmě rozloží množinu $\mathbb{N}$ na dvě disjunktní podmnožiny.

Nalezneme posloupnosti $\{\alpha_j\}$ a $\{\beta_j\}$ splňující $\lim \alpha_j = \alpha$, $\lim \beta_j = \beta$ a pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_j < \beta_j$. Zkonstruovat hledanou bijekci π znamená určit hodnoty $\pi(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tyto hodnoty budeme konstruovat induktivně. Nejprve nalezneme prvky $\pi(1) < \pi(2) < \dots < \pi(k_1)$ z množiny P , kde $k_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1} a_{\pi(j)} > \beta_1$. Potom nalezneme prvky $\pi(k_1 + 1) < \pi(k_1 + 2) < \dots < \pi(k_1 + l_1)$ z množiny M , kde $l_1 \in \mathbb{N}$ je nejmenší přirozené číslo takové, že platí $\sum_{j=1}^{k_1+l_1} a_{\pi(j)} < \alpha_1$. Tento postup potom opakujeme s čísly $\beta_2, \alpha_2, \beta_3, \dots$ tak, že střídavě vybíráme prvky z množin P a M , přičemž každý vybereme právě jednou. Částečné součty takto vznikající přerovnané řady nejprve tedy vystoupají nad hodnotu β_1 , pak začnou klesat až pod hodnotu α_1 , pak začnou stoupat až nad hodnotu β_2 a tak dále. Tento postup vede ke splnění (3.23). Následující obrázek nám pomůže lépe pochopit celý postup, který nyní provedeme podrobně.



OBRÁZEK 1.

Důkaz Věty 3.5.11. Použijeme označení z 3.5.12. Již víme, že platí $\mathbb{N} = P \cup Q$ a $P \cap Q = \emptyset$. Dokážeme, že množiny P a Q jsou nekonečné. Předpokládejme pro spor nejprve, že P je konečná. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n > \max P$, platí $a_n < 0$, a tedy $a_n^+ = 0$. Z tohoto pozorování plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konverguje. To je ovšem ve sporu s Lemmatem 3.5.9. Obdobně bychom přivedli ke sporu předpoklad, že množina Q je konečná.

Prvky množiny P uspořádáme do rostoucí posloupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Platí tedy $P = \{p_n; n \in \mathbb{N}\}$. Podobně uspořádáme prvky množiny Q do rostoucí posloupnosti $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{n=1}^m a_{p_n} = \sum_{n=1}^{p_m} a_n^+ \quad a \quad \sum_{n=1}^m a_{q_n} = \sum_{n=1}^{q_m} (-a_n^-).$$

Odtud, z Věty 2.2.42(b) a z Lemmatu 3.5.9 plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \infty. \quad (3.24)$$

Obdobně lze odvodit rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{q_n} = -\infty. \quad (3.25)$$

Položme $k_0 = l_0 = 0$. Konstrukce hledaného přerovnání se bude opírat o následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení. Existují rostoucí posloupnosti přirozených čísel $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí:

- (a) k_j je nejmenší přirozené číslo splňující $k_j > k_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_{j-1}} a_{q_k} \geq \beta_j, \quad (3.26)$$

- (b) l_j je nejmenší přirozené číslo splňující $l_j > l_{j-1}$ a zároveň

$$\sum_{k=1}^{k_j} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{q_k} \leq \alpha_j. \quad (3.27)$$

Důkaz pomocného tvrzení. Budeme postupovat pomocí matematické indukce. Nejprve nalezneme nejmenší $k_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{p_k} \geq \beta_1.$$

Takové k_1 existuje díky (3.24). Nyní s pomocí (3.25) nalezneme nejmenší $l_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\sum_{k=1}^{k_1} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_1} a_{q_k} \leq \alpha_1.$$

Tím je první krok konstrukce proveden.

Nyní předpokládejme, že přirozená čísla k_j a l_j jsou již zkonstruována. S pomocí (3.24) nalezneme nejmenší přirozené číslo k_{j+1} splňující $k_{j+1} > k_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_j} a_{q_k} \geq \beta_{j+1}.$$

Dále s pomocí (3.25) nalezneme nejmenší přirozené číslo l_{j+1} splňující $l_{j+1} > l_j$ a

$$\sum_{k=1}^{k_{j+1}} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_{j+1}} a_{q_k} \leq \alpha_{j+1}.$$

Tím je konstrukce provedena a pomocné tvrzení dokázáno. ■

Konstrukce bijekce π . Neformálně řečeno, posloupnost hodnot $\{\pi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ budeme definovat jako

$$p_1, p_2, \dots, p_{k_1}, q_1, q_2, \dots, q_{l_1}, p_{k_1+1}, \dots, p_{k_2}, q_{l_1+1}, \dots, q_{l_2}, \dots$$

Formálně přesný zápis může vypadat následovně. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$k_{j-1} + l_{j-1} < k_j + l_{j-1} < k_j + l_j. \quad (3.28)$$

Pro $j \in \mathbb{N}$ označme

$$A_j = (k_{j-1} + l_{j-1}, k_j + l_{j-1}] \cap \mathbb{N} \quad \text{a} \quad B_j = (k_j + l_{j-1}, k_j + l_j] \cap \mathbb{N}.$$

Protože $k_0 = l_0 = 0$, dostáváme z (3.28) rovnost $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cup B_j)$. Navíc jsou množiny $A_i, B_j, i, j \in \mathbb{N}$, po dvou disjunktní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\pi(n) = \begin{cases} p_{n-l_{j-1}}, & \text{pokud } n \in A_j, \\ q_{n-k_j}, & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases}$$

Platí $\pi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Přímou z definice plyne, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\pi(A_j) = \{p_{k_{j-1}+1}, \dots, p_{k_j}\} \quad \text{a} \quad \pi(B_j) = \{q_{l_{j-1}+1}, \dots, q_{l_j}\}. \quad (3.29)$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \pi(\mathbb{N}) &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (\pi(A_j) \cup \pi(B_j)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\{p_{k_{j-1}+1}, \dots, p_{k_j}\} \cup \{q_{l_{j-1}+1}, \dots, q_{l_j}\}) \\ &= P \cup Q = \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Prostota π . Pro každé $j \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení $\pi|_{A_j}, \pi|_{B_j}$ prostá, neboť $\{p_j\}$ a $\{q_j\}$ jsou rostoucí posloupnosti. Dále máme $\pi(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap \pi(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = P \cap Q = \emptyset$ a navíc podle (3.29) pro každé $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$, platí $\pi(A_i) \cap \pi(A_j) = \emptyset$ a $\pi(B_i) \cap \pi(B_j) = \emptyset$. Z právě uvedených faktů již plyne, že π je prosté.

Rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. Pro hodnotu n -tého částečného součtu σ_n přerovnané řady platí podle definice π následující vztah

$$\sigma_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-l_{j-1}} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{l_j-1} a_{q_k}, & \text{pokud } n \in A_j, \\ \sum_{k=1}^{k_j} a_{p_k} + \sum_{k=1}^{n-k_j} a_{q_k}, & \text{pokud } n \in B_j. \end{cases} \quad (3.30)$$

Zvolme $j \in \mathbb{N}$. Podle (3.27) platí $\sigma_{k_j+l_j} \leq \alpha_j$. Dále platí buď $l_j > l_{j-1} + 1$ nebo $l_j = l_{j-1} + 1$. V prvním případě máme $l_j - 1 > l_{j-1}$, a tedy, díky podmince minimality v (b), platí $\sigma_{k_j+l_{j-1}} > \alpha_j$. Pokud nastává druhý případ, potom $\sigma_{k_j+l_{j-1}} = \sigma_{k_j+l_{j-1}} \geq \beta_j > \alpha_j$ podle (3.26). Odtud plyne

$$\begin{aligned} \alpha_j &\geq \sigma_{k_j+l_j} = \sigma_{k_j+l_{j-1}} + a_{q_{l_j}} \\ &\geq \alpha_j + a_{q_{l_j}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, a tedy platí $\lim a_n = 0$ (Věta 3.1.11). Užitím Lemmatu 3.5.10 obdržíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\pi(n)} = 0$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.2.30) plyne $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{q_{l_j}} = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{\pi(k_j+l_j)} = 0$. Odtud, z (3.31) a z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) snadno dostaneme

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{k_j+l_j} = \alpha. \quad (3.32)$$

Podle věty o vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot (Věta 2.4.23) dostaneme nerovnost $\liminf \sigma_n \leq \alpha$. Nyní dokážeme opačnou nerovnost.

Pro $n \in A_j$ platí

$$\sigma_n = \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}} + \sum_{i=k_{j-1}+l_{j-1}+1}^n a_{p_{i-l_{j-1}}} \geq \sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}},$$

neboť členy $a_{p_{i-l_{j-1}}}$ v předchozí sumě jsou nezáporné. Pro $n \in B_j$ platí

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^n a_{q_{i-k_j}} \\ &\geq \sigma_{k_j+l_{j-1}} + \sum_{i=k_j+l_{j-1}+1}^{k_j+l_j} a_{q_{i-k_j}} = \sigma_{k_j+l_j}, \end{aligned}$$

neboť $n \leq k_j + l_j$ a členy $a_{q_{i-k_j}}$ v předchozí sumě jsou záporné. Pro $n \in A_j \cup B_j$ tedy dohromady máme

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\}. \quad (3.33)$$

Pokud $\alpha = -\infty$, je nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$ zřejmá. Předpokládejme, že $\alpha > -\infty$. Zvolme $\alpha' \in \mathbb{R}$, $\alpha' < \alpha$. K němu s pomocí (3.32) nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0: \sigma_{k_j+l_j} > \alpha'. \quad (3.34)$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ splňuje $n > k_{j_0} + l_{j_0}$. K němu existuje $j \in \mathbb{N}$, $j > j_0$, takové, že $n \in A_j \cup B_j$. Potom podle (3.33) a (3.34) platí

$$\sigma_n \geq \min\{\sigma_{k_{j-1}+l_{j-1}}, \sigma_{k_j+l_j}\} > \alpha'.$$

Tím je dokázána nerovnost $\liminf \sigma_n \geq \alpha$. Spolu s již dokázanou opačnou nerovností $\liminf \sigma_n \leq \alpha$ dostáváme rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$.

Rovnost $\limsup \sigma_n = \beta$. Tento vztah lze dokázat obdobně jako rovnost $\liminf \sigma_n = \alpha$. ■

Riemannovu větu (Věta 3.5.7) lze nyní snadno dokázat pomocí Věty 3.5.11.

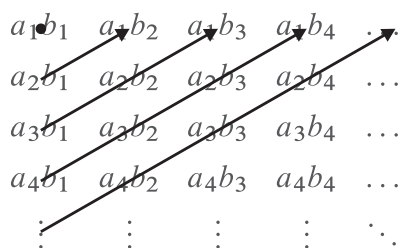
Důkaz Věty 3.5.7. Položme $\alpha = \beta = s$. Podle Věty 3.5.11 existuje bijekce $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro posloupnost částečných součtů přerovnané řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ platí $\liminf \sigma_n = \limsup \sigma_n = s$. Díky Větě 2.4.13 tedy máme $\lim \sigma_n = s$, čímž je důkaz dokončen. ■

3.6. Součin řad

Nechť $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_m$ jsou konečné posloupnosti reálných čísel. Pak platí

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}} a_i b_j. \quad (3.35)$$

V tomto oddílu ukážeme analogii vztahu (3.35) pro nekonečné řady. Je zřejmé, že bychom měli určitým způsobem sčítat všechna čísla $a_n b_m$, kde $n, m \in \mathbb{N}$. Otázkou však je, v jakém pořadí je sčítat. Jedna možnost je patrná z následujícího obrázku.



OBRÁZEK 2.

Zde nejprve sčítáme prvky na „diagonálách“ a dostáváme tak novou řadu, jejíž součet (pokud existuje) můžeme chápat jako součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Právě uvedená možnost násobení řad není jediná, patří však mezi důležitější. Její formální definice následuje.

3.6.1. Definice. Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, jejíž členy jsou definovány předpisem

$$c_k = \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.6.2. Věta (Mertens⁶). Necht řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{m=1}^{\infty} b_m)$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme:

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{j=1}^k a_j, & A &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j, & \tilde{A} &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|, \\ B_k &= \sum_{j=1}^k b_j, & B &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j, & \beta_k &= B_k - B, \\ c_k &= \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i, & C_k &= \sum_{j=1}^k c_j. \end{aligned}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) \\ &= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1 \\ &= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1 \\ &= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1) \\ &= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\ &= A_k B + (a_1 \beta_k + a_2 \beta_{k-1} + \cdots + a_k \beta_1) \\ &= A_k B + \sum_{j=1}^k a_j \beta_{k+1-j} = A_k B + \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} \beta_k. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $\gamma_k = \sum_{j=1}^k a_j \beta_{k+1-j}$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$, neboť $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ je konvergentní. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$,

⁶Franz Mertens (1840–1927)

máme

$$\begin{aligned}
 |\gamma_k| &= \left| \sum_{j=1}^k a_{k+1-j} \beta_j \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \left| \sum_{j=k_0+1}^k a_{k+1-j} \beta_j \right| \\
 &\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \sum_{j=k_0+1}^k |a_{k+1-j}| |\beta_j| \\
 &\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^k |a_{k+1-j}| \\
 &\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j \right| + \varepsilon \tilde{A}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Podle Věty 3.1.11 platí $\lim a_k = 0$, a tedy podle Věty 2.2.30 také pro každé $j \in \{1, \dots, k_0\}$ platí $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1-j} = 0$. Díky 2.3.28 dostáváme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j} \beta_j = 0. \tag{3.38}$$

Díky Větě 2.4.14, (3.37) a (3.38) pak platí $\limsup |\gamma_k| \leq \varepsilon \tilde{A}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim |\gamma_k| = 0$. Tedy podle Věty 2.2.24 dostáváme $\lim \gamma_k = 0$.

Limitním přechodem v (3.36) pak dostáváme z Věty 2.2.34 rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

3.6.3. Důsledek. Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.

Důkaz. Podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k |a_{k+1-i}| |b_i| \right) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolutně konverguje. ■

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 3.6.2 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

3.6.4. Příklad. Necht $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale Cauchyův součin řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^k (-1)^{k+1-i} \frac{1}{\sqrt{k+1-i}} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti (Příklad 1.8.13) dostaneme odhad

$$\sqrt{(k+1-i)i} \leq \frac{(k+1-i) + i}{2} = \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, k\}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \sum_{i=1}^k \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$. Odtud plyne, že Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nekoneverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence řady (Věta 3.1.11). ♣

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta, jejíž důkaz provedeme až v Kapitole ?? (vizte ??). Další výsledek týkající se Cauchyova součinu naleznete v Příkladu ??.

3.6.5. Věta (Abel). Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_{k+1-i} b_i \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right).$$

3.6.6 (Cauchyův součin obecněji). Necht' $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}$ a $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$, $\sum_{m=m_1}^{\infty} b_m$ jsou řady. Cauchyův součin těchto řad je definován jako řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, kde

$$c_k = \sum_{i=1}^k a_{n_1+k-i} b_{m_1+i-1}.$$

Změna indexování členů řad nemá vliv na důkazy uvedené v tomto oddíle, a proto dokázaná tvrzení o Cauchyově součinu platí i v této obecnější situaci.

3.7. Zobecněné řady

Necht' I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je dáno reálné číslo x_α , neboli máme zobrazení $\alpha \mapsto x_\alpha$ definované na množině I s hodnotami v $\mathbb{R}$. Je-li I konečná, pak je součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ dobře definován. V tomto oddílu ukážeme, že součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$

lze v jistých případech definovat i pro I nekonečnou, přičemž některé vlastnosti obvyklé pro součet konečně mnoha čísel zůstanou v platnosti. Přístup použitý v tomto oddílu je odlišný od způsobu, jakým jsme definovali součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definici součtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jsme totiž podstatným způsobem využili uspořádání sčítaných členů, zatímco pro definici součtu $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ žádné uspořádání k dispozici nemáme. Příkladem takového součtu je $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} x_{(n,m)}$.

3.7.1. Označení. Necht I je množina. Potom symbolem $\mathcal{K}(I)$ označíme množinu všech konečných podmnožin I .

3.7.2. Definice. Necht I je množina a $\alpha \mapsto x_{\alpha}$ je zobrazení z I do $\mathbb{R}$. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme **součtem zobecněné řady** $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$, pokud platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{K}(I) \forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F: \sum_{\alpha \in F'} x_{\alpha} \in B(x, \varepsilon).$$

3.7.3. V tomto oddílu se budeme zabývat téměř výlučně zobecněnými řadami. Pokud nebude hrozit nedorozumění budeme místo termínu „zobecněná řada“ často psát jen „řada“.

3.7.4. Věta (jednoznačnost součtu). Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ má nejvýše jeden součet.

Důkaz. Předpokládejme, že $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ a $x \neq y$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ splňující

$$\forall F \in \mathcal{K}(I), F \supset F_1: \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha} \in B(x, \varepsilon),$$

$$\forall F \in \mathcal{K}(I), F \supset F_2: \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha} \in B(y, \varepsilon).$$

Pak pro konečnou množinu $F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha \in F_1 \cup F_2} x_{\alpha} \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset,$$

což je zřejmý spor. ■

3.7.5. Definice. Necht I je množina a $\alpha \mapsto x_{\alpha}$ je zobrazení z I do $\mathbb{R}$. Pokud má zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ součet x , pak píšeme $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha} = x$ a říkáme, že zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ **má součet**. Je-li $x \in \mathbb{R}$, říkáme, že je $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ **konvergentní**. Pokud není zobecněná řada konvergentní, říkáme, že je **divergentní**. Pokud zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} |x_{\alpha}|$ konverguje, říkáme, že $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ je **absolutně konvergentní**.

3.7.6. Necht I je množina a $\alpha \mapsto x_{\alpha}$ je zobrazení z I do $\mathbb{R}$. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ značí jednak zobecněnou řadu, kterou ztotožňujeme se zobrazením $\alpha \mapsto x_{\alpha}$, jednak součet této řady, pokud existuje. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ můžeme tedy používat k označení prvku z $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že má příslušná řada součet. Zde uplatňujeme stejný přístup jako u nekonečných řad, srovnejte s 3.1.2.

3.7.7. Je-li indexová množina I konečná, pak je součet zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ roven obvyklému součtu. Vskutku, je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, pak můžeme položit $F = I$. Potom pro každou $F' \in \mathcal{K}(I)$ splňující $F' \supset F$ platí $F' = I$. Tedy $\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \in B(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha, \varepsilon)$. Pokud $I = \emptyset$, pak klademe $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = 0$. Ve shodě s touto úmluvou platí právě uvedená úvaha o zobecněném součtu i v případě, kdy je I prázdná množina.

Následující věta je obdobou Věty 3.1.18 pro zobecněné řady.

3.7.8. Věta (linearita součtu zobecněných řad). Necht' zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$ mají součet.

- (a) Pokud $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je definován, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} cx_\alpha$ součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} cx_\alpha = c \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

- (b) Pokud je definován výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha)$ součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $y = \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$.

- (a) Pokud je $c = 0$, potom musí být $x \in \mathbb{R}$ a tvrzení je téměř zřejmé. Předpokládejme v dalším, že platí $c \neq 0$. Rozlišíme následující případy

Případ $x \in \mathbb{R}$. Necht' $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\left| \sum_{\alpha \in F'} cx_\alpha - cx \right| = |c| \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} cx_\alpha = cx$.

Případ $x = -\infty, c < 0$. Necht' $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F: \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha < -\frac{1}{|c|\varepsilon}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\sum_{\alpha \in F'} cx_\alpha > -c \frac{1}{|c|\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha \in I} cx_\alpha = \infty$.

Ostatní případy lze dokázat obdobně jako v předchozím případě.

- (b) Rozlišíme několik případů.

Případ $x, y \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F_1, F_2 \in \mathcal{K}(I)$ takové, že platí

$$\begin{aligned} \forall F'_1 \in \mathcal{K}(I), F'_1 \supset F_1: \left| \sum_{\alpha \in F'_1} x_\alpha - x \right| &< \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \forall F'_2 \in \mathcal{K}(I), F'_2 \supset F_2: \left| \sum_{\alpha \in F'_2} y_\alpha - y \right| &< \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Položme $F = F_1 \cup F_2$. Pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme

$$\left| \sum_{\alpha \in F'} (x_\alpha + y_\alpha) - (x + y) \right| \leq \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| + \left| \sum_{\alpha \in F'} y_\alpha - y \right| < \varepsilon.$$

Tímto je požadovaná rovnost dokázána.

Případ $x = \infty, y \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že platí $\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, k němu nalezneme $F_1 \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že platí

$$\forall F'_1 \in \mathcal{K}(I), F'_1 \supset F_1: \sum_{\alpha \in F'_1} x_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1. \quad (3.39)$$

Dále nalezneme $F_2 \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že platí

$$\forall F'_2 \in \mathcal{K}(I), F'_2 \supset F_2: \left| \sum_{\alpha \in F'_2} y_\alpha - y \right| < 1.$$

Pak máme

$$\forall F'_2 \in \mathcal{K}(I), F'_2 \supset F_2: \sum_{\alpha \in F'_2} y_\alpha > y - 1. \quad (3.40)$$

Položíme $F = F_1 \cup F_2$. Pak pro každou množinu $F' \in \mathcal{K}(I)$, $F' \supset F$, dostáváme díky (3.39) a (3.40) nerovnost

$$\sum_{\alpha \in F'} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F'} y_\alpha > \frac{1}{\varepsilon} - y + 1 + y - 1 = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je požadovaná rovnost pro případ $x = \infty, y \in \mathbb{R}$ dokázána. Ve zbývajících případech lze postupovat obdobně. Příslušné důkazy již uvádět nebudeme. ■

3.7.9. Věta. Necht' $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je zobecněná řada.

(a) Necht' $x_\alpha, \alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Pak $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{K}(I) \right\}. \quad (3.41)$$

(b) Řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ mají vždy součet a platí

$$\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \quad (3.42)$$

- (c) Řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet právě tehdy, když je definován výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$. Je-li součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ definován, pak platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-. \quad (3.43)$$

Důkaz. (a) Necht x_α , $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Označme

$$s = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{K}(I) \right\}.$$

Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$. Nejprve si povšimneme, že platí

$$\forall F \in \mathcal{K}(I): \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \leq s. \quad (3.44)$$

Mějme nyní dáno libovolné $s' \in \mathbb{R}$, $s' < s$. Z definice suprema nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že $\sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'$. Pak pro libovolnou $F' \in \mathcal{K}(I)$, $F' \supset F$, platí

$$\sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \geq \sum_{\alpha \in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (3.44) již snadno dostaneme rovnost $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = s$.

(b) Díky (a) mají zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ vždy součet. Rovnost (3.42) plyne z Věty 3.7.8(b), neboť $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ a součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ je definován.

(c) Položme $P = \{\alpha \in I; x_\alpha \geq 0\}$, $M = \{\alpha \in I; x_\alpha < 0\}$, $p = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ a $m = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$. Dokážeme nejprve, že platí

$$p = \sum_{\alpha \in P} x_\alpha \quad \text{a} \quad m = - \sum_{\alpha \in M} x_\alpha. \quad (3.45)$$

Zřejmě platí rovnosti

$$\left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha^+; F \in \mathcal{K}(I) \right\} = \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{K}(P) \right\}, \quad (3.46)$$

$$\left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha^-; F \in \mathcal{K}(I) \right\} = \left\{ - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{K}(M) \right\}, \quad (3.47)$$

a tedy máme

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}^{+} &= \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha}^{+}; F \in \mathcal{K}(I) \right\} \\
 &= \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha}; F \in \mathcal{K}(P) \right\} && \text{(podle (3.46))} \\
 &= \sum_{\alpha \in P} x_{\alpha} = p, \\
 \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}^{-} &= \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha}^{-}; F \in \mathcal{K}(I) \right\} \\
 &= \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} -x_{\alpha}; F \in \mathcal{K}(M) \right\} && \text{(podle (3.47))} \\
 &= \sum_{\alpha \in M} -x_{\alpha} && \text{(podle již dokázané části (a))} \\
 &= - \sum_{\alpha \in M} x_{\alpha} = m. && \text{(podle Věty 3.7.8(a))}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nejprve dokážeme, že rozdíl $p - m$ je dobře definován. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. $p = m = \infty$. Necht' $F \in \mathcal{K}(I)$. Z (3.45) plyne

$$\sup \left\{ \sum_{\alpha \in G} x_{\alpha}; G \in \mathcal{K}(P \setminus F) \right\} = \infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_1 \subset P \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha \in G_1} x_{\alpha} > - \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha} + 1.$$

Z (3.45) dále plyne

$$\inf \left\{ \sum_{\alpha \in G} x_{\alpha}; G \in \mathcal{K}(M \setminus F) \right\} = -\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_2 \subset M \setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha \in G_2} x_{\alpha} < - \sum_{\alpha \in F} x_{\alpha} - 1.$$

Položíme $F_1 = F \cup G_1$ a $F_2 = F \cup G_2$. Pro každou konečnou množinu $F \subset I$ jsme tedy našli $F_1, F_2 \in \mathcal{K}(I)$, které obsahují F a splňují $\sum_{\alpha \in F_1} x_{\alpha} > 1$ a $\sum_{\alpha \in F_2} x_{\alpha} < -1$. Toto je ale ve sporu s předpokladem existence součtu řady $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$. Rozdíl $p - m$ je tedy dobře definován.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ konverguje podle Věty 3.7.8.

Rovnost (3.43) plyne z právě dokázané ekvivalence a Věty 3.7.8, neboť pro každé $\alpha \in I$ platí $x_{\alpha} = x_{\alpha}^{+} + (-1) \cdot x_{\alpha}^{-}$. ■

Z Věty 3.7.9(a) snadno plyne následující analogie srovnávacího kritéria z Věty 3.2.2.

3.7.10. Věta (srovnávací kritérium pro zobecněné řady). Necht' $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$ jsou zobecněné řady takové, že pro každé $\alpha \in I$ platí $0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha$. Potom součty řad existují a platí $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha \leq \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. Jestliže tedy navíc řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$.

Důkaz. Existence součtů obou řad plyne z Věty 3.7.9(a). Z nerovností $0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha$, $\alpha \in I$, dostáváme

$$0 \leq \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} y_\alpha; F \in \mathcal{K}(I) \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha; F \in \mathcal{K}(I) \right\}.$$

Pak pomocí Věty 3.7.9(a) ihned plyne

$$0 \leq \sum_{\alpha \in I} y_\alpha \leq \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

Odtud pak snadno vyplývá i tvrzení o konvergenci. ■

Následující věta ukazuje, že vztah konvergence a absolutní konvergence pro zobecněné řady je jiný než v případě standardních řad.

3.7.11. Věta (absolutní konvergence zobecněné řady). Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je konvergentní právě tehdy, když je absolutně konvergentní.

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle Věty 3.7.9(c) řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ konvergují, a proto konverguje podle Věty 3.7.9(b) i řada $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$.

$\Leftarrow$ Pro každé $\alpha \in I$ platí nerovnosti $0 \leq x_\alpha^+ \leq |x_\alpha|$ a $0 \leq x_\alpha^- \leq |x_\alpha|$, a proto podle Věty 3.7.10 řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 3.7.9(c) konverguje tedy i řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. ■

3.7.12. Věta (přerovnání zobecněné řady). Necht' má zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ součet a $\pi: I \rightarrow I$ je bijekce. Potom má součet i řada $\sum_{\alpha \in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\alpha \in I} x_{\pi(\alpha)}$.

Důkaz. Označme s součet řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F: \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in B(s, \varepsilon).$$

Položme $G = \pi^{-1}(F)$ a vezměme libovolnou $G' \in \mathcal{K}(I)$ obsahující G . Pak množina $F' = \pi(G')$ je konečná, obsahuje F a platí

$$\sum_{\alpha \in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in B(s, \varepsilon).$$

Tedy $\sum_{\alpha \in I} x_{\pi(\alpha)} = s$. ■

3.7.13. Věta. Necht' zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje. Potom je množina $\{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ spočetná.

Důkaz. Řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní dle Věty 3.7.11. Označme $s = \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $I_n = \{\alpha \in I; |x_\alpha| \geq \frac{1}{n}\}$. Máme-li pak libovolnou konečnou množinu $F \subset I_n$, platí pro počet jejích prvků odhad

$$|F| = \sum_{\alpha \in F} 1 = n \sum_{\alpha \in F} \frac{1}{n} \leq n \sum_{\alpha \in F} |x_\alpha| \leq ns.$$

Tedy i sama množina I_n má nejvýše ns prvků, a je tedy konečná. Proto je podle Věty 1.6.21(b) množina $\{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\} = \{\alpha \in I; |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ spočetná. ■

3.7.14. Necht $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je konvergentní zobecněná řada. Z důkazu tvrzení Věty 3.7.13 plyne, že pro každé $c \in \mathbb{R}, c > 0$, je množina $\{\alpha \in I; |x_\alpha| > c\}$ konečná. Tuto vlastnost můžeme chápat jako analogii Věty 3.1.11 pro konvergentní zobecněné řady.

3.7.15. Věta (Bolzanova–Cauchyova podmínka). Zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{K}(I) \forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \cap F = \emptyset: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \right| < \varepsilon. \quad (3.48)$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje a její součet je roven $x \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že pro každou množinu $F'' \in \mathcal{K}(I)$ obsahující F platí $|\sum_{\alpha \in F''} x_\alpha - x| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Vezměme libovolnou $F' \in \mathcal{K}(I)$ disjunktní s F . Pak platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \right| &= \left| \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \right| = \left| \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha - x + x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \right| \\ &\leq \left| \sum_{\alpha \in F \cup F'} x_\alpha - x \right| + \left| x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Podmínka (3.48) je tedy splněna.

$\Leftarrow$ Necht $n \in \mathbb{N}$. Pak pomocí podmínky (3.48) pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ nalezneme konečnou množinu $F_n \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \cap F_n = \emptyset: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \right| < \frac{1}{n}. \quad (3.49)$$

Označme $y_n = \sum_{\alpha \in F_n} x_\alpha, n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$|y_m - y_n| = \left| \sum_{\alpha \in F_m} x_\alpha - \sum_{\alpha \in F_n} x_\alpha \right| \leq \left| \sum_{\alpha \in F_m \setminus F_n} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F_n \setminus F_m} x_\alpha \right|.$$

Protože $F_m \setminus F_n$ je konečná množina disjunktní s F_n , dostáváme podle (3.49) odhad $|\sum_{\alpha \in F_m \setminus F_n} x_\alpha| < \frac{1}{n}$. Obdobně dostaneme odhad $|\sum_{\alpha \in F_n \setminus F_m} x_\alpha| < \frac{1}{m}$. Tedy pro

každé $m, n \in \mathbb{N}$ máme $|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$, platí

$$|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Tudíž je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská.

Díky Větě 2.4.26 tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim y_n = x$. Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon$ a $|y_{n_0} - x| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Necht' $F' \in \mathcal{K}(I)$ obsahuje F_{n_0} . Potom platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| &= \left| \sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha - x \right| \\ &\leq \left| \sum_{\alpha \in F_{n_0}} x_\alpha - x \right| + \left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right| \\ &= |y_{n_0} - x| + \left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right|. \end{aligned}$$

Podle (3.49) platí

$$\left| \sum_{\alpha \in F' \setminus F_{n_0}} x_\alpha \right| < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Tedy celkem dostaneme

$$\left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Podle Definice 3.7.2 tedy $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. ■

3.7.16. Věta (součin zobecněných řad). Necht' zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\beta \in J} y_\beta$ konvergují. Potom konverguje i řada $\sum_{(\alpha, \beta) \in I \times J} x_\alpha y_\beta$ a platí

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in I \times J} x_\alpha y_\beta = \left(\sum_{\alpha \in I} x_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in J} y_\beta \right).$$

Důkaz. Podle předpokladu a Věty 3.7.11 jsou řady $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$ a $\sum_{\beta \in J} |y_\beta|$ konvergentní. Označme

$$x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha, \quad y = \sum_{\beta \in J} y_\beta, \quad A = \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|, \quad B = \sum_{\beta \in J} |y_\beta|.$$

Platí tedy $x, y, A, B \in \mathbb{R}$.

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F_1 \in \mathcal{K}(I)$ a $F_2 \in \mathcal{K}(J)$ takové, že platí

$$\forall F'_1 \in \mathcal{K}(I), F'_1 \supset F_1: \sum_{\alpha \in F'_1 \setminus F_1} |x_\alpha| < \varepsilon \wedge \left| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha - x \right| < \varepsilon, \quad (3.50)$$

$$\forall F'_2 \in \mathcal{K}(J), F'_2 \supset F_2: \sum_{\beta \in F'_2 \setminus F_2} |y_\beta| < \varepsilon \wedge \left| \sum_{\alpha \in F_2} y_\beta - y \right| < \varepsilon. \quad (3.51)$$

Konstrukci množiny F_1 ukážeme podrobně. Konstrukce F_2 je obdobná. Podle definice součtu zobecněné řady nalezneme k číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ množinu $\tilde{F}_1 \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F'_1 \in \mathcal{K}(I), F'_1 \supset \tilde{F}_1: \left| \sum_{\alpha \in F'_1} |x_\alpha| - A \right| < \varepsilon$$

Pro každou množinu $F'_1 \in \mathcal{K}(I)$ splňující $F'_1 \supset \tilde{F}_1$ platí

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in F'_1 \setminus \tilde{F}_1} |x_\alpha| &= \left| \sum_{\alpha \in F'_1} |x_\alpha| - \sum_{\alpha \in \tilde{F}_1} |x_\alpha| \right| \\ &\leq \left| \sum_{\alpha \in \tilde{F}_1} |x_\alpha| - A \right| + \left| \sum_{\alpha \in \tilde{F}_1} |x_\alpha| - A \right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Podle definice součtu zobecněné řady nalezneme k číslu ε množinu $F_1^* \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F'_1 \in \mathcal{K}(I), F'_1 \supset F_1^*: \left| \sum_{\alpha \in F'_1} x_\alpha - x \right| < \varepsilon \quad (3.53)$$

Položíme $F_1 = \tilde{F}_1 \cup F_1^*$. Pokud množina $F'_1 \in \mathcal{K}(I)$ splňuje $F'_1 \supset F_1$ pak máme

$$\sum_{\alpha \in F'_1 \setminus F_1} |x_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in F'_1 \setminus \tilde{F}_1} |x_\alpha| < \varepsilon.$$

Odtud a z (3.53) dostáváme (3.50).

Položme $F = F_1 \times F_2$. Zvolme $F' \in \mathcal{K}(I \times J)$ takovou, že $F \subset F'$. Snadno je vidět, že platí

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta = \left(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta \right),$$

a tedy

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - xy \right| \\ &= \left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha, \beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta + \left(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta \right) - xy \right| \\ &\leq \left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha, \beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta \right| + \left| \left(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta \right) - xy \right|. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Odhadněme nejprve první člen z předchozího řádku. Uvažujme zobrazení $\pi_1: I \times J \rightarrow I$ definované předpisem $\pi_1(\alpha, \beta) = \alpha$. Potom je podle Věty 1.6.15(d) množina $H_1 = \pi_1(F')$ konečná. Podobně uvažujme zobrazení $\pi_2: I \times J \rightarrow J$ definované předpisem $\pi_2(\alpha, \beta) = \beta$. Opět podle Věty 1.6.15(d) je množina $H_2 = \pi_2(F')$ konečná. Potom zřejmě platí $F' \subset H_1 \times H_2$ a máme

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - \sum_{(\alpha, \beta) \in F_1 \times F_2} x_\alpha y_\beta \right| \\ & \leq \sum_{(\alpha, \beta) \in F' \setminus (F_1 \times F_2)} |x_\alpha y_\beta| \\ & \leq \sum_{\alpha \in H_1 \setminus F_1, \beta \in H_2} |x_\alpha y_\beta| + \sum_{\alpha \in H_1, \beta \in H_2 \setminus F_2} |x_\alpha y_\beta| \\ & = \left(\sum_{\alpha \in H_1 \setminus F_1} |x_\alpha| \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in H_2} |y_\beta| \right) + \left(\sum_{\alpha \in H_1} |x_\alpha| \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in H_2 \setminus F_2} |y_\beta| \right) \\ & \leq \varepsilon B + A\varepsilon. \end{aligned}$$

Nyní odhadneme druhý člen na pravé straně (3.54). Platí

$$\begin{aligned} & \left| \left(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \right) \cdot \left(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta \right) - xy \right| = \left| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha \cdot \left(\sum_{\beta \in F_2} y_\beta - y \right) + \left(\sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha - x \right) \cdot y \right| \\ & \leq \sum_{\alpha \in F_1} |x_\alpha| \cdot \left| \sum_{\beta \in F_2} y_\beta - y \right| + \left| \sum_{\alpha \in F_1} x_\alpha - x \right| \cdot |y| \\ & \leq A\varepsilon + \varepsilon|y|. \end{aligned}$$

Tedy celkem

$$\left| \sum_{(\alpha, \beta) \in F'} x_\alpha y_\beta - xy \right| \leq \varepsilon B + A\varepsilon + A\varepsilon + \varepsilon|y| = \varepsilon(2A + B + |y|).$$

Odtud plyne tvrzení. ■

3.7.17. Věta (asociativita zobecněných řad). Necht $\mathcal{I}$ je disjunktní systém množin, $S = \bigcup \mathcal{I}$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha \in S} x_\alpha$ konverguje. Potom pro každé $I \in \mathcal{I}$ zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje. Označíme-li $y_I = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ pro $I \in \mathcal{I}$, pak řada $\sum_{I \in \mathcal{I}} y_I$ konverguje a platí $\sum_{\alpha \in S} x_\alpha = \sum_{I \in \mathcal{I}} y_I$.

Důkaz. Zvolme $I \in \mathcal{I}$. Podle Věty 3.7.11 je řada $\sum_{\alpha \in S} |x_\alpha|$ konvergentní. Pomocí (3.41) odhadneme

$$0 \leq \sum_{\alpha \in I} |x_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in S} |x_\alpha| < \infty.$$

Odtud plyne, že i řada $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$ konverguje. Tedy dle Věty 3.7.11 řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje. Pro každé $I \in \mathcal{I}$ je tedy prvek y_I dobře definován jako prvek $\mathbb{R}$.

Označme $\sum_{\alpha \in S} x_\alpha = x$. Nyní dokážeme rovnost $\sum_{I \in \mathcal{I}} y_I = x$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ nalezneme podle definice $F \in \mathcal{K}(S)$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - x \right| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (3.55)$$

Označme $\mathcal{G} = \{I \in \mathcal{I}; F \cap I \neq \emptyset\}$. Množina $\mathcal{G}$ je konečná, neboť systém $\mathcal{I}$ je disjunktí a množina F je konečná. Necht $\mathcal{G}' \in \mathcal{K}(\mathcal{I})$, $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$. Počet prvků $\mathcal{G}'$ označme n . Pro každé $I \in \mathcal{G}'$ nalezneme $F_I \in \mathcal{K}(I)$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F_I: \left| \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha - y_I \right| < \frac{1}{2n}\varepsilon. \quad (3.56)$$

Položme $F^* = F \cup \bigcup_{I \in \mathcal{G}'} F_I$. Množina F^* je konečná. Dále platí $F^* \subset \bigcup \mathcal{G}'$, neboť $F \subset \bigcup \mathcal{G} \subset \bigcup \mathcal{G}'$. Potom platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{I \in \mathcal{G}'} y_I - x \right| &\leq \left| \sum_{I \in \mathcal{G}'} y_I - \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| \\ &= \left| \sum_{I \in \mathcal{G}'} \left(y_I - \sum_{\alpha \in F^* \cap I} x_\alpha \right) \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{G}'} \left| y_I - \sum_{\alpha \in F^* \cap I} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right|. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dále zřejmě platí $F \subset F^*$, a tedy podle (3.55)

$$\left| \sum_{\alpha \in F^*} x_\alpha - x \right| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Pro $I \in \mathcal{G}'$ platí $F_I \subset F^* \cap I$, a proto podle (3.56) platí

$$\left| y_I - \sum_{\alpha \in F^* \cap I} x_\alpha \right| < \frac{1}{2n}\varepsilon.$$

Z těchto dvou odhadů a z (3.57) pak plyne

$$\left| \sum_{I \in \mathcal{G}'} y_I - x \right| < n \cdot \frac{1}{2n}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ■

Je-li $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost, pak můžeme uvažovat jednak zobecněnou řadu $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ a také řadu $\sum_{n=1}^\infty x_n$. Použité symboly odlišují zobecněnou řadu od řady. Následující věta ukazuje jejich vzájemný vztah.

3.7.18. Věta (zobecněný součet na $\mathbb{N}$). Necht $\{x_n\}$ je posloupnost.

- (a) Zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je konvergentní právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je absolutně konvergentní.
- (b) Jestliže má zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ součet, má ho i řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ a tyto součty se rovnají.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ Podle Věty 3.7.11 konverguje zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ absolutně. Podle Věty 3.7.9(a) to znamená, že

$$\sup \left\{ \sum_{n \in F} |x_n|; F \in \mathcal{K}(\mathbb{N}) \right\} < \infty,$$

tedy, dle definice suprema,

$$\sup \left\{ \sum_{n=1}^m |x_n|; m \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ je konvergentní, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.

$\Leftarrow$ Platí

$$\sup \left\{ \sum_{n=1}^m |x_n|; m \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

Nechť $F \in \mathcal{K}(\mathbb{N})$. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \{1, \dots, m\}$, a proto platí $\sum_{n \in F} |x_n| \leq \sum_{n=1}^m |x_n|$. Odtud plyne

$$\sup \left\{ \sum_{n \in F} |x_n|; F \in \mathcal{K}(\mathbb{N}) \right\} < \infty.$$

Podle Věty 3.7.9(a) je zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ absolutně konvergentní, a tedy konvergentní podle Věty 3.7.11.

(b) Označme $s = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$. Dokážeme rovnost $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $F \in \mathcal{K}(\mathbb{N})$ takové, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{K}(I), F' \supset F: \sum_{n \in F'} x_n \in B(s, \varepsilon). \quad (3.58)$$

Množina F je konečná, a proto můžeme nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$, které je horní závorou F . Zvolme $m \in \mathbb{N}, m \geq n_0$, a položme $F' = \{1, \dots, m\}$. Potom platí $F' \in \mathcal{K}(\mathbb{N})$ a $F \subset F'$. Podle (3.58) tedy máme

$$\sum_{n=1}^m x_n = \sum_{n \in F'} x_n \in B(s, \varepsilon).$$

Dostáváme tak $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$. ■

3.7.19. Obrácená implikace v tvrzení Věty 3.7.18(b) neplatí, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ může konvergovat, ale zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ nemusí konvergovat. Stačí uvažovat libovolnou neabsolutně konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ta nemůže mít zobecněný součet. Kdyby totiž $s = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$, pak i $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ podle Věty 3.7.18(b). Pomocí Riemannovy věty (Věta 3.5.7) bychom našli bijekci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \neq s$. Podle Věty 3.7.12 ale platí $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\pi(n)} = s$. Opět z Věty 3.7.18(b) máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s$, což je spor.

3.7.20. Příklad. Dokažte, že zobecněná řada $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + m^2}$ má součet ∞ .

Řešení. Protože naše řada sestává z nezáporných čísel, má součet. Pro přirozené číslo $j \in \mathbb{N}$ odhadneme částečný součet přes indexovou množinu

$$I_j = \{j+1, \dots, 2j\} \times \{j+1, \dots, 2j\},$$

tedy

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in I_j} \frac{1}{n^2 + m^2} &= \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{n^2 + m^2} \geq \sum_{m=j+1}^{2j} \sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{8j^2} \\ &= j^2 \cdot \frac{1}{8j^2} = \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Množiny I_{2^j} , $j \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní, a proto můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + m^2} &\geq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{(n,m) \in \bigcup_{j=1}^k I_{2^j}} \frac{1}{n^2 + m^2} \quad (\text{podle definice zobecněné řady}) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^k \sum_{(n,m) \in I_{2^j}} \frac{1}{n^2 + m^2} \quad (\text{disjunktnost } I_{2^j}, j \in \mathbb{N}) \\ &\geq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{8} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{8} = \infty. \quad (\text{podle (3.59)}) \end{aligned}$$

♣

3.7.21. Příklad. Dokažte, že zobecněná řada $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^3 + m^3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položme

$$N_k = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \max\{m, n\} = k\}.$$

Potom je počet prvků množiny N_k pro každé $k \in \mathbb{N}$ roven $2k - 1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ tedy odhadneme

$$\sum_{(n,m) \in N_k} \frac{1}{n^3 + m^3} \leq \sum_{(n,m) \in N_k} \frac{1}{\max\{m, n\}^3} = \sum_{(n,m) \in N_k} \frac{1}{k^3} = \frac{2k-1}{k^3}. \quad (3.60)$$

Nechť $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je libovolná konečná množina. Nalezneme $p \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \bigcup_{k=1}^p N_k$, a dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in F} \frac{1}{n^3 + m^3} &\leq \sum_{(n,m) \in \bigcup_{k=1}^p N_k} \frac{1}{n^3 + m^3} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{(n,m) \in N_k} \frac{1}{n^3 + m^3} \quad (\text{disjunktnost } N_k, k \in \mathbb{N}) \\ &\leq \sum_{k=1}^p \frac{2k-1}{k^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}. \quad (\text{odhad (3.60)}) \end{aligned}$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Z (3.41) tedy máme

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \frac{1}{n^3 + m^3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3} < \infty.$$

♣

3.7.22. Příklad. Necht Q značí množinu všech racionálních čísel z intervalu $(0, 1)$. Dokažte, že $\sum_{q \in Q} q = \infty$.

Řešení. Protože racionálních čísel větších než $\frac{1}{2}$ je nekonečně mnoho, je množina $\{q \in Q; q > \frac{1}{2}\}$ nekonečná, a tedy daná řada diverguje podle 3.7.14. Protože je tvořena kladnými čísly, platí $\sum_{q \in Q} q = \infty$ dle Věty 3.7.9(a). ♣

3.8. Teoretické příklady k číselným řadám

Řady s nezápornými členy.

3.8.1. Příklad (Raabeovo kritérium). Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Necht platí $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- (b) Necht existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1. \quad (3.61)$$

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

- (c) Necht platí $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Řešení. (a) Zvolme $q \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $1 < q < \liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Potom s pomocí Věty 2.4.16(a) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q,$$

a tedy

$$na_n - (n+1)a_{n+1} \geq (q-1)a_{n+1}. \quad (3.62)$$

Proto pro každé $m \in \mathbb{N}, m \geq n_0$, platí

$$n_0 a_{n_0} > n_0 a_{n_0} - (m+1)a_{m+1} \quad (\text{řada má kladné členy})$$

$$= \sum_{n=n_0}^m (na_n - (n+1)a_{n+1}) \quad (\text{teleskopická suma})$$

$$\geq (q-1) \sum_{n=n_0}^m a_{n+1}. \quad (\text{odhad (3.62)})$$

Tedy pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, platí

$$\sum_{n=n_0+1}^{m+1} a_n = \sum_{n=n_0}^m a_{n+1} \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{q-1}.$$

Odtud snadno plyne, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je shora omezená, a tedy je tato řada konvergentní.

(b) Matematickou indukcí odvodíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n \geq \frac{n_0}{n} \cdot a_{n_0}. \quad (3.63)$$

Pro $n = n_0$ nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme platnost (3.63) pro jedno pevné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Díky (3.61) platí první následující nerovnost a díky indukčnímu předpokladu druhá:

$$a_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} \cdot a_n \geq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n_0}{n} \cdot a_{n_0} = \frac{n_0}{n+1} \cdot a_{n_0}.$$

Tím je nerovnost podle principu matematické indukce dokázána.

Protože je řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{n_0}{n} a_{n_0}$ divergentní, ze srovnávacího kritéria (vizte Větu 3.2.2(b)) plyne, že řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ je divergentní, a tedy je divergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Tvzení plyne z již dokázaného tvrzení (b). ♣

3.8.2. Příklad. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy. Necht existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}. \quad (3.64)$$

- (a) Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Dokažte, že pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (b) Pomocí (a) dokažte d'Alambertovo kritérium 3.2.11(c),(d).

Řešení. (a) Matematickou indukcí odvodíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n. \quad (3.65)$$

Pro $n = n_0$ nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme platnost (3.65) pro jedno pevné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pomocí (3.64) a indukčního předpokladu obdržíme

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot a_n \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n = \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n+1}.$$

Tím je nerovnost podle principu matematické indukce dokázána.

Konverguje-li tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$, a tedy podle Věty 3.2.2 i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Předpokládejme nyní, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Nalezneme $q \in (0, 1)$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Díky Větě 2.2.42(a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. Pak máme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, přičemž řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (vizte Příklad 3.1.7). Podle tvrzení (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Případ, kdy $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, lze dokázat analogicky. ♣

3.8.3. Příklad. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy a $\{s_n\}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje.

Řešení. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ konverguje. Pak splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku podle Věty 3.1.13. Pro $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n_0 \leq n \leq m: \sum_{k=n}^m \frac{a_k}{s_k} < \frac{1}{2}. \quad (3.66)$$

Posloupnost $\{s_k\}$ je rostoucí a platí $\lim s_k = \infty$. Snadno tedy dostaneme $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_k - s_{n_0}}{s_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \frac{s_{n_0}}{s_k}) = 1$. Existuje tedy $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n_0$, takové, že $\frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2}$. Potom platí

$$\sum_{k=n_0+1}^{m_0} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{1}{s_{m_0}} \sum_{k=n_0+1}^{m_0} a_k = \frac{s_{m_0} - s_{n_0}}{s_{m_0}} > \frac{1}{2},$$

což je ale spor s (3.66). ♣

3.8.4. Příklad. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní řada s kladnými členy. Dokažte, že existuje posloupnost $\{b_n\}$ taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $b_n = \frac{a_n}{s_n}$, kde s_n je n -tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje podle Příkladu 3.8.3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a má kladné členy, proto platí $\lim s_n = \infty$. Odtud dostáváme

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \frac{1}{s_n} = 0. \quad \clubsuit$$

3.8.5. Příklad. Necht $\{c_n\}$ je posloupnost splňující $\lim c_n = \infty$. Dokažte, že existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s kladnými členy taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n$ diverguje.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$ jsou větší než 1. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_k: c_n \geq k + 1.$$

Položme $n_0 = 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme jednoznačně určené $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k-1} < n \leq n_k$ a definujeme

$$b_n = \frac{1}{c_n} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}.$$

Nechť $\{s_m\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k-1} < n \leq n_k$ platí

$$b_n \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})}.$$

Pak pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} s_{n_l} &= \sum_{n=1}^{n_l} b_n = \sum_{k=1}^l \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} b_n \leq \sum_{k=1}^l \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k^2(n_k - n_{k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ je omezená a posloupnost $\{s_m\}$ je rostoucí, a tedy je i posloupnost $\{s_m\}$ omezená. Odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. Dále platí pro každé $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n_l} c_n b_n &= \sum_{k=1}^l \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} c_n b_n \\ &= \sum_{k=1}^l \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k(n_k - n_{k-1})} = \sum_{k=1}^l \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Následující příklad ukazuje, že limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad (Věta 3.2.5) neplatí bez předpokladu nezápornosti členů zadaných řad.

3.8.6. Příklad. Dokažte, že existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, neboť je součtem konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Dále platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

♣

3.8.7. Příklad. Dokažte, že platí $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{a} \quad s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n \leq e$. Protože $\lim a_n = e$ (Definice 2.4.6), dostaneme z věty o dvou strážnících (Věta 2.2.44) rovnost $\lim s_n = e$. Tím bude tvrzení dokázáno.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq s_n$. Pro $n = 1$ zřejmě platí $a_1 = s_1 = 2$. Necht' $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom z binomické věty (Věta 1.5.6) plyne, že

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \dots, n\}$ zřejmě platí $\prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leq 1$, a tedy

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = s_n.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq e$. Posloupnost $\{s_n\}$ je zřejmě rostoucí, a proto stačí toto tvrzení dokázat pouze pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Necht' $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \geq \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right). \end{aligned}$$

Pro každé $k \in \{2, \dots, n\}$ zřejmě platí

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m}\right) = 1.$$

Tedy z věty o aritmetice limit plyne, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = s_n.$$

Odtud a z věty o limitě a uspořádání (Věta 2.2.42), že $e = \lim a_m \geq s_n$. ♣

3.8.8. Příklad. Dokažte, že e je iracionální číslo.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že e je racionální, tedy $e = \frac{p}{q}$ pro nějaká $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Z Definice 2.4.6 plyne, že číslo e je kladné, a proto $p \in \mathbb{N}$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí podle Příkladu 3.8.7

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} < e = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!}.$$

Zřejmě dále platí

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \prod_{j=1}^i \frac{1}{k+j} \right) < \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i}.$$

Podle Příkladu 3.1.7 máme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^i} = \frac{1}{k},$$

a tedy celkem dostáváme

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} < e < \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} + \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Potom

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} < \frac{p}{q} < \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} + \frac{1}{k \cdot k!}.$$

Vynásobíme obě nerovnosti kladným výrazem $q \cdot k!$ a dostaneme

$$q \cdot k! \cdot \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} < p \cdot k! < q \cdot k! \cdot \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} + \frac{q}{k}.$$

Označme

$$m = q \cdot k! \cdot \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!}.$$

Pak zřejmě platí $m \in \mathbb{N}$ a navíc

$$m < p \cdot k! < m + \frac{q}{k}.$$

Pro speciální volbu $k = q$ odtud dostáváme $p \cdot k! \in (m, m + 1)$. To je ale spor, protože $m \in \mathbb{N}$ a $p \cdot k! \in \mathbb{N}$. ♣

Číselné rozvoje.

3.8.9. Příklad. Necht $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, a $\mathcal{S}(p)$ je množina všech posloupností $\{a_n\}$, které splňují

$$(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}: a_n \in \{0, \dots, p-1\}.$$

Necht dále $\mathcal{I}(p)$ je množina všech posloupností, které splňují (a) a navíc podmínku

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n: a_m \neq p-1.$$

Definujme zobrazení $\varphi: \mathcal{S}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Dokažte, že zobrazení φ je dobře definované a jde o bijekci $\mathcal{I}(p)$ na $[0, 1)$.

Řešení. *Korektnost definice φ .* Necht $\{a_n\} \in \mathcal{S}(p)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq \frac{a_n}{p^n} \leq \frac{p-1}{p^n}.$$

Podle Příkladu 3.1.7 platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1$, takže díky Větě 3.2.2(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ konvergentní. Díky podmínce (b) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} < p-1$. Potom platí

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(\{a_n\}) &= \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_{n_0}}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \\ &< \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{p-1}{p^n} + \frac{p-1}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1. \end{aligned}$$

Prostota $\varphi|_{\mathcal{I}(p)}$. Předpokládejme, že $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{I}(p)$ a $\{a_n\} \neq \{b_n\}$. Existuje tedy $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j < k$, platí $a_j = b_j$ a $a_k \neq b_k$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_k < b_k$. Potom platí

$$\begin{aligned} \varphi(\{a_n\}) &< \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} \quad (\text{odhad shora členů posloupnosti } \{a_n\}) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_k}{p^k} + \frac{1}{p^k} \quad (\text{součet geometrické řady}) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n}{p^n} + \frac{a_k + 1}{p^k} \quad (\text{využití definice čísla } k \text{ a algebraická úprava}) \\ &\leq \sum_{n=1}^k \frac{b_n}{p^n} \quad (\text{použití nerovnosti } a_k < b_k) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p^n} = \varphi(\{b_n\}). \end{aligned}$$

Zobrazení $\varphi|_{\mathcal{I}(p)}$ je na $[0, 1)$. Necht $x \in [0, 1)$. Posloupnost $\{a_n\}$ splňující $\varphi(\{a_n\}) = x$ budeme pomocí funkce celá část konstruovat takto. Položíme $a_1 = [px]$. Máme-li $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a čísla $a_1, \dots, a_{n-1}$ jsou již nalezena, definujme

$$a_n = \left[p^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k p^{n-k} \right]$$

Tím je konstrukce $\{a_n\}$ provedena. Nyní je třeba ukázat, že $\{a_n\} \in \mathcal{I}(p)$.

Celé číslo a_1 splňuje $0 \leq a_1 \leq px < p$, a proto $a_1 \in \{0, \dots, p-1\}$. Necht $n \in \mathbb{N}$. Potom postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} a_n &\leq p^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k p^{n-k} < a_n + 1, & (\text{definice } a_n \text{ a celé části}) \\ 0 &\leq p^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_k p^{n-k} - a_n < 1, & (\text{odečtení } a_n) \\ 0 &\leq p^{n+1} x - \sum_{k=1}^n a_k p^{n+1-k} < p. & (\text{algebraická úprava}) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Odtud plyne $0 \leq a_{n+1} < p$, takže $a_{n+1} \in \{0, \dots, p-1\}$, neboť a_{n+1} je podle definice celé číslo. Tím jsme ověřili, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku (a).

Pro ověření podmínky (b) předpokládejme pro spor existenci $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, platí $a_n = p-1$. Z (3.67) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k} < \frac{1}{p^n}. \quad (3.68)$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, máme

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{p^k} - \sum_{k=n_0+1}^n \frac{p-1}{p^k} < \frac{1}{p^n}.$$

Limitním přechodem odtud plyne

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{p^k} - \frac{1}{p^{n_0}} \leq 0,$$

a tedy také

$$x - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{p^k} = \frac{1}{p^{n_0}},$$

což je ve sporu s (3.68) pro $n = n_0$.

Nyní s pomocí věty o dvou strážnících (Věta 2.2.42) a (3.68) máme

$$\varphi(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{p^k} = x.$$

Tedy $\varphi|_{\mathcal{I}(p)}$ je zobrazení na. ♣

3.8.10. (a) Necht $p \in \mathbb{N}, p > 1$. Pak **p -adickým rozvojem** budeme rozumět každou řadu tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, kde $\{a_n\} \in \mathcal{I}(p)$. Podle Příkladu 3.8.9 lze každé číslo $x \in [0, 1)$ vyjádřit jako součet p -adického rozvoje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$. Pokud budeme uvažovat pouze

takové p -adické rozvoje, kde $\{a_n\} \in \mathcal{I}(p)$, pak je příslušný p -adický rozvoj určen jednoznačně.

(b) Pokud máme p -adický rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, kde $\{a_n\}$ nesplňuje podmínku (b) z Příkladu 3.8.9, pak existuje nejmenší $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n = p - 1$. Pokud $n_0 = 1$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Pokud $n_0 > 1$, pak $a_{n_0-1} < p - 1$. Potom platí $a_{n_0-1} + 1 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} &= \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{p^n} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{a_n}{p^n} + \frac{1}{p^{n_0-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-2} \frac{a_n}{p^n} + \frac{a_{n_0-1} + 1}{p^{n_0-1}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{0}{p^n}. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že ve druhém případě posloupnost $\{b_n\}$ definovaná předpisem

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n < n_0 - 1, \\ a_{n_0-1} + 1, & \text{pokud } n = n_0 - 1, \\ 0, & \text{pokud } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \end{cases}$$

určuje jiný p -adický rozvoj než $\{a_n\}$, neboť se liší od $\{a_n\}$, nicméně součet mají oba p -adické rozvoje stejný. Při práci s p -adickými rozvoji je často třeba brát tuto nejednoznačnost v potaz.

3.8.11 (desetinné rozvoje). Nejdůležitější typem p -adického rozvoje je případ, kdy $p = 10$, neboť většinu výpočtů provádíme v desítkové soustavě. Každé reálné číslo můžeme zapsat jako součet celého čísla a reálného čísla z intervalu $[0, 1)$, pro každé $x \in \mathbb{R}$ totiž platí $x = [x] + (x - [x])$. Každé nezáporné celé číslo n lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$n = \sum_{n=0}^k a_n \cdot 10^n,$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_k \in \{0, \dots, 9\}$. Každé nezáporné reálné číslo pak můžeme zapsat ve tvaru $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots$.

3.8.12. Příklad. Necht $p \in \mathbb{N}, p > 1$. Pak p -adický rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ nazýváme **periodický**, pokud existují $k, r \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq k$, platí $a_{n+r} = a_n$. Ukažte, že p -adický rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ má racionální součet právě tehdy, když je periodický.

Řešení. $\Leftarrow$ Necht $k, r \in \mathbb{N}$ svědčí o periodičnosti p -adického rozvoje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$, neboli platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k: a_n = a_{n+r}.$$

Odtud snadno plyne

$$\forall j \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k: a_n = a_{n+(j-1)r}. \quad (3.69)$$

Pro $m \in \mathbb{N}$ označme m -tý částečný součet našeho rozvoje jako s_m . Pro každé $l \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{k+lr} = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{p^n} + \sum_{j=1}^l \sum_{n=k+(j-1)r+1}^{k+jr} \frac{a_n}{p^n} \quad (3.70)$$

Pokud $n \in \mathbb{N}$ splňuje

$$k + (j-1)r + 1 \leq n \leq k + jr,$$

kde $j \in \mathbb{N}$, pak můžeme psát $n = k + (j-1)r + u$ pro $u \in \{1, 2, \dots, r\}$ a díky (3.69) platí $a_n = a_{k+u}$. Toto pozorování nám umožňuje přepsat rovnost (3.70) následujícím způsobem

$$s_{k+lr} = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{p^n} + \sum_{j=1}^l \frac{1}{p^{k+(j-1)r}} \sum_{u=1}^r \frac{a_{k+u}}{p^u}.$$

Označme $\alpha = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{p^n}$ a $\beta = \sum_{u=1}^r \frac{a_{k+u}}{p^u}$. Obě čísla α, β jsou zřejmě racionální. Potom platí

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} s_{k+lr} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\alpha + \frac{\beta}{p^k} \sum_{j=1}^l \frac{1}{(p^r)^{j-1}} \right) \\ &= \alpha + \frac{\beta}{p^k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(p^r)^{j-1}} \\ &= \alpha + \frac{\beta}{p^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^r}}, \end{aligned}$$

což je racionální číslo. Odtud plyne, že součet našeho rozvoje je racionální, neboť $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{l \rightarrow \infty} s_{k+lr}$.

$\Rightarrow$ Necht' nyní p -adický rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ má racionální součet $x \in [0, 1]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \in (0, 1)$. Potom existují $u, v \in \mathbb{N}$, $u < v$, splňující $x = \frac{u}{v}$. Pokud $\{a_n\} \in \mathcal{S}(p) \setminus \mathcal{I}(p)$, pak je uvažovaný rozvoj zřejmě periodický. Předpokládejme tedy, že $\{a_n\} \in \mathcal{I}(p)$. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme $s_k = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{p^n}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq x - s_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{1}{p^k},$$

a tedy

$$0 \leq p^k(x - s_k) < 1. \quad (3.71)$$

Platí

$$p^k s_k = p^k \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{p^n} = \sum_{n=1}^k a_n p^{k-n},$$

takže $p^k s_k \in \mathbb{N}$. Dále máme

$$p^k(x - s_k) = p^k \frac{u}{v} - p^k s_k. \quad (3.72)$$

Odtud plyne, že existuje $c_k \in \mathbb{Z}$ takové, že $p^k(x - s_k) = \frac{c_k}{v}$. S pomocí (3.71) pro každé $k \in \mathbb{N}$ dostáváme $c_k \in \{0, \dots, v-1\}$. Musí tedy existovat $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$ takové, že $c_{k_1} = c_{k_2}$. Položme $r = k_2 - k_1$, pak $c_{k_2} = c_{k_1+r}$ a platí

$$\begin{aligned} \frac{c_{k_1}}{v} &= p^{k_1}(x - s_{k_1}) = \sum_{n=k_1+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k_1}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k_1}}{p^j}, \\ \frac{c_{k_1+r}}{v} &= \frac{c_{k_2}}{v} = p^{k_1+r}(x - s_{k_1+r}) = \sum_{n=k_1+r+1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n-k_1-r}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+k_1+r}}{p^j}. \end{aligned}$$

Posloupnosti $\{a_{j+k_1}\}_{j=1}^{\infty}$, $\{a_{j+k_1+r}\}_{j=1}^{\infty}$ patří do $\mathcal{I}(p)$ a obě definují p -adický rozvoj se součtem $\frac{c_{k_1}}{v}$. Podle Příkladu 3.8.9 se uvedené posloupnosti musí rovnat. Proto pro $n > k_1$ platí $a_n = a_{n+r}$, takže uvažovaný rozvoj je periodický. ♣

Řady s obecnými členy.

3.8.13. Příklad. Necht $\{a_j\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel a $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$0 \leq \sum_{i=0}^k (-1)^i a_{n+i} \leq a_n.$$

Řešení. Necht $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Indukcí podle k dokážeme, že pro každou nerostoucí posloupnost nezáporných čísel $\{a_j\}$ platí uvedená nerovnost. Pro $k = 0$ zřejmě platí $\sum_{i=0}^0 (-1)^i a_{n+i} = a_n$, a tedy

$$0 \leq \sum_{i=0}^0 (-1)^i a_{n+i} \leq a_n.$$

Předpokládejme nyní, že uvedená tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Naším cílem je dokázat nerovnost pro $k+1$, tj. chceme ověřit nerovnosti

$$0 \leq \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_{n+i} \leq a_n. \quad (3.73)$$

Posloupnost $\{a_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$ má nezáporné členy a je nerostoucí. Proto podle indukčního předpokladu platí

$$0 \leq \sum_{i=0}^k (-1)^i a_{n+1+i} \leq a_{n+1}. \quad (3.74)$$

Potom díky (3.74) dostáváme

$$\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i a_{n+i} = a_n - \sum_{i=0}^k (-1)^i a_{n+1+i} \begin{cases} \geq a_n - a_{n+1} \geq 0 \\ \leq a_n \end{cases}, \quad (3.75)$$

čímž je podle principu matematické indukce tvrzení dokázáno. ♣

3.8.14 (alternativní důkaz Věty 3.3.1). Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ověříme pomocí Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro řady, tedy ověříme platnost podmínky (3.1). Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Členy této posloupnosti jsou pak nutně nezáporné. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: a_n < \varepsilon. \quad (3.76)$$

Vezmeme nyní libovolná čísla $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 \leq n \leq m$. Pak z Příkladu 3.8.13 a (3.76) plyne

$$\left| \sum_{i=n}^m (-1)^i a_i \right| = \left| \sum_{i=0}^{m-n} (-1)^i a_{n+i} \right| = \sum_{i=0}^{m-n} (-1)^i a_{n+i} \leq a_n < \varepsilon.$$

Tím je ověřena platnost Bolzanovy–Cauchyovy podmínky pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Je-li posloupnost $\{a_n\}$ neklesající, pak lze důkaz dokončit stejně jako v původním důkazu Věty 3.3.1.

3.8.15. Příklad. Necht řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají omezené posloupnosti částečných součtů a $c \in \mathbb{R}$. Dokažte následující tvrzení.

- (a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů.
- (b) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Řešení. Označme postupně $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Podle předpokladu existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $|s_m| \leq M$ a $|t_m| \leq M$.

- (a) Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{n=1}^m ca_n \right| = |cs_m| \leq |c|M.$$

Tím je omezenost posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ dokázána.

- (b) Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{n=1}^m (a_n + b_n) \right| \leq |s_m| + |t_m| \leq 2M,$$

čímž je tvrzení dokázáno. ♣

3.8.16. Příklad. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Položme $b_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Řešení. Necht $\{s_m\}$ a $\{t_m\}$ jsou posloupnosti částečných součtů pro řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} t_m &= \sum_{k=1}^m b_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \\ &= \sum_{j=1}^{n_{m+1}-1} a_j = s_{n_{m+1}-1}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a proto je limita $\lim_{j \rightarrow \infty} s_j$ vlastní. Z Věty 2.2.30 a (3.77) pak dostáváme $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{n_{m+1}-1} = \lim_{j \rightarrow \infty} s_j$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tedy konverguje. ♣

3.8.17. Příklad. Necht $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $n_1 = 1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme $b_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j$. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje.

Řešení. Použijeme stejné označení jako v Příkladu 3.8.16.

$\Rightarrow$ Tato implikace plyne z Příkladu 3.8.16.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má nezáporné členy, a proto $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m$ existuje podle Věty 3.2.1. Podle předpokladu je $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m$ vlastní a z (3.77) plyne $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{n_{m+1}-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m$. Posloupnost $\{s_m\}$ má tedy konvergentní podposloupnost $\{s_{n_{m+1}-1}\}$. Proto je sama konvergentní dle Věty 2.3.21 a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. ♣

3.8.18. Příklad. Nalezněte divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující $n_1 = 1$ takové, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, kde $b_k = \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j$, $k \in \mathbb{N}$, konverguje.

Řešení. Položme $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, a $n_k = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $b_k = a_{2k-1} + a_{2k} = 0$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ tedy konverguje, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (například díky Větě 3.1.11). ♣

Nekonečné součiny.

3.8.19. Definice. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že **součin** $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** (je **konvergentní**), je-li $\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m a_n$ vlastní. Řekneme, že **součin** $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ (je **divergentní**), jestliže $\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m a_n$ neexistuje nebo je nevlastní. Pokud existuje $\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m a_n$, pak symbol $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ označuje také její hodnotu.

3.8.20. Příklad. Necht $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ konverguje.

Řešení. $\Leftarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^m (1 + a_n)\}_{m=1}^{\infty}$ je rostoucí a pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \geq \prod_{n=1}^m (1 + a_n) \geq 1 + \sum_{n=1}^m a_n \geq \sum_{n=1}^m a_n.$$

Odtud již plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\Rightarrow$ Posloupnost $\{\prod_{n=1}^m (1 + a_n)\}_{m=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto má limitu. Díky nerovnosti $\log(1 + x) \leq x$ (vizte 1.7.14) platné pro každé $x \in (0, \infty)$ dostaneme pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$\log\left(\prod_{n=1}^m (1 + a_n)\right) = \sum_{n=1}^m \log(1 + a_n) \leq \sum_{n=1}^m a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Odtud plyne

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) < \infty,$$

a nekonečný součin tedy konverguje. ♣

3.8.21. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$, kde p_n značí n -té prvočíslo, diverguje.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že naše řada je konvergentní. Potom je konvergentní také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{p_n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $p_n \geq 2$, a proto díky součtu geometrické řady dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k = \frac{1}{p_n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \leq \frac{2}{p_n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right)$ je tedy konvergentní. Podle předchozího příkladu pak konverguje nekonečný součin

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right).$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$ libovolné. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že prvočíselný rozklad každého $l \in \mathbb{N}$, $l \leq m$, obsahuje pouze prvočísla menší než n_0 a v mocnině nejvýše n_0 (vizte 1.2.14). Pak platí

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right) \geq \prod_{n=1}^{n_0} \left(\sum_{k=0}^{n_0} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k\right) \geq \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}.$$

Harmonická řada však diverguje, a proto musí nekonečný součin $\prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n}\right)^k$ též divergovat, což je spor. ♣

Miscelanea.

3.8.22. Příklad. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\frac{1}{k+1} \leq \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}. \quad (3.78)$$

Řešení. Necht' $k \in \mathbb{N}$. Podle 1.7.14 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, nerovnost $\log(1+x) \leq x$. Dosadíme $x = \frac{1}{k}$ a dostaneme ihned druhou nerovnost v (3.78). Dále položíme $x = -\frac{1}{k+1}$, pak $x > -1$, a tedy platí

$$\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \leq -\frac{1}{k+1},$$

to jest

$$-\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1}.$$

Odtud a z vlastností logaritmu (1.7.14) dostáváme

$$\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}}\right) = -\log\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \geq \frac{1}{k+1},$$

což je první nerovnost v (3.78). ♣

3.8.23. Příklad. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \log(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Řešení. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Sečtením nerovností v (3.78) pro hodnoty $k \in \{1, \dots, n\}$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Pomocí vlastností logaritmické funkce a úpravou teleskopické sumy (vizte 1.7.14 a 1.5.5) dostáváme

$$\sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k) = \log(n+1).$$

Odtud vyplývají obě dokazované nerovnosti. ♣

3.8.24. Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ definovaná předpisem

$$a_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \log n, \quad n \in \mathbb{N},$$

je konvergentní.

Řešení. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

podle první nerovnosti v (3.78). Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy nerostoucí. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí podle Příkladu 3.8.23

$$a_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log(n+1) \geq 0,$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. Z Důsledku 2.4.2 tedy plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní. ♣

3.8.25. Poznámka. Označíme

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \log n \right).$$

Z Příkladu 3.8.24 vyplývá, že toto číslo je dobře definováno. Číslo γ nazýváme **Eulerovou-Mascheroniho konstantou**.⁷ Tato konstanta je přibližně rovna 0,577 a není známo, zda je racionální.

3.8.26. Příklad. Spočítejte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \log n \quad \text{a} \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n = a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n,$$

a tedy podle věty o limitě součtu (Věta 2.2.34(a)) platí

$$\begin{aligned} \lim b_n &= \lim(a_{2n} - a_n + \log(2n) - \log n) \\ &= \lim(a_{2n} - a_n + \log\left(\frac{2n}{n}\right)) = \gamma - \gamma + \log 2 \\ &= \log 2. \end{aligned}$$

♣

3.8.27. Příklad. Dokažte, že platí $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx \mathbb{R}$ (vizte 1.3.3 a 1.6.1(a)).

Řešení. Podle Cantorovy–Bernsteinovy věty (Věta 1.6.5) stačí dokázat, že $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{R}$ a $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Platnost $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{R}$. Označme $\mathcal{Z}$ množinu všech posloupností, jejichž členy jsou prvky množiny $\{0, 1\}$. Symbol χ_A bude značit charakteristickou funkci množiny A definovanou na $\mathbb{N}$ (vizte 1.4.25). Charakteristická funkce χ_A je tedy zobrazení z množiny $\mathbb{N}$, a proto jde o posloupnost, která patří do $\mathcal{Z}$ (vizte 1.4.34). Definujme zobrazení $\Phi: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{Z}$ předpisem

$$\Phi(A) = \chi_A, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Pokud $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ a $\chi_A = \chi_B$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\chi_A(n) = \chi_B(n)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí, že $n \in A$ právě tehdy, když $n \in B$, neboli $A = B$. Zobrazení Φ je tedy prosté. (Není těžké si rozmyslet, že Φ je i zobrazení na $\mathcal{Z}$.) Platí tedy $\mathcal{Z} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

⁷Lorenzo Mascheroni (1750–1800)

Pro $z \in \mathbb{Z}$ definujeme $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z(n)}{3^n}, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Každému $z \in \mathbb{Z}$ je tedy přiřazen 3-adický rozvoj, a protože $\mathbb{Z} \subset \mathcal{I}(3)$ je podle Příkladu 3.8.9 zobrazení φ prosté. Tedy $\mathbb{Z} \preceq \mathbb{R}$. Podle Věty 1.6.3(b) dostáváme $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{R}$.

Platnost $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Podle Příkladu 1.6.23 platí $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$, a tedy podle Příkladu 1.8.22 stačí ověřit, že platí $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Definujme zobrazení $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ předpisem

$$\psi(x) = \{q \in \mathbb{Q}; q < x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dokážeme, že zobrazení ψ je prosté. Předpokládejme, že $x, y \in \mathbb{R}$, přičemž $x \neq y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x < y$. Podle Věty 1.5.32 existuje racionální číslo r splňující $x < r < y$. To znamená, že $r \in \psi(y) \setminus \psi(x)$, a tedy $\psi(x) \neq \psi(y)$. Odtud plyne, že ψ je prosté, a tudíž $\mathbb{R} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. ♣

3.8.28. Příklad. Dokažte, že množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Řešení. Pro spor předpokládejme $\mathbb{R} \preceq \mathbb{N}$. Podle Příkladu 3.8.27 a Věty 1.6.3 pak máme $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{N}$, což je ve sporu s Cantorovou větou (Věta 1.6.7), ze které plyne $\mathbb{N} < \mathcal{P}(\mathbb{N})$. ♣

3.8.29. Příklad. Dokažte, že platí $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$.

Řešení. Tvrzení dokážeme pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty (Věta 1.6.5).

Platnost $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}^2$. Definujme zobrazení $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem $\varphi(x) = [x, 0]$. Potom je φ zřejmě prosté. Odtud plyne, že $\mathbb{R} \preceq \mathbb{R}^2$.

Platnost $\mathbb{R}^2 \preceq \mathbb{R}$. Nyní definujme zobrazení $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$ předpisem

$$\psi(x, y) = \{[p, q] \in \mathbb{Q}^2; (p < x) \wedge (q < y)\}, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Nechť $[x, y], [x', y'] \in \mathbb{R}^2$, $[x, y] \neq [x', y']$. Pak platí buď $x \neq x'$ nebo $y \neq y'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \neq x'$, a dále že $x < x'$. Podle Věty 1.5.32 nalezneme racionální číslo r splňující $x < r < x'$. Dále zvolme $q \in \mathbb{Q}$, $q < y'$. Potom platí $[r, q] \in \psi(x', y') \setminus \psi(x, y)$, takže $\psi(x, y) \neq \psi(x', y')$. Odtud plyne, že ψ je prosté. Platí tedy $\mathbb{R}^2 \preceq \mathcal{P}(\mathbb{Q}^2)$.

Podle Věty 1.6.21(c) a Příkladu 1.6.23 platí $\mathbb{Q}^2 \approx \mathbb{N}$, a díky Příkladu 1.8.22 máme $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Odtud a z Vět 1.6.4, 3.8.27 plyne $\mathcal{P}(\mathbb{Q}^2) \approx \mathbb{R}$. Díky Větě 1.6.3 dostáváme $\mathbb{R} < \mathbb{R}^2$. ♣

3.8.30. Příklad. Necht jsou posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ definovány předpisy:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{pro } n = 1, \\ 2^{n-1} & \text{pro } n \in \mathbb{N}, n > 1, \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} -1 & \text{pro } n = 1, \\ 1 & \text{pro } n \in \mathbb{N}, n > 1, \end{cases}$$

Dokažte, že Cauchyův součin divergentních řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní.

Řešení. Označme $\{c_n\}$ posloupnost členů Cauchyova součinu obou řad. Potom platí $c_1 = -2$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, máme

$$\begin{aligned} c_k &= a_1 b_k + \cdots + a_k b_1 = a_1 + \cdots + a_{k-1} - a_k \\ &= 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-2} - 2^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá tvrzení. ♣

3.8.31. Příklad. Necht Q značí množinu racionálních čísel v intervalu $(0, 1)$. Dokažte, že existují bijekce π a σ množiny $\mathbb{N}$ na Q takové, že $\sum_{n \in \mathbb{N}} \pi(n)^n$ konverguje a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n)^n$ diverguje.

Řešení. Konstrukce π . Nalezneme rostoucí posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ reálných čísel z intervalu $[0, 1)$ splňující $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ a $\lim a_k = 1$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{a_{n_k}^{n_k}}{1 - a_{n_k}} < 2^{-(k+1)}.$$

Položíme $n_0 = 0$. Dále nalezneme posloupnost nekonečných množin $\{P_k\}_{k=0}^\infty$, které splňují

- $P_k \subset \{n \in \mathbb{N}; n \geq n_k\}$,
- $\forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l: P_k \cap P_l = \emptyset$,
- $\bigcup_{k=0}^\infty P_k = \mathbb{N}$.

Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nalezneme bijekci π_k množiny P_k na množinu $A_k = (a_k, a_{k+1}] \cap Q$. Hledanou bijekci pak definujeme jako $\pi(n) = \pi_k(n)$ pro $n \in P_k$. Odhadneme

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \pi(n)^n &= \sum_{q \in Q} q^{\pi^{-1}(q)} = \sum_{k=0}^\infty \sum_{q \in A_k} q^{\pi^{-1}(q)} \\ &\leq \sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty a_{k+1}^{n_k+l} \leq \sum_{l=0}^\infty 2^{-l} + \sum_{k=1}^\infty \frac{a_{n_k}^{n_k}}{1 - a_{n_k}} \leq 2 + \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = 3. \end{aligned}$$

Konstrukce σ . Nalezneme rostoucí posloupnost $\{q_k\}$ prvků Q splňující $q_k^{2k} > \frac{1}{2}$. Označme $T = \{q_k; k \in \mathbb{N}\}$. Množina T je nekonečná a spočetná. Nalezneme bijekci τ množiny lichých přirozených čísel na množinu $Q \setminus T$. Potom definujeme bijekci $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow Q$ předpisem $\sigma(2k) = q_k$ a $\sigma(2k-1) = \tau(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ odhadneme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n)^n > \sum_{k=1}^m q_k^{2k} > \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} = \frac{m}{2}.$$

Odtud plyne $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n)^n = \infty$. ♣

3.9. Početní příklady k číselným řadám

Řady s nezápornými členy.

3.9.1. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Spočteme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$2(\sqrt[n]{n})^2 \leq \sqrt[n]{n^2 2^n + 3} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n n^2} = 2 \sqrt[n]{2} (\sqrt[n]{n})^2$$

a

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n^{24}} \leq \sqrt[n]{(n^4 + 1)^6} \leq \sqrt[n]{2^6 n^{24}} = \sqrt[n]{2^6} (\sqrt[n]{n})^{24}.$$

Odtud vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$\frac{2}{\sqrt[n]{2^6} (\sqrt[n]{n})^{22}} = \frac{2(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{2^6} (\sqrt[n]{n})^{24}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}} \leq \frac{2 \sqrt[n]{2} (\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{n}} = 2 \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Podle věty o dvou strážnících, Příkladů 2.2.47 a 2.2.48 a věty o aritmetice limit tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}} = 2.$$

Protože $2 > 1$, zadaná řada diverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria. ♣

3.9.2. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Pro velké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ je ve výrazu $n^3 + 1$ člen 1 zanedbatelný, a proto můžeme očekávat, že se zadaná řada bude chovat podobně jako řada s členy $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $a_n = \frac{n^2}{n^3 + 1}$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^3 + 1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^3}} = 1.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tato řada diverguje podle Příkladu 3.1.15, a tedy diverguje i zadaná řada. ♣

3.9.3. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Řešení. Pomocí Příkladu 2.2.48 dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\frac{1}{2} < 1$, Zadaná řada konverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria (Věta 3.2.8). ♣

3.9.4. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Řada má kladné členy pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n^{\alpha} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}} = n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}{\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Ta podle Věty 3.2.18 konverguje právě tehdy, když $\alpha - \frac{1}{2} < -1$, neboli právě tehdy, když $\alpha < -\frac{1}{2}$. ♣

3.9.5. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n \log^2 n}\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající a má kladné členy. Podle kondenzačního kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \log^2(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log^2 2}.$$

Tato řada konverguje podle Příkladu 3.2.3 a linearit konvergentních řad (Důsledek 3.1.19). Zadaná řada je tedy konvergentní. ♣

3.9.6. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$.

Řešení. Výraz $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$ je dobře definován a je kladný pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pro tato n označme $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2}) \log^2 n}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, položme $b_n = \frac{1}{n \log^2 n}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Podle Příkladu 3.9.5 řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$ konverguje. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.7. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Řešení. Řada má kladné členy. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$

Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right)^2 = 0.$$

Protože $0 < 1$, zadaná řada konverguje podle d'Alembertova podílového kritéria. ♣

3.9.8. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n$.

Řešení. Obor hodnot funkce kosinus je interval $[-1, 1]$ a pro všechna $t \in [-1, 1]$ platí

$$0 \leq \frac{1+t}{2+t} = 1 - \frac{1}{2+t} \leq 1 - \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$0 \leq \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Podle Příkladu 3.1.7 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ konverguje. Podle srovnávacího kritéria tudíž konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.9. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1})$.

Řešení. Řada má zřejmě kladné členy. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$. Podle Příkladu 1.5.7 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} \\ &= (\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}) \cdot \frac{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2} \\ &= \frac{(n^2+5) - (n^2+1)}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2} \\ &= \frac{4}{(\sqrt[3]{n^2+5})^2 + \sqrt[3]{n^2+5} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + (\sqrt[3]{n^2+1})^2}. \end{aligned}$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $b_n = n^{-\frac{4}{3}}$. Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt[3]{(1+\frac{5}{n^2})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^2})^2}} = \frac{4}{3}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ konverguje podle Věty 3.2.18, a proto konverguje i zadaná řada podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.10. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

Řešení. Řada má zřejmě kladné členy. Podle Příkladu 2.5.3 platí $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^6}{e^k} = 0$. Existuje tedy $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\frac{k^6}{e^k} \leq 1$. Položme $n_0 = k_0^3$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{n^2}{e^{\sqrt[3]{n}}} = \frac{(\sqrt[3]{n})^6}{e^{\sqrt[3]{n}}} \leq \frac{([\sqrt[3]{n}] + 1)^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq \frac{(2[\sqrt[3]{n}])^6}{e^{[\sqrt[3]{n}]}} \leq 2^6,$$

a tedy

$$e^{-\sqrt[3]{n}} \leq \frac{2^6}{n^2}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^6}{n^2}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i zadaná řada. ♣

3.9.11. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 1})$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \sqrt{n^2 + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 1}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 1} &= \sqrt[6]{(n^2 + 3)^3} - \sqrt[6]{(n^3 + 1)^2} \\ &= \frac{(n^2 + 3)^3 - (n^3 + 1)^2}{\sum_{j=0}^5 (\sqrt[6]{(n^2 + 3)^3})^{5-j} (\sqrt[6]{(n^3 + 1)^2})^j} \\ &= \frac{9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26}{\sum_{j=0}^5 (\sqrt[6]{(n^2 + 3)^3})^{5-j} (\sqrt[6]{(n^3 + 1)^2})^j}. \end{aligned}$$

Protože $\lim(9n^4 - 2n^3 + 27n^2 + 26) = \infty$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je a_n nezáporné. Navíc platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^5 - 2n^4 + 27n^3 + 26n}{\sum_{j=0}^5 (\sqrt[6]{(n^2 + 3)^3})^{5-j} (\sqrt[6]{(n^3 + 1)^2})^j} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{2}{n} + \frac{27}{n^2} + \frac{26}{n^4}}{\sum_{j=0}^5 (\sqrt[6]{(1 + \frac{3}{n^2})^3})^{5-j} (\sqrt[6]{(1 + \frac{1}{n^3})^2})^j} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Protože $\frac{3}{2} \in (0, \infty)$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.15, zadaná řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria. ♣

3.9.12. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2 + \sqrt{1})(2 + \sqrt{2}) \cdots (2 + \sqrt{n})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy zadané řady jsou kladné a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2 + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}} + 1.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty.$$

Podle Raabeova kritéria (Příklad 3.8.1) tedy daná řada konverguje. ♣

3.9.13. Příklad. Necht $a, b, d \in (0, \infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{a(a+d) \cdots (a+nd)}{b(b+d) \cdots (b+nd)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Členy řady jsou kladné a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b + (n+1)d}{a + (n+1)d}.$$

Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{b-a}{a + (n+1)d} = \frac{b-a}{d}.$$

Jestliže $b-a > d$, pak zadaná řada konverguje podle Raabeova kritéria. Jestliže $b-a < d$, pak zadaná řada dle stejného kritéria diverguje. Jestliže $b = a+d$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{a(a+d) \cdots (a+nd)}{(a+d)(a+2d) \cdots (a+nd)(a+(n+1)d)} = \frac{a}{a + (n+1)d},$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{a}{d}.$$

Protože $\frac{a}{d} \in (0, \infty)$, zadaná řada v tomto případě diverguje podle Věty 3.2.5. ♣

Řady s obecnými členy.

3.9.14. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je zřejmě klesající a splňuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty (Věta 3.3.1). Navíc podle Věty 3.2.18 řada $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, a tedy zadaná řada nekonverguje absolutně. ♣

3.9.15. Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|(-1)^{[\sqrt{n}]}| \leq 1 \quad \text{a} \quad 0 \leq \frac{1}{n(\sqrt{n}+1)} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Odtud pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne

$$0 \leq \left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n(\sqrt{n}+1)} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}. \quad (3.79)$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ je konvergentní podle Věty 3.2.18. Z nerovnosti (3.79) a srovnávacího kritéria tedy vyplývá, že zadaná řada je absolutně konvergentní. ♣

3.9.16. Příklad. Necht $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Dokažte, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx + \alpha)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx + \alpha)$ mají omezené posloupnosti částečných součtů.

Řešení. Necht $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ mají omezené posloupnosti částečných součtů podle Příkladů 3.3.7 a 3.3.8. Dále podle 1.7.16 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \sin(nx + \alpha) &= \sin nx \cdot \cos \alpha + \cos nx \cdot \sin \alpha, \\ \cos(nx + \alpha) &= \cos nx \cdot \cos \alpha - \sin nx \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Odtud pak dokazovaná tvrzení plynou pomocí Příkladu 3.8.15. ♣

3.9.17. Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů pro každé $x \in \mathbb{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. Podle 1.7.16 platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \sin nx = \sin n(x + \pi) \quad \text{a} \quad (-1)^n \cos nx = \cos n(x + \pi).$$

Tvrzení tedy plyne z Příkladu 3.9.16. ♣

3.9.18. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje.

Řešení. Necht $x \in \mathbb{R}$. Podle Příkladu 3.9.17 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin nx$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a konverguje k 0. Zadaná řada tedy konverguje podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)). ♣

3.9.19. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \frac{n^2}{n^2+1}$ konverguje.

Řešení. Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Příkladu 3.9.18. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq \frac{n^2}{n^2+1} \leq 1 \quad \text{a} \quad \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}.$$

Posloupnost $\{\frac{n^2}{n^2+1}\}$ je tedy omezená a rostoucí. Podle Abelova kritéria (Věta 3.3.5(A)) je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

3.9.20. Příklad. Dokažte, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n\right) \cdot \frac{n^2 + n}{n^2 + 2}$$

konverguje právě tehdy, když $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Řešení. $\Leftarrow$ Necht' $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right), \quad b_n = \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n, \quad c_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 2}.$$

Potom

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + n},$$

a tedy $\lim b_n = 0$.

Necht' $n \in \mathbb{N}$. Nerovnost $b_{n+1} \leq b_n$ platí právě tehdy, když

$$\sqrt{(n+1)^2 + \sqrt{n+1}} - (n+1) \leq \sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n.$$

Tato nerovnost je postupně ekvivalentní nerovnostem

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + \sqrt{n+1} &\leq n^2 + \sqrt{n} + 1 + 2\sqrt{n^2 + \sqrt{n}}, \\ 2n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} &\leq 2\sqrt{n^2 + \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

$$4n^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 + \frac{4n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 4n^2 + 4\sqrt{n},$$

a konečně

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 4. \quad (3.80)$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme výraz na levé straně předchozí nerovnosti jako x_n . Potom platí $\lim x_n = 2$. Podle Věty 2.3.30 existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí (3.80), a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_{n+1} \leq b_n$.

Podle Příkladu 3.9.16 má $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Podle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)) je tedy řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní. Proto je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Protože $\lim c_n = 1$, je posloupnost $\{c_n\}$ omezená. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Potom platí $c_n \geq c_{n+1}$ právě tehdy, když

$$\frac{n^2 + n}{n^2 + 2} \geq \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{(n+1)^2 + 2}.$$

Tato nerovnost je postupně ekvivalentní nerovnostem

$$\begin{aligned}(n^2 + 2n + 3)(n^2 + n) &\geq (n^2 + 2)(n^2 + 3n + 2), \\ n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 3n &\geq n^4 + 3n^3 + 4n^2 + 6n + 4, \\ n^2 &\geq 3n + 4,\end{aligned}$$

a konečně

$$1 \geq \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}.$$

Protože pravá strana poslední nerovnosti zřejmě konverguje k 0, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: c_n \geq c_{n+1}. \quad (3.81)$$

Proto podle Abelova kritéria (Věta 3.3.5(A)) konverguje řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n b_n c_n$, a tedy i zadaná řada.

$\Rightarrow$ Tuto implikaci dokážeme nepřímým důkazem. Necht' $x \in \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pak $a_n = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ má pro uvedenou volbu x nezáporné členy a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n c_n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} + n} \cdot \frac{n^2 + n}{n^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ proto diverguje podle limitního srovnávacího kritéria a Věty 3.2.18. ♣

3.9.21. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{\log n}\}_{n=2}^{\infty}$ je zřejmě klesající a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Podle 1.7.14 pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, platí $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n-1}$. Protože řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ diverguje, plyne ze srovnávacího kritéria, že diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$. Zadaná řada je tedy neabsolutně konvergentní. ♣

3.9.22. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sqrt[n]{3} - 1$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ podle Příkladu 2.2.48. Řada tedy konverguje podle Leibnizovy věty. Ukážeme, že řada nekonverguje absolutně. Podle Věty 1.5.7 pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}a_n &= (\sqrt[n]{3} - 1) \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt[n]{3})^k}{\sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt[n]{3})^k} \\ &= \frac{3 - 1}{\sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt[n]{3})^k} = \frac{2}{\sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt[n]{3})^k} \geq \frac{2}{3n}.\end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n}$ je divergentní, takže podle srovnávacího kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (\sqrt[n]{3}-1)|$ diverguje. ♣

3.9.23. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria (Věta 3.2.11) tedy zadaná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.24. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ první řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria (Věta 3.2.11) tedy první řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. Obdobně lze ukázat, že i druhá řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$. ♣

3.9.25. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{n} x^n \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x|.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria (Věta 3.4.7) tedy zadaná řada absolutně konverguje pro každé $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Zbývá vyšetřit případy $x = 1$ a $x = -1$. Položme $x = -1$. Pak obdržíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje. Položme $x = 1$. Potom dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, která konverguje (Věta 3.3.1) nikoli však absolutně (Věta 3.2.18).

Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když $x \in [-1, 1)$, a absolutně konverguje právě tehdy, když $x \in (-1, 1)$. ♣

3.9.26. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Označme $a_n = \binom{2n}{n} x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!} |x|^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!n!} |x|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |x| = 4|x|. \end{aligned}$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada absolutně konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a diverguje pro každé $x \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$. Zbývá vyřešit případy $x = \frac{1}{4}$ a $x = -\frac{1}{4}$.

Položme $b_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $b_1 = \frac{1}{2}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot b_n. \quad (3.82)$$

Matematickou indukcí dokážeme, že

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{2n} \leq b_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \quad (3.83)$$

Je zřejmé, že pro $n = 1$ obě nerovnosti v (3.83) platí. Předpokládejme, že nerovnosti jsou splněny pro $n \in \mathbb{N}$. Potom dostáváme

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot b_n \begin{cases} \geq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n+2}, \\ \leq \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}. \end{cases}$$

Z (3.82) vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Z (3.83) a věty o dvou strážnících plyne, že $\lim b_n = 0$. Podle Leibnizovy věty tedy dostáváme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

Z (3.83) a srovnávacího kritéria dále plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.

Zadaná řada tedy konverguje právě tehdy, když platí $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a absolutně konverguje právě tehdy, když $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. ♣

3.9.27. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$.

Řešení. Konvergence. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = \sin(2n)$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Podle Příkladu 3.3.7 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tedy konverguje podle Dirichletova kritéria.

Absolutní konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|\sin(2n)| \geq \sin^2(2n) = \frac{1}{2}(1 - \cos(4n)) \geq 0,$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left| \frac{\sin(2n)}{n} \right| \geq \frac{1 - \cos(4n)}{2n}. \quad (3.84)$$

Podle Dirichletova kritéria a Příkladu 3.3.8 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n)}{n}$ konvergentní. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(4n)}{2n}$ konverguje. Potom díky linearitě konvergentních řad (Důsledek 3.1.19) konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, což je spor. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(4n)}{2n}$ tedy diverguje. Tato řada má nezáporné členy. Podle srovnávacího kritéria a (3.84) tedy diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(2n)|}{n}$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.28. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n \frac{\pi}{4})}{\log(\log n)}. \quad (3.85)$$

Řešení. Konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, označme $a_n = \cos(n \frac{\pi}{4})$ a $b_n = \frac{1}{\log(\log n)}$. Z Příkladu 3.3.8 plyne, že řada $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{b_n\}_{n=3}^{\infty}$ je klesající a platí $\lim b_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy zadaná řada konverguje.

Absolutní konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, platí

$$\log(\log n) \geq \log(\log 3) > \log(\log e) = 0$$

a

$$\frac{|\cos(n \frac{\pi}{4})|}{\log(\log n)} \geq \frac{\cos^2(n \frac{\pi}{4})}{\log(\log n)} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \cos(n \frac{\pi}{2}))}{\log(\log n)} \geq 0. \quad (3.86)$$

Podle 1.7.14 pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $\log x \leq x - 1 < x$. Odtud plyne

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3: 0 < \log(\log n) < \log n < n.$$

Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, platí

$$\frac{1}{2 \log(\log n)} \geq \frac{1}{2n},$$

takže řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2 \log(\log n)}$ diverguje. Řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n \frac{\pi}{2})}{2n}$ konverguje podle Dirichletova kritéria. Z linearit konvergentních řad tedy plyne, že řada

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2 \log(\log n)} - \frac{\cos(n \frac{\pi}{2})}{2n} \right)$$

diverguje. Podle (3.86) a srovnávacího kritéria tedy řada (3.85) konverguje neabsolutně. ♣

3.9.29. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} n. \quad (3.87)$$

Řešení. Konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \quad \text{a} \quad b_n = \arctg n.$$

Posloupnost $\{b_n\}$ je rostoucí a omezená. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ je klesající a má limitu rovnou nule. Řada (3.87) konverguje podle Abelova kritéria.

Absolutní konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \arctg n \right| \geq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} \arctg 1 = \frac{\pi}{8} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\pi}{8} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}} \geq 0.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, zatímco řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje. Podle srovnávacího kritéria tedy řada (3.87) není absolutně konvergentní. ♣

3.9.30. Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10 \sin n}.$$

Řešení. Konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, označme

$$a_n = \frac{\sin n}{n + 10 \sin n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{\sin n}{n}.$$

Řada $\sum_{n=11}^{\infty} b_n$ je podle Příkladu 3.3.9 konvergentní. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí

$$|a_n - b_n| = \left| \frac{-10(\sin n)^2}{n(n + 10 \sin n)} \right| \leq \frac{10}{n(n - 10)}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, označme $c_n = \frac{10}{n(n-10)}$. Řada $\sum_{n=11}^{\infty} c_n$ nezáporné členy, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{\frac{1}{n^2}} = 10$$

a řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje podle Příkladu 3.2.3. Tedy podle limitního srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum_{n=11}^{\infty} c_n$. Podle srovnávacího kritéria je tudíž i řada $\sum_{n=11}^{\infty} |a_n - b_n|$ konvergentní. Podle Věty 3.4.3 odtud plyne, že je řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} a_n = \sum_{n=11}^{\infty} (a_n - b_n) + \sum_{n=11}^{\infty} b_n$$

konvergentní.

Absolutní konvergence. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí

$$\left| \frac{\sin n}{n + 10 \sin n} \right| \geq \frac{\sin^2 n}{n + 10 \sin n} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos(2n))}{n + 10 \sin n} \geq 0.$$

Řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2(n + 10 \sin n)}$$

konverguje, což lze ověřit podobně jako v případě řady $\sum_{n=11}^{\infty} a_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$, platí

$$\frac{1}{n + 10 \sin n} \geq \frac{1}{n + 10} \geq 0,$$

takže podle srovnávacího kritéria řada

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n + 10 \sin n}$$

diverguje. Z linearit konvergentních řad tedy vyplývá, že

$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n + 10 \sin n}$$

diverguje. Podle srovnávacího kritéria tudíž diverguje i řada $\sum_{n=11}^{\infty} |a_n|$. Zadaná řada tedy konverguje neabsolutně. ♣

3.9.31. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \frac{\sin(2n + 1)}{2n + (-1)^n n} \operatorname{arctg}(n^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2n + (-1)^n n} = \frac{2n - (-1)^n n}{3n^2} = \frac{2 - (-1)^n}{3n}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{\sin(2n + 1)}{2n + (-1)^n n} = \frac{2 \sin(2n + 1)}{3n} - \frac{(-1)^n \sin(2n + 1)}{3n}.$$

Z Příkladu 3.9.16 víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n + 1)$ má omezené částečné součty. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(-1)^n \sin(2n + 1) = (-1)^n \sin(2n) \cos(1) + (-1)^n \cos(2n) \sin(1).$$

Podle Příkladu 3.9.17 má řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(2n + 1)$ omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{\frac{2}{3n}\}$ je klesající a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n} = 0$. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2n + 1)}{3n}$$

tudíž konverguje podle Dirichletova kritéria. Podobně lze ověřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{3n}.$$

Odtud vyplývá, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n + (-1)^n n}$$

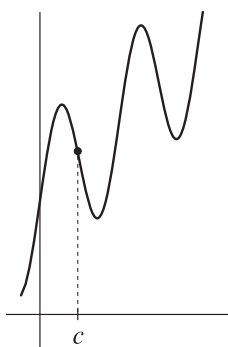
konverguje. Protože posloupnost $\{\arctg(n^2)\}$ je rostoucí a omezená, zadaná řada konverguje podle Abelova kritéria. ♣

Limita a spojitost funkce

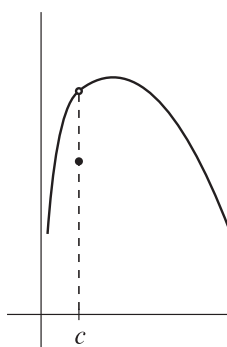
4.1. Definice a základní vlastnosti

4.1.1. Definice. Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$. V této kapitole budeme psát stručněji jen *funkce*. Podobně tomu bude i dále, nebude-li hrozit nedorozumění.

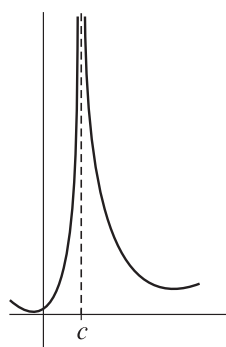
4.1.2 (intuitivní pojem limity funkce). Na následujících obrázcích máme grafy několika různých funkcí. Podívejme se na chování těchto funkcí blízko bodu c . Na prvním obrázku se zdá, že přibližují-li se hodnoty x k bodu c , blíží se $f(x)$ k funkční hodnotě f v bodě c . Na druhém obrázku se děje něco podobného, ale $f(c)$ je různé od hodnoty, k níž se blíží $f(x)$, když se proměnná x přibližuje k c . Konečně na třetím obrázku rostou hodnoty $f(x)$ nade všechny meze. Analogicky můžeme rozumět dalším dvěma obrázky pro $c = \infty$. Na posledním obrázku se však pro x blížící se k c funkční hodnoty $f(x)$ k žádné hodnotě nepřibližují.



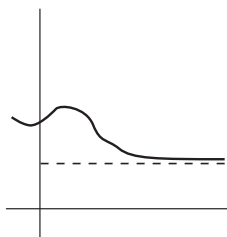
OBRÁZEK 1.



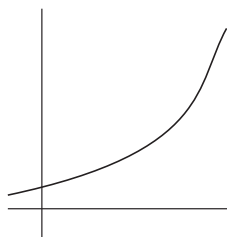
OBRÁZEK 2.



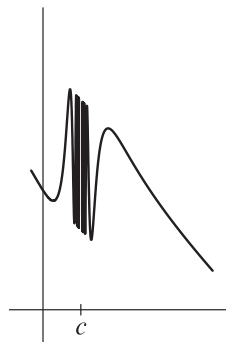
OBRÁZEK 3.



OBRÁZEK 4.



OBRÁZEK 5.



OBRÁZEK 6.

Nyní budeme chtít matematicky postihnout, co to znamená, že se funkční hodnoty $f(x)$ k něčemu blíží, pokud se x blíží k c . Přitom si ale nebudeme všimnout funkční hodnoty v bodě c , ale pouze samotného faktu „blížení se“. Následující definice nám pomůže při přesné formulaci tohoto pojmu.

4.1.3. Definice. Necht $c \in \mathbb{R}$. Potom **prstencovým okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(c, \varepsilon)$. **Prstencovým okolím** bodu ∞ rozumíme každou množinu tvaru $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(\infty, \varepsilon)$. **Prstencovým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každou množinu tvaru $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, a kterou značíme $P(-\infty, \varepsilon)$.

Připomeňme, že v Definici 2.3.13 jsme definovali pojem okolí pro body z $\mathbb{R}^*$.

4.1.4. Učiníme několik jednoduchých pozorování stran pojmu okolí.

(a) Ať už je $c \in \mathbb{R}$, nebo $c \in \{\infty, -\infty\}$, vždy pro $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, platí $B(c, \varepsilon_1) \subset B(c, \varepsilon_2)$. Podobně je tomu, nahradíme-li okolí prstencovými okolími. Všimněme si, že v případě bodu ∞ je okolí a prstencové okolí táž množina. Stejně je tomu s okolím a prstencovým okolím bodu $-\infty$.

(b) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*, c_1 \neq c_2$, potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$. V případě, že $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, můžeme volit například $\varepsilon = \frac{1}{2}|c_1 - c_2|$. Pokud je $c_1 = \infty$ a $c_2 \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{|c_2|+2}\}$. Potom totiž platí

$$c_2 + \varepsilon \leq c_2 + 1 < |c_2| + 2 = \frac{1}{\frac{1}{|c_2|+2}} \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

takže $B(\infty, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$. Ve zbývajících případech postupujeme obdobně.

(c) Pokud $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^*, c_1 < c_2, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, splňují $B(c_1, \varepsilon) \cap B(c_2, \varepsilon) = \emptyset$, potom pro každá $x \in B(c_1, \varepsilon), y \in B(c_2, \varepsilon)$ platí $x < y$.

Následující definice je jednou z nejdůležitějších v tomto textu.

4.1.5. Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$** , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon). \quad (4.1)$$

4.1.6 (formule jako hra ještě jednou). Na ověřování podmínky (4.1) je možné opět nahlížet jako na hru, v níž se utkají dva hráči (vizte 2.2.5). První hráč (naš protivník) volí v prvním tahu hry kladné reálné číslo ε . Naším úkolem (v roli druhého hráče) je zvolit ve druhém tahu hry kladné reálné číslo δ . Ve třetím (posledním) tahu hry volí první hráč $x \in P(c, \delta)$. Pokud $f(x) \notin B(A, \varepsilon)$, vyhrává první hráč, v opačném případě vítězíme my. Pokud dokážeme vyhrát *libovolnou* takovou partii, je limitou funkce f v bodě c prvek A .

4.1.7. Věta (jednoznačnost limity). Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$, $A_1 \neq A_2$, jsou limity funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset$. Podle definice limity pak nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1): f(x) \in B(A_1, \varepsilon).$$

Podobně nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2): f(x) \in B(A_2, \varepsilon).$$

Položme $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vezměme $x \in P(c, \delta_3)$. Potom máme

$$f(x) \in B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset,$$

což je spor. ■

Podobně jako u limity posloupnosti nám předchozí věta umožňuje zavést následující označení.

4.1.8. Označení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

4.1.9. (a) Jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existuje, pak je f definována na jistém prstencovém okolí bodu c . V bodě c funkce f nemusí být definována.

(b) Necht $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, kde $c, A \in \mathbb{R}^*$. Pak můžeme rozlišit tyto případy:

$$\text{počítáme limitu} \left\{ \begin{array}{l} \text{ve vlastním bodě, tj. } c \in \mathbb{R} \text{ a} \\ \text{v nevlastním bodě, tj. } c \in \{-\infty, \infty\}, \text{ a} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathbb{R} \text{ (limita je \textbf{vlastní})}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna \textbf{plus nekonečnu})}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna \textbf{mínus nekonečnu})}, \\ A \in \mathbb{R} \text{ (limita je \textbf{vlastní})}, \\ A = \infty \text{ (limita je rovna \textbf{plus nekonečnu})}, \\ A = -\infty \text{ (limita je rovna \textbf{mínus nekonečnu})}. \end{array} \right.$$

Uvědomme si, že pro $c, A \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}: 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Obdobně platí $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ právě tehdy, když

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists L \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: x > L \Rightarrow f(x) > K.$$

Zde je vidět užitečnost pojmů okolí a prstencové okolí, které nám dovolují formulovat definici vlastní i nevlastní limity funkce ve vlastním i nevlastním bodě pomocí jedné formule.

4.1.10. Příklad. Necht' $A \in \mathbb{R}$ a f je funkce, jejíž funkční hodnoty jsou na jistém prstencovém okolí bodu $c \in \mathbb{R}^*$ rovny A . Dokažte, že platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Řešení. Podle předpokladu nalezneme $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_0)$ platí $f(x) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \delta_0$. Pro $x \in P(c, \delta)$ platí $x \in P(c, \delta_0)$, a tedy $f(x) = A \in B(A, \varepsilon)$. ♣

4.1.11. Příklad. Necht' $c \in \mathbb{R}^*$. Dokažte, že platí $\lim_{x \rightarrow c} x = c$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Pro každé $x \in P(c, \delta)$ pak platí $x \in P(c, \varepsilon) \subset B(c, \varepsilon)$. ♣

4.1.12. Příklad. Dokažte, že platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \varepsilon$. Pro každé $x \in P(\infty, \delta)$ pak platí $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$, a tedy $\frac{1}{x} \in B(0, \varepsilon)$. ♣

4.1.13. Příklad. Dokažte, že platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Řešení. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K tomuto ε hledáme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(0, \delta): \frac{1}{x^2} \in B(\infty, \varepsilon),$$

neboli

$$\forall x \in P(0, \delta): \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Položíme-li $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, pak je výše uvedená formule splněna a důkaz proveden. ♣

4.1.14 (lokální charakter limity). Necht' $c \in \mathbb{R}^*$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, a funkce f, g splňují

$$\forall x \in P(c, \eta): f(x) = g(x).$$

Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$, pokud alespoň jedna z limit existuje.

K ověření tohoto tvrzení stačí ukázat, že pokud $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, pak také $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

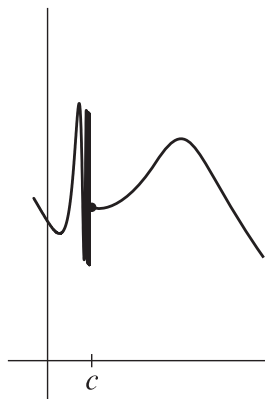
Nyní položme $\delta' = \min\{\delta, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta')$ platí

$$g(x) = f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Podle definice limity tedy platí $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$.

Pokud se tedy dvě funkce shodují na jistém prstencovém okolí bodu c , pak se vzhledem k pojmu limity v bodě c chovají stejně. Jinými slovy existence limity a hodnota limity funkce v daném bodě závisí pouze na chování funkce na jistém prstencovém okolí bodu c , proto hovoříme o *lokálním charakteru* limity. Tuto vlastnost budeme při výpočtech limit často používat.

Na následujícím obrázku vidíme, že limita funkce f v bodě c zjevně neexistuje, přesto blíží-li se x k bodu c zprava, potom se i funkční hodnoty blíží k jisté hodnotě.



I tento pojem, kdy se proměnná blíží k c z jedné strany, lze formalizovat, a to pomocí pojmu limity v bodě zprava (respektive zleva). K tomu budeme potřebovat pravé (respektive levé) okolí bodu, jež jsou definovány následovně.

4.1.15. Definice. Necht' $c \in \mathbb{R}$.

- **Pravým okolím** bodu c rozumíme každý interval $[c, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_+(c, \varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c - \varepsilon, c]$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_-(c, \varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c, c + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_+(c, \varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu c rozumíme každý interval $(c - \varepsilon, c)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_-(c, \varepsilon)$.

Pokračujme s definicí pro nevlastní hodnoty.

- **Pravým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_+(-\infty, \varepsilon)$,
- **levým okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $B_-(\infty, \varepsilon)$,
- **pravým prstencovým okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_+(-\infty, \varepsilon)$,
- **levým prstencovým okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval $(\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$, kde $\varepsilon > 0$, a který značíme $P_-(\infty, \varepsilon)$.

4.1.16. Definice. Necht' $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A , jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in P_+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Obdobně definujeme pojem **limity zleva** v bodě $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4.1.17. Obdobně jako ve Větě 4.1.7 lze dokázat, že funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva. Pro limitu zleva funkce f v bodě c užíváme symbol $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ a pro limitu zprava symbol $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$.

4.1.18. Věta. Necht' f je funkce a $c \in \mathbb{R}$. Limita funkce f v bodě c existuje právě tehdy, když má f v bodě c limitu zprava i zleva a hodnoty těchto jednostranných limit se rovnají. Navíc pokud $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existuje, pak

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x).$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Potom ale máme také

$$\forall x \in P_+(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

neboť $P_+(c, \delta) \subset P(c, \delta)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = A$. Rovnost $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = A$ lze dokázat obdobně.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity zprava nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(c, \delta_1): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_-(c, \delta_2): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom $P(c, \delta) \subset P(c, \delta_1) \cup P(c, \delta_2)$, takže pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme $f(x) \in B(A, \varepsilon)$. Dokázali jsme tak, že platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Závěrečné tvrzení plyne z předchozího. ■

Následující výsledek je obdobou Věty 2.2.24 pro funkce.

4.1.19. Věta. Necht' f je funkce a $c \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Pro každé $x \in P(c, \delta)$ pak platí $|f(x)| \in [0, \varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): |f(x)| \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Pro každé $x \in P(c, \delta)$ pak platí $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) = B(0, \varepsilon)$. Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$. ■

4.1.20. Definice. Necht' $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá**, jestliže $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (respektive **zleva**), jestliže $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c)$ (respektive $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c)$).

4.1.21. Necht' f je funkce a $c \in \mathbb{R}$. Z vlastností okolí lze snadno odvodit ekvivalenci následujících výroků.

- (i) Funkce f je spojitá v bodě c .
- (ii) Platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in B(c, \delta): f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Je užitečné porovnat poslední dvě formule s formulemi (4.1) a (4.2).

4.1.22. Příklad. Funkci **signum**, kterou budeme značit sign , definujeme na $\mathbb{R}$ předpisem

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Dokažte, že signum není v bodě 0 spojitá.

Řešení. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \text{sign } x = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \text{sign } x = -1.$$

Funkce sign tedy nemá v bodě 0 limitu podle Věty 4.1.18, a tedy není v 0 spojitá. ♣

4.1.23. Příklad. Afinní funkce je spojitá v každém bodě $\mathbb{R}$.

Řešení. Uvažujme afinní funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je definována předpisem $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ (vizte 1.7.5). Tvrzení dokážeme přímým ověřením definice. Důkaz provedeme podrobně v případě, že $a > 0$. Mějme $c \in \mathbb{R}$. Pro $a < 0$ lze postupovat obdobně a pro $a = 0$ je uvažovaná funkce konstantní, takže tvrzení plyne z 4.1.10.

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$. Pak pro každé $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí

$$f(c) - \varepsilon = f(c) - a\delta < f(x) = f(c) + a(x - c) < f(c) + a\delta = f(c) + \varepsilon.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. ♣

4.1.24. Věta (vlastní limita a omezenost). Necht' funkce f má v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu. Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f je na $P(c, \delta)$ omezená.

Důkaz. Označme $A = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Podle předpokladu je $A \in \mathbb{R}$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, 1),$$

neboli $f(P(c, \delta)) \subset (A - 1, A + 1)$. Tato inkluze dokazuje omezenost funkce f na $P(c, \delta)$, neboť číslo $A + 1$ je horní závorou množiny $f(P(c, \delta))$ a číslo $A - 1$ je její dolní závorou (vizte Definice 1.4.11 a 1.5.19) ■

4.2. Věty o limitách

Definice limity neobsahuje návod, jak tuto limitu vypočítat, případně jak ukázat, že funkce v daném bodě limitu nemá. Věty z tohoto oddílu nám umožní jednak limity v některých případech vypočítat a dále ukáží nové vlastnosti právě definovaných pojmů.

Aritmetika limit.

4.2.1. Věta (aritmetika limit funkcí). Nechť $A, B, c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$. Potom platí:

- (a) $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (b) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz na pravé straně definován,
- (c) $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení (c). Technika důkazů zbývajících tvrzení je obdobná a zde je nebudeme provádět. Výraz $\frac{A}{B}$ je podle předpokladu definován, takže musí nastat některý z následujících případů:

- (1) $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- (2) $A \in \mathbb{R}, B \in \{-\infty, \infty\}$,
- (3) $A = \infty, B \in \mathbb{R}, B > 0$,
- (4) $A = \infty, B \in \mathbb{R}, B < 0$,
- (5) $A = -\infty, B \in \mathbb{R}, B > 0$,
- (6) $A = -\infty, B \in \mathbb{R}, B < 0$.

(1) Číslo $\frac{1}{2}|B|$ je kladné. Podle definice limity nalezneme $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \in (B - \frac{1}{2}|B|, B + \frac{1}{2}|B|)$, a tedy $|g(x)| > \frac{1}{2}|B| > 0$,

takže výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ má smysl pro každé $x \in P(c, \eta)$. Pro $x \in P(c, \eta)$ odhadujeme

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| &= \frac{1}{|g(x)||B|} \cdot |f(x)B - g(x)A| \\ &= \frac{1}{|g(x)||B|} \cdot |f(x)B - AB + AB - g(x)A| \\ &\leq \frac{1}{|g(x)||B|} (|B||f(x) - A| + |A||B - g(x)|) \\ &\leq M(|f(x) - A| + |g(x) - B|), \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde $M = \max \left\{ \frac{2}{|B|}, \frac{2|A|}{|B|^2} \right\}$. Zvolme nyní $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky předpokladům věty nalezneme kladná čísla $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta_1): |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad (4.4)$$

$$\forall x \in P(c, \delta_2): |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (4.5)$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom díky (4.3), (4.4) a (4.5) platí

$$\forall x \in P(c, \delta): \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} \right| < \varepsilon.$$

Odtud plyne dokazované tvrzení.

(2) Podle Věty 4.1.24 nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, a kladné $K \in \mathbb{R}$ taková, že

$$x \in P(c, \delta_1): |f(x)| < K. \quad (4.6)$$

Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Ať už předpokládáme $B = \infty$, nebo $B = -\infty$, můžeme v obou případech nalézt $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2): |g(x)| > \frac{K}{\varepsilon}. \quad (4.7)$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ díky (4.6) a (4.7) dostáváme

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \frac{K}{\frac{K}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Odtud plyne $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(3) Podobně jako v bodě (1) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta): g(x) < 2B. \quad (4.8)$$

Zvolme libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1): f(x) > \frac{2B}{\varepsilon}. \quad (4.9)$$

Položme $\delta = \min\{\eta, \delta_1\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta)$ platí

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{2B}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2B} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tím je dokázáno, že $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Zbývající případy (4)–(6) lze dokázat stejným způsobem jako případ (3), pouze je třeba na příslušných místech změnit nerovnosti a znaménka. ■

4.2.2. Bez předpokladu existence pravých stran ve vzorcích Věty 4.2.1 nelze o hodnotě limit na levých stranách nic říci. Necht $a \in \mathbb{R}$. Uvažujme funkce $f(x) = x + a$ a $g(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, ale $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = a$. Podobnou úvahu jsme provedli v 2.3.27. Obdobné příklady je možné zkonstruovat pro limitu součinu i limitu podílu dvou funkcí.

4.2.3. Věta 4.2.1 má i své zřejmé jednostranné varianty.

4.2.4. Věta (spojitost a aritmetické operace). Necht f, g jsou spojité funkce v bodě $c \in \mathbb{R}$. Potom i funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě c . Je-li navíc $g(c) \neq 0$, je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v bodě c .

Důkaz. Tvzení plynou bezprostředně z Věty 4.2.1. ■

4.2.5 (spojitost polynomu a racionální funkce). Necht $b \in \mathbb{R}$. Víme již, že funkce $x \mapsto b$, $x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$, jsou spojité v každém bodě $c \in \mathbb{R}$ (Příklad 4.1.23). Podle předcházející věty jsou tedy funkce $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^4, \dots$ spojité v každém bodě $\mathbb{R}$. Odtud podle téže věty plyne, že polynomy a racionální funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Výraz „ $\frac{A}{0}$ “ není definován, nicméně platí věta.

4.2.6. Věta. Necht $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) > 0$. Potom platí $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Důkaz. Rozlišíme dva případy.

Případ $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $L \in \mathbb{R}$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $f(x) \in (A - \frac{1}{2}A, A + \frac{1}{2}A) = (\frac{1}{2}A, \frac{3}{2}A)$. Dále nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{A}{2(|L|+1)}$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme

$$0 < g(x) < \frac{A}{2(|L|+1)} \quad \text{a} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{\frac{1}{2}A}{\frac{A}{2(|L|+1)}} = |L| + 1 > L.$$

Tím je tvrzení pro $A \in \mathbb{R}$ dokázáno.

Případ $A = \infty$. Zvolme $L \in \mathbb{R}$. Nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $f(x) > 1$. Dále nalezneme $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_2)$ platí $|g(x)| < \frac{1}{|L|+1}$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Pak pro každé $x \in P(c, \delta)$ máme

$$0 < g(x) < \frac{1}{|L|+1} \quad \text{a} \quad \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{\frac{1}{|L|+1}} = |L| + 1 > L.$$

■

4.2.7. Předchozí věta má i svou variantu pro jednostranné limity. Předpokládáme-li, že $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow c+} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = A$ a existuje $\eta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(c, \eta)$ platí $g(x) > 0$, pak $\lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Podobně lze zformulovat i variantu s limitou zleva.

Limita a uspořádání.

4.2.8. Věta (limita a uspořádání). Necht $c \in \mathbb{R}^*$ a funkce f a g mají limity v c .

(a) Necht

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) > g(x).$$

(b) Necht existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \leq g(x).$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Důkaz. (a) Označme $A = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ a $B = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Podle 4.1.4(b) nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A, \varepsilon) \cap B(B, \varepsilon) = \emptyset$. K tomuto ε nalezneme kladná $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1): f(x) \in B(A, \varepsilon),$$

$$\forall x \in P(c, \delta_2): g(x) \in B(B, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Díky volbě ε a nerovnosti $A > B$ platí podle 4.1.4(c) pro každé $x \in P(c, \delta)$ nerovnost $f(x) > g(x)$.

(b) Pro spor předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > \lim_{x \rightarrow c} g(x)$. Potom podle již dokázané části (a) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \eta): f(x) > g(x).$$

Zvolme $y \in P(c, \delta) \cap P(c, \eta)$. Pak ovšem platí $f(y) > g(y) \geq f(y)$, což je spor. ■

4.2.9. Věta (o dvou strážnících). Necht $A \in \mathbb{R}^*$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, a funkce f , g a h splňují

- $\forall x \in P(c, \eta): f(x) \leq h(x) \leq g(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A$.

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow c} h(x)$ a rovná se A .

Důkaz. *Případ* $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro $x \in P(c, \delta_1)$ platí

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \quad \text{a} \quad A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, potom máme

$$A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon,$$

a tedy $h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): h(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon),$$

čili $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = A$.

Příklad $A = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \delta_1)$ platí $\frac{1}{\varepsilon} < f(x)$. Položme $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Je-li $x \in P(c, \delta)$, pak platí

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x),$$

a tedy $h(x) \in B(\infty, \varepsilon)$. Dokázali jsme tedy $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \infty$.

Příklad $A = -\infty$. Důkaz lze provést podobně jako v předchozím případě. ■

4.2.10 (Proč dva strážníci?). Následující obrázek ilustruje myšlenku Věty 4.2.9. Funkce h je „přivedena“ k limitě A pomocí funkce f (dolní strážník) a g (horní strážník) k limitě A .

4.2.11. Příklad. Necht funkce h je definována předpisem

$$h(x) = x \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

Řešení. Definujme pomocné funkce f a g předpisy $f(x) = -|x|$, $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $x \in P(0, 1)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Z Věty 4.2.9 tedy plyne $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$. ♣

4.2.12. Pokud je funkce f v bodě c spojitá a $f(c) > 0$, pak existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in B(c, \delta)$ platí $f(x) > 0$. Toto tvrzení plyne z Věty 4.2.8(a), kde za funkci g volíme konstantní nulovou funkci.

V kapitole o posloupnostech jsme ukázali varianty věty o dvou strážnících pro nevlastní limity (Věta 2.3.31 a 2.3.32). Podobně je tomu i v případě nevlastních limit funkcí. Uveďme formulaci věty pro limitu rovnou ∞ .

4.2.13. Věta. Necht $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $f(x) \leq h(x)$. Potom platí $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \infty$.

4.2.14. Příklad. Ukažte, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x} = \infty$.

Řešení. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\frac{x^2 + \sin x}{x} \geq \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x},$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) = \infty.$$

Podle Věty 4.2.13 pak dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x} = \infty.$$

♣

Při výpočtech limit je často užitečná následující věta, jejíž důkaz lze snadno provést pomocí Věty 4.2.9.

4.2.15. Věta. Necht' $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ a existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že g je omezená na $P(c, \eta)$. Potom $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0$.

Heineova věta a její varianty. Nyní uvedeme větu, která dává do souvislosti limitu funkce s limitou posloupnosti.

4.2.16. Věta (Heine¹). Necht' $c, A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující:
 - $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq c$,
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$
 platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \neq c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta): f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Díky předpokladu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: x_n \in P(c, \delta).$$

Potom

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: x_n \in P(c, \delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: f(x_n) \in B(A, \varepsilon).$$

Tím jsem dokázali, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme nepřímý důkaz, neboli dokážeme $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Předpokládáme tedy negaci (i), tj.

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in P(c, \delta): \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in P(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. Pak máme $x_n \neq c$, $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim x_n = c$. Neplatí tak

¹Heinrich Eduard Heine (1821–1881)

$\lim f(x_n) = A$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoli závěr ve (ii), tj. (ii) neplatí, což jsme měli dokázat. ■

4.2.17 (k důkazu Věty 4.2.16). Výrokovou formu $\neg(f(x) \in B(A, \varepsilon))$ v předchozím důkazu nepřepisujeme jako $f(x) \notin B(A, \varepsilon)$, neboť hodnota $f(x)$ nemusí být definována.

Není těžké zformulovat Heineovu větu pro limitu zleva (respektive zprava). Podobně lze dát do souvislosti spojitost a limitu posloupnosti. Z několika různých variant uvedme následující dvě, přičemž dokážeme pouze druhou.

4.2.18. Věta. Necht $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = A$.
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

4.2.19. Věta. Necht $c \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Funkce f je spojitá v bodě c .
- (ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle (i) nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in B(c, \delta): f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: x_n \in B(c, \delta),$$

a tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: f(x_n) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Platí tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme nepřímý důkaz, neboli dokážeme $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Předpokládáme-li negaci (i), potom máme

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in B(c, \delta): \neg(f(x) \in B(f(c), \varepsilon)).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in B(c, \frac{1}{n})$ takové, že $\neg(f(x_n) \in B(f(c), \varepsilon))$. Pak máme $\neg(f(x_n) \in B(f(c), \varepsilon))$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Neplatí tak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$. Jsou tedy splněny předpoklady ve (ii) ale nikoli závěr ve (ii). ■

Větu 4.2.16 lze často použít k odvození neexistence některých limit.

4.2.20. Příklad. Ukažte, že $\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^{[x]}$ neexistuje. Symbol $[x]$ značí celou část čísla x .

Řešení. Předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^{[x]} = A$ pro nějaké $A \in \mathbb{R}^*$. Vezměme posloupnost $\{x_n\} = \{2n\}$. Potom $(-1)^{[x_n]} = (-1)^{[2n]} = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[x_n]} = 1$. Přitom $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ a $x_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Vezměme dále posloupnost $\{y_n\} = \{2n+1\}$. Potom $(-1)^{[y_n]} = (-1)^{[2n+1]} = -1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[y_n]} = -1$. Přitom $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Podle Heineovy věty musí být $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[x_n]} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[y_n]} = A$. Na druhé straně ovšem $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[x_n]} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{[y_n]}$, a to je spor. Proto limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (-1)^{[x]}$ neexistuje. ♣

4.2.21. Příklad (spojitost k -té odmocniny). Necht $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že funkce definovaná předpisem $x \mapsto \sqrt[k]{x}$, $x \in [0, \infty)$, je spojitá v každém bodě $c \in (0, \infty)$ a je spojitá zprava v bodě 0.

Řešení. Pro $c \in (0, \infty)$ plyne tvrzení z Příkladu 2.2.46 a Věty 4.2.19. V bodě 0 obdržíme výsledek díky Příkladu 2.2.46 a z pravostranné varianty Věty 4.2.18. ♣

Věta o limitě složené funkce. Věta 4.2.1 říká, jak se limita funkce chová vzhledem k algebraickým operacím sčítání, násobení a dělení. Následující věta ozřejmuje vztah limity ke skládání funkcí.

4.2.22. Věta (limita složené funkce). Necht $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$, f, g jsou funkce, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P) $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0 \forall x \in P(x_0, \eta): g(x) \neq y_0$,

(S) f je spojitá v bodě y_0 .

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y). \quad (4.10)$$

Důkaz. Označme $A = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$. Rozlišíme dva případy.

Je splněna podmínka (P). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$, takové, že

$$\forall y \in P(y_0, \psi): f(y) \in B(A, \varepsilon), \quad (4.11)$$

neboť $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$. K ψ nalezneme $\delta' \in \mathbb{R}, \delta' > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(x_0, \delta'): g(x) \in B(y_0, \psi), \quad (4.12)$$

neboť $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$. Díky (P) nalezneme $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(x_0, \eta): g(x) \neq y_0. \quad (4.13)$$

Položme $\delta = \min\{\delta', \eta\}$. Zvolme $x \in P(x_0, \delta)$. Pak podle (4.12) a (4.13) platí $g(x) \in B(y_0, \psi) \setminus \{y_0\}$, neboli $g(x) \in P(y_0, \psi)$. Díky (4.11) dostáváme, že platí $f(g(x)) \in B(A, \varepsilon)$. Tím je (4.10) dokázáno.

Je splněna podmínka (S). Zde platí $y_0 \in \mathbb{R}$ a $A = f(y_0)$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme $\psi \in \mathbb{R}, \psi > 0$, takové, že

$$\forall y \in B(y_0, \psi): f(y) \in B(f(y_0), \varepsilon), \quad (4.14)$$

neboť je splněna podmínka (S) (vizte 4.1.21). K ψ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(x_0, \delta): g(x) \in B(y_0, \psi). \quad (4.15)$$

Zvolme $x \in P(x_0, \delta)$. Pak podle (4.14) a (4.15) platí $f(g(x)) \in B(f(y_0), \varepsilon)$. Tím je (4.10) dokázáno ■

4.2.23. Není-li splněna podmínka (P) ani (S), pak závěr věty nemusí platit. Zvolíme-li $f(y) = |\operatorname{sign} y|$, $y \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ a $y_0 = 0$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = 1$, ale $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = 0 \neq 1$.

4.2.24. Věta. Pokud je funkce g spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c .

Důkaz. Tvrzení plyne z Věty 4.2.22. ■

4.2.25. Příklad. Necht funkce f je spojitá v bodě 0. Dokažte, že platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0).$$

Řešení. Definujme pomocnou funkci g předpisem $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ (Příklad 4.1.12) a $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = f(0)$. Podle Věty 4.2.22 ve verzi s podmínkou (S) pak platí $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0)$. ♣

Věta o limitě složené funkce má také své varianty pro jednostranné limity. Uvedme jednu z nich bez důkazu.

4.2.26. Věta. Necht $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $y_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f a g jsou funkce splňující $\lim_{x \rightarrow x_0-} g(x) = y_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0+} f(y)$ existuje a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(P') $\exists \eta \in \mathbb{R}, \eta > 0 \forall x \in P_-(c, \eta): g(x) > y_0$,

(S') f je spojitá v bodě y_0 zprava.

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow y_0+} f(y).$$

Limita monotónní funkce.

4.2.27. Věta (limita monotónní funkce). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je monotónní funkce na intervalu (a, b) . Potom existují $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, přičemž platí:

(a) je-li f na (a, b) neklesající, pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \sup f((a, b)),$$

(b) je-li f na (a, b) nerostoucí, pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz. (a) Předpokládejme nejprve, že f je neklesající a zdola omezená na (a, b) . Označme $m = \inf f((a, b))$. Potom platí $m \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Díky vlastnostem infima nalezneme $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Podle definice množiny $f((a, b))$ nalezneme $x' \in (a, b)$ splňující $y = f(x')$. Protože však funkce f je neklesající, je

$$\forall x \in (a, x'): f(x) \leq f(x') < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní závora množiny $f((a, b))$, je

$$\forall x \in (a, b): m - \varepsilon < m \leq f(x).$$

Platí tedy

$$\forall x \in (a, x'): m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Nyní nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že $P_+(a, \delta) \subset (a, x')$. Potom platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta): f(x) \in B(m, \varepsilon).$$

Tím jsme dokázali, že platí $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = m$.

Odvození druhé limity v (a), důkaz v případě, kdy f není omezená zdola, a důkaz (b) je možné provést obdobně. ■

4.3. Funkce spojité na intervalu

4.3.1. Definice. Necht $J \subset \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu J** , jestliže platí:

- f je spojitá zprava v každém bodě J , který není pravým koncovým bodem J ,
- f je spojitá zleva v každém bodě J , který není levým koncovým bodem J .

4.3.2. Pokud je interval J v Definici 4.3.1 nedegenerovaný (vizte Definici 1.5.25), pak je funkce f na J spojitá právě tehdy, když je spojitá v každém vnitřním bodě J , spojitá zprava v levém koncovém bodě J , pokud je prvkem J , a spojitá zleva v pravém koncovém bodě J , pokud je prvkem J . Všimněme si, že pokud J obsahuje právě jeden bod, pak je na J každá funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá.

4.3.3. Necht $J \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce f je na J spojitá právě tehdy, když pro každé $c \in J$ platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \forall x \in B(c, \delta) \cap J: f(x) \in B(f(c), \varepsilon). \quad (4.16)$$

⇒ Zvolme $c \in J$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Pak existují $\delta_+, \delta_- \in \mathbb{R}, \delta_+, \delta_- > 0$, taková, že

(a) pokud c není pravý koncový bod J tak, platí

$$\forall x \in B_+(c, \delta_+): f(x) \in B(f(c), \varepsilon), \quad (4.17)$$

(b) pokud c není levý koncový bod J tak, platí

$$\forall x \in B_-(c, \delta_-): f(x) \in B(f(c), \varepsilon). \quad (4.18)$$

Označme $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$. Potom platí

$$B(c, \delta) \cap J \subset B_-(c, \delta_-) \cup B_+(c, \delta_+).$$

Odtud plyne (4.16).

⇐ Předpokládejme, že bod $c \in J$ není pravým koncovým bodem J . Pak existuje $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, takové, že $B_+(c, \delta_0) \subset J$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta \in (0, \delta_0)$ takové, že

$$\forall x \in B(c, \delta) \cap J: f(x) \in B(f(c), \varepsilon).$$

Poněvadž $B_+(c, \delta) \subset B(c, \delta) \cap J$, platí také

$$\forall x \in B(c, \delta): f(x) \in B(f(c), \varepsilon),$$

a tedy f je spojitá zprava v bodě c . Spojitost zleva v bodě c , pokud c není levý koncový, lze dokázat obdobně. Odtud pak plyne spojitost f na intervalu J .

Spojitost funkce na intervalu lze charakterizovat pomocí konvergence posloupností, jak ukazuje následující varianta Heineovy věty.

4.3.4. Věta. Necht $J \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Funkce f je spojitá na J .
- (ii) Pro každé $c \in J$ a každou posloupnost $\{x_n\}$ bodů J splňující $\lim x_n = c$ platí $\lim f(x_n) = f(c)$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Uvažujme $c \in J$ a posloupnost $\{x_n\}$ bodů J splňující $\lim x_n = c \in J$. Pokud je bod c vnitřním bodem intervalu J , potom podle Heineovy věty (Věta 4.2.19) platí $\lim f(x_n) = f(c)$. Pokud je bod c krajním bodem intervalu J , pak $\lim f(x_n) = f(c)$ platí podle příslušné jednostranné varianty Heineovy věty.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Spojitost ve vnitřních bodech J plyne opět z Heineovy věty. Spojitost v krajních bodech, pokud jsou tyto prvkem J , plyne z jednostranných variant Heineovy věty. ■

4.3.5. Věta. Necht I, J jsou intervaly v $\mathbb{R}$ a $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě funkce. Pak $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce.

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{x_n\}$ bodů v I konvergující k bodu $c \in I$. Dle Věty 4.3.4 platí $\lim f(x_n) = f(c)$. Opětovným použitím tohoto tvrzení, tentokrát pro funkci g , dostaneme, že $\lim g(f(x_n)) = g(f(c))$, neboli $\lim (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(c)$, a tedy $g \circ f$ je spojitá na I opět dle Věty 4.3.4. ■

4.3.6. Věta (Bolzano). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Pak ke každému $C \in (f(a), f(b))$ existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že platí $f(\xi) = C$.

Důkaz. Zvolme $C \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b]; f(z) < C\}$. Množina M je neprázdná, neboť platí $a \in M$. Množina M je také shora omezená, protože číslo b je horní závora M . Položme $\xi = \sup M$. Zřejmě platí $\xi \in [a, b]$. Ukážeme, že $f(\xi) = C$ vyloučením možností $f(\xi) > C$ a $f(\xi) < C$.

Předpokládejme, že $f(\xi) > C$. Pak $\xi > a$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi - \delta, \xi)$ platí $f(x) > C$. To znamená, že $M \subset [a, \xi - \delta]$, což je spor s definicí ξ .

Předpokládejme, že $f(\xi) < C$. Pak $\xi < b$ a lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi, \xi + \delta)$ platí $f(x) < C$. To znamená, že $(\xi, \xi + \delta) \subset M$, což je opět spor. ■

4.3.7. Věta platí obdobně v případě, kdy $f(a) > f(b)$. Povšimněme si, že z předpokladů věty neplyne nic o tom, kolik je takových bodů $\xi \in (a, b)$, pro které platí $f(\xi) = C$. Bolzanova věta pouze tvrdí, že takový bod existuje alespoň jeden.

4.3.8. Věta. Necht J je interval a funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na J . Potom je $f(J)$ interval.

Důkaz. Předpokládejme, že $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$, $y_1 < z < y_2$. Pak nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Podle Věty 4.3.6 a 4.3.7 f nabývá v jistém bodě hodnoty z , takže $z \in f(J)$. Tím jsme ověřili podmínku (1.13) v Lemmatu 1.5.27, kde za M bereme $f(J)$. Podle Lemmatu 1.5.27 je tedy $f(J)$ interval. ■

4.3.9. Definice. Necht $M \subset \mathbb{R}$, $x \in M$ a funkce f je definována alespoň na M , tj. $M \subset \mathcal{D}(f)$.

(a) Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima (minima) na M** , jestliže platí

$$\forall y \in M: f(y) \leq f(x) \quad (\forall y \in M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima (minima)** funkce f na množině M .

(b) Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima (lokálního minima) vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x, \delta) \cap M: f(y) \leq f(x) \quad (\forall y \in B(x, \delta) \cap M: f(y) \geq f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem lokálního maxima (lokálního minima)** funkce f na množině M .

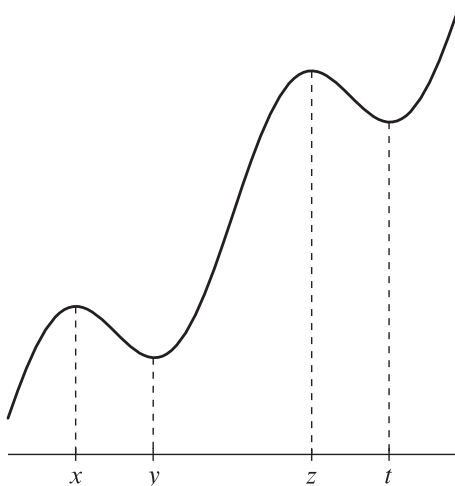
(c) Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima (ostrého lokálního minima) vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in P(x, \delta) \cap M: f(y) < f(x) \quad (\forall y \in P(x, \delta) \cap M: f(y) > f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima (ostrého lokálního minima)** funkce f na množině M .

(d) Symboly $\max_M f$ a $\min_M f$ označují po řadě maximum a minimum množiny $f(M)$, pokud tyto hodnoty existují.

(e) Bodem **extrému** budeme rozumět bod maxima či minima. Bodem **lokálního extrému** budeme rozumět bod lokálního maxima či lokálního minima.



OBRÁZEK 7.

Na obrázku jsou x a z body lokálního maxima funkce f a v bodech y a t má funkce f lokální minima.

4.3.10. Budeme-li hovořit o lokálním extrému reálné funkce bez udání množiny, budeme mít na mysli lokální extrém vzhledem k nějakému okolí.

4.3.11. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom má f bod maxima i bod minima na $[a, b]$.

Důkaz. Bod maxima. Označme $G = \sup f([a, b])$. Podle Věty 2.3.36 nalezneme posloupnost $\{y_n\}$ prvků množiny $f([a, b])$ takovou, že $\lim y_n = G$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) = y_n$. Podle Věty 2.4.7 vybereme z posloupnosti $\{x_n\}$ konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$ s limitou x^* . Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq x_n \leq b_n$, podle Věty 2.2.42(b) leží bod x^* v intervalu $[a, b]$. Protože f je spojitá v x^* , podle Věty 4.2.19 platí $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$, je posloupnost $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle Věty 2.2.30 platí

$$f(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = G.$$

Je tedy $f(x^*) = G$ a x^* je bodem maxima funkce f na intervalu $[a, b]$.

Bod minima. Pro důkaz existence bodu minima definujme funkci $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = -f(x)$. Funkce g je na $[a, b]$ spojitá, musí tedy na $[a, b]$ nabývat svého maxima podle již dokázané části věty. Necht tomu tak je v bodě $x_* \in [a, b]$. Pak pro každé $x \in [a, b]$ platí $g(x) \leq g(x_*)$. To znamená, že $f(x) \geq f(x_*)$ pro každé $x \in [a, b]$, a f nabývá svého minima na $[a, b]$ v bodě x_* . Tím je věta dokázána. ■

4.3.12. Důsledek. Necht f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ omezená.

Důkaz. Podle Věty 4.3.11 nalezneme bod maxima x^* a bod minima x_* funkce f na intervalu $[a, b]$. Platí tedy $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ pro každé $x \in [a, b]$, takže množina $f([a, b])$ je omezená, což znamená, že funkce f je omezená. ■

4.3.13. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$, nenabývá na intervalu $(0, 1)$ extrémů. Stejně tak funkce $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \{0, 1\}, \\ x & \text{pro } x \in (0, 1) \end{cases}$$

nemá na $[0, 1]$ extrém. Tyto dva příklady ukazují, že ani předpoklad uzavřenosti intervalu ani spojitosti funkce nelze ve Větě 4.3.11 vynechat.

4.3.14. Hledání extrémů funkce patří k důležitým úlohám. Věta 4.3.11 sice nedává návod jak bod extrému hledat, ale dává nám velmi cennou informaci o tom, že při splnění předpokladů věty existují alespoň jeden bod maxima a alespoň jeden bod minima. V Kapitole 5 se naučíme jak vytipovat body, které jsou podezřelé z toho, že by v nich funkce mohla nabývat extrému. Pokud víme, že naše funkce nabývá maxima (respektive minima) na uvažované množině, pak bodem maxima (respektive minima) bude ten z vytipovaných podezřelých bodů, v němž funkce nabývá největší (respektive nejmenší) hodnoty.

Spojitosť inverzní funkce. Spojitá funkce na intervalu J zobrazuje tento interval na interval $f(J)$ (Věta 4.3.8). Pokud je f na J rostoucí (nebo klesající), je f prosté zobrazení J na $f(J)$ a existuje inverzní zobrazení $f^{-1}: f(J) \rightarrow J$ (vizte 1.4.31). Toto zobrazení je funkce, budeme proto o f^{-1} hovořit jako o **inverzní funkci**. Následující věta tvrdí, že jak druh monotonie tak i spojitost zdědí inverzní funkce od funkce výchozí.

4.3.15. Věta. Necht f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J . Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je spojitá a rostoucí, jinak bychom uvažovali $-f$. Potom podle Věty 4.3.8 je funkce f^{-1} definována na intervalu $f(J)$ a je rostoucí, což je snadné si uvědomit. Dokážeme spojitost f^{-1} na $f(J)$. Necht $y_0 \in f(J)$ není pravý krajní bod intervalu $f(J)$. Dokážeme spojitost f^{-1} v bodě y_0 zprava. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Bod x_0 není pravým krajním bodem J , neboť f je rostoucí na J . Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a $x_1 \in J \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Položme $\delta = f(x_1) - y_0$. Odtud potom $[y_0, y_0 + \delta] \subset f(J)$, a tedy

$$f^{-1}(B_+(y_0, \delta)) = f^{-1}([y_0, y_0 + \delta]) = [x_0, x_1] \subset B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon).$$

Obdobně bychom dokázali spojitost zleva funkce f^{-1} v bodech $f(J)$, které nejsou levým krajním bodem $f(J)$. Odtud plyne spojitost f^{-1} na $f(J)$. ■

4.4. Teoretické příklady k limitě funkce

4.4.1. Příklad. Necht f, g jsou reálné funkce spojité v bodě $c \in \mathbb{R}$. Ukažte, že funkce $|f|$, $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ definované po řadě předpisy

$$\begin{aligned} |f|(x) &= |f(x)|, & x \in \mathcal{D}(f), \\ \max\{f, g\}(x) &= \max\{f(x), g(x)\}, & x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), \\ \min\{f, g\}(x) &= \min\{f(x), g(x)\}, & x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), \end{aligned}$$

jsou spojité v c .

Řešení. Absolutní hodnota. Díky Důsledku 1.5.12(a) platí pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ nerovnost

$$0 \leq ||f(x)| - |f(c)|| \leq |f(x) - f(c)|. \quad (4.19)$$

Podle předpokladu platí $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) = 0$, a tedy také podle Věty 4.1.19 platí $\lim_{x \rightarrow c} |f(x) - f(c)| = 0$. Odtud a z (4.19) platí díky Větě 4.2.9 $\lim_{x \rightarrow c} ||f(x)| - |f(c)|| = 0$, neboli $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |f(c)|$. Funkce $|f|$ je tedy spojitá v c .

Maximum a minimum. Pro každé $x \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$ platí

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2},$$

z čehož použitím již dokázaného tvrzení o absolutní hodnotě plynou požadovaná tvrzení. ♣

4.4.2. Příklad (varianta Heineovy věty). Necht $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Dokažte, že pak jsou výroky (i) a (ii) ekvivalentní.

- (i) Platí $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = A$.
- (ii) Pro každou rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je rostoucí posloupnost, pro kterou platí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Odtud plyne, že $x_n < c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Heineovy věty 4.2.18 pak dostáváme $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme tedy, že neplatí (i), neboli

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \exists x \in P_-(c, \delta): \neg(f(x) \in B(A, \varepsilon)). \quad (4.20)$$

Zkonstruujeme posloupnost $\{x_n\}$ následujícím způsobem. Dle (4.20) nalezneme $x_1 \in P_-(c, 1)$ takové, že $\neg(f(x_1) \in B(A, \varepsilon))$. Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme nalezeny body $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $x_i \in P_-(c, \frac{1}{i})$ a $\neg(f(x_i) \in B(A, \varepsilon))$. Zvolíme $\delta_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$

takové, že $x_n \notin P_-(c, \delta_{n+1})$. Podle (4.20) nalezneme $x_{n+1} \in P_-(c, \delta_{n+1})$ splňující $\neg(f(x_{n+1}) \in B(A, \varepsilon))$. Zřejmě pak platí $x_n < x_{n+1}$ a $x_{n+1} \in P_-(c, \frac{1}{n+1})$. Tím je konstrukce ukončena.

Našli jsme tak rostoucí posloupnost $\{x_n\}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \in P_-(c, \frac{1}{n})$. Neplatí však $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\neg(f(x_n) \in B(A, \varepsilon))$. Tím je důkaz proveden. ♣

4.4.3. Příklad. Necht φ je rostoucí spojitá funkce na $[1, \infty)$ splňující $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ a f je nekonečnou periodická funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f \circ \varphi(x)$ neexistuje.

Řešení. Podle Věty 4.3.8 je $\varphi([1, \infty))$ interval. Tento interval není shora omezený, protože $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$. Funkce φ je rostoucí na $[1, \infty)$, a proto $\varphi([1, \infty)) = [\varphi(1), \infty)$. Inverzní funkce φ^{-1} je tedy rostoucí funkce definovaná na $[\varphi(1), \infty)$ a její obor hodnot je roven $[1, \infty)$. Podle Věty 4.2.27 platí

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(y) = \sup \varphi^{-1}([\varphi(1), \infty)) = \sup[1, \infty) = \infty.$$

Necht $p > 0$ je perioda funkce f . Funkce f je nekonečnou, a proto můžeme nalézt body $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ splňující $f(x^*) \neq f(y^*)$. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x^* + kp, y^* + kp \in [\varphi(1), \infty)$. Definujme $x_n = \varphi^{-1}(x^* + (k+n)p)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^* + (k+n)p) = \infty$ a podle Heineovy věty (Věta 4.2.16) platí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Dále máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ \varphi)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^* + (k+n)p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^*) = f(x^*).$$

Podobně definujme $y_n = \varphi^{-1}(y^* + (k+n)p)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak stejně jako v předchozím případě platí $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ a také $\lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ \varphi)(y_n) = f(y^*)$. Poněvadž $f(x^*) \neq f(y^*)$, dostáváme podle Věty 4.2.16, že limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f \circ \varphi(x)$ neexistuje. ♣

Body nespojitosti.

4.4.4. Příklad. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Dokažte, že množina

$$D = \{x \in \mathbb{R}; f \text{ není spojitá v bodě } x\}$$

je spočetná.

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je neklesající. Funkce f má tedy v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ limitu zleva i zprava dle Věty 4.2.27. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ označme $a_x = \lim_{z \rightarrow x-} f(z)$ a $b_x = \lim_{z \rightarrow x+} f(z)$. Zřejmě pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $a_x \leq f(x) \leq b_x$. Dostáváme tak, že $D = \{x \in \mathbb{R}; a_x < b_x\}$. Máme-li $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, pak pro $w \in (x, y)$ platí $b_x \leq f(w) \leq a_y$, a tedy $b_x \leq a_y$. Systém otevřených intervalů $\mathcal{S} = \{(a_x, b_x); x \in D\}$ je tedy disjunktní, a proto je podle Příkladu 1.6.25 spočetný. Pro každý interval $I \in \mathcal{S}$ existuje právě jedno $x \in D$ splňující $I = (a_x, b_x)$. Zobrazení $\varphi: D \rightarrow \mathcal{S}$ definované předpisem $\varphi(x) = (a_x, b_x)$, $x \in D$, je tedy prosté. Množina D je pak spočetná díky Lemmatu 1.6.8. ♣

4.4.5. Příklad. Necht $D \subset \mathbb{R}$ je spočetná množina. Nalezněte neklesající funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že její množina bodů nespojitosti je právě D .

Řešení. Pokud je množina D konečná, pak je řešení snadné. Předpokládejme tedy, že D je nekonečná. Množina D je podle předpokladu spočetná, a proto existuje prostá posloupnost $\{x_n\}$ splňující $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $f_n = \chi_{[x_n, \infty)}$ (vizte 1.4.25), neboli

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_n, \\ 1 & \text{pro } x \geq x_n. \end{cases}$$

Definujme $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je řada (4.21) absolutně konvergentní, a proto je f definovaná na $\mathbb{R}$. Funkce f je neklesající, neboť všechny funkce f_n jsou neklesající.

Spojitosť f v bodech $\mathbb{R} \setminus D$. Necht $x \in \mathbb{R} \setminus D$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Funkce $f_1, \dots, f_{n_0}$ jsou spojité v x , a proto můžeme nalézt $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že pro každé $n \in \{1, \dots, n_0\}$ a každé $y \in B(x, \delta)$ platí $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n > n_0$, a každé $y \in \mathbb{R}$ platí podle definice f_n nerovnost $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 1$. Pak pro každé $y \in B(x, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \varepsilon + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 1 \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v x .

Nespojitost f v bodech D . Necht $x \in D$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $x = x_m$. Definujme funkci g předpisem

$$g = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} f_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n.$$

Funkce g je definována na $\mathbb{R}$ a je neklesající na $\mathbb{R}$. Má tedy jednostranné limity ve všech bodech $\mathbb{R}$ a pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \rightarrow y-} g(x) \leq g(y)$. Dále platí $f = g + \frac{1}{2^m} f_m$ a $\lim_{x \rightarrow x_m-} f_m(x) = 0$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_m-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_m-} \left(g(x) + \frac{1}{2^m} f_m(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_m-} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_m-} \frac{1}{2^m} f_m(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_m-} g(x) + 0 < g(x_m) + \frac{1}{2^m} = g(x_m) + \frac{1}{2^m} f_m(x_m) = f(x_m). \end{aligned}$$

Tedy f není spojitá v x_m , neboť $\lim_{x \rightarrow x_m-} f(x) < f(x_m)$. ♣

4.4.6 (klasifikace bodů nespojitosti). Necht f je reálná funkce definovaná na jistém okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Jestliže f není spojitá v c a existuje její vlastní limita v c , potom říkáme, že f má v c **odstranitelnou nespojitost**. Změníme-li totiž hodnotu funkce f v bodě c z $f(c)$ na $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$, bude nová funkce spojitá v bodě c .

Neexistuje-li vlastní limita f v bodě c , pak říkáme, že bod c je bodem **neodstranitelné nespojitosti** funkce f . Body neodstranitelné nespojitosti dále rozlišujeme následujícím způsobem. Existují-li (různé) jednostranné limity v bodě c , pak říkáme, že c je bodem **nespojitosti prvního druhu**. Jestliže alespoň jedna z jednostranných limit neexistuje, pak říkáme, že c je bodem **nespojitosti druhého druhu**.

4.4.7. Příklad. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dokažte, že platí:

- (a) Množina $\{x \in \mathbb{R}; f \text{ má v } x \text{ odstranitelnou nespojitost}\}$ je spočetná.
- (b) Množina $\{x \in \mathbb{R}; f \text{ má v } x \text{ neodstranitelnou nespojitost 1. druhu}\}$ je spočetná.

Řešení. (a) Stačí dokázat, že množiny

$$O = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x} f(y) \text{ existuje a } \lim_{y \rightarrow x} f(y) < f(x)\}$$

a

$$P = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x} f(y) \text{ existuje a } \lim_{y \rightarrow x} f(y) > f(x)\}$$

jsou spočetné. Provedeme důkaz pouze pro množinu O , protože pro množinu P je důkaz obdobný. Pro každé $x \in O$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) < r_x < f(x).$$

Pak platí $O = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} O_r$, kde $O_r = \{x \in O; r_x = r\}$, je sjednocením spočetné mnoha množin, a tedy stačí dokázat, že každá množina $O_r, r \in \mathbb{Q}$, je spočetná.

Zvolme $r \in \mathbb{Q}$. Pro každé $x \in O_r$ nalezneme $\delta_x > 0$ splňující

$$\forall z \in P(x, \delta_x): f(z) < r.$$

Dokážeme, že systém intervalů

$$\mathcal{J} = \{(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x); x \in O_r\}$$

je disjunktní. Pro spor předpokládejme, že pro $x, y \in O_r, x \neq y$, platí

$$(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x) \cap (y - \frac{1}{2}\delta_y, y + \frac{1}{2}\delta_y) \neq \emptyset.$$

Potom platí $|x - y| < \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y$. Nyní rozlišíme dva případy. Pokud $\delta_x \leq \delta_y$, pak $|x - y| < \delta_y$, a tedy $f(x) < r$ díky volbě δ_y a zároveň $f(x) > r_x = r$, což je spor. Pokud $\delta_x > \delta_y$, pak lze spor odvodit obdobně. Systém $\mathcal{J}$ je tedy spočetný dle Příkladu 1.6.25, a proto je i množina O_r spočetná.

(b) Stačí dokázat, že množiny

$$N = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x-} f(y) < \lim_{y \rightarrow x+} f(y)\},$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}; \lim_{y \rightarrow x-} f(y) > \lim_{y \rightarrow x+} f(y)\}$$

jsou spočetné. Důkaz provedeme pouze pro množinu N . Důkaz pro M je obdobný. Pro každé $x \in N$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ splňující

$$\lim_{y \rightarrow x-} f(y) < r_x < \lim_{y \rightarrow x+} f(y)$$

a zapíšeme N jako $N = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} N_r$, kde $N_r = \{x \in N; r_x = r\}$, $r \in \mathbb{Q}$. Dokážeme, že každá z množin N_r , $r \in \mathbb{Q}$, je spočetná.

Nechť $r \in \mathbb{Q}$. Pro každé $x \in N_r$ nalezneme $\delta_x > 0$ takové, že

$$\forall z \in P_-(x, \delta_x): f(z) < r,$$

$$\forall z \in P_+(x, \delta_x): f(z) > r.$$

Máme-li nyní dva body $x, y \in N_r$, $x < y$, pak zjevně

$$(x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y) = \emptyset.$$

Tedy i

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y + \delta_y) = \emptyset.$$

Opět je tedy systém $\{(x - \delta_x, x + \delta_x); x \in N_r\}$ disjunktní, a proto spočetný. Tedy i množina N_r je spočetná. Odtud plyne spočetnost N . ♣

4.4.8. Příklad. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Potom je množina

$$E = \{x \in \mathbb{R}; f \text{ má v bodě } x \text{ ostrý lokální extrém}\}$$

spočetná.

Řešení. Zřejmě stačí ukázat, že množina

$$M = \{x \in \mathbb{R}; f \text{ má v } x \text{ ostré lokální maximum}\}$$

je spočetná. K tomuto účelu nalezneme pro každé $x \in M$ kladné číslo δ_x takové, že

$$\forall y \in P(x, \delta_x): f(y) < f(x).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $M_n = \{x \in M; \delta_x > \frac{1}{n}\}$. Předpokládejme, že $x, y \in M_n$, $x \neq y$, a platí

$$z \in (x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}) \cap (y - \frac{1}{2n}, y + \frac{1}{2n}). \quad (4.22)$$

Pak máme

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

což znamená, že $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ a $x \in (y - \delta_y, y + \delta_y)$. Díky volbě δ_x a δ_y pak platí $f(y) < f(x)$ a $f(x) < f(y)$, což je spor. Systém intervalů

$$\{(x - \frac{1}{2n}, x + \frac{1}{2n}); x \in M_n\}$$

je proto disjunktní, a tedy spočetný dle Příkladu 1.6.25. Odtud plyne, že množina M_n je spočetná. Tedy i množina $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je spočetná podle Věty 1.6.21(b). ♣

Podivné funkce.

4.4.9. Příklad. Sestrojte funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že pro každý nedegenerovaný interval $I \subset \mathbb{R}$ platí $f(I) = \mathbb{R}$.

Řešení. Při řešení úlohy využijeme výsledek i značení z Příkladu 3.8.9. Podle uvedeného příkladu pro každé $x \in [0, 1)$ nalezneme jednoznačně určenou posloupnost $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{I}(10)$ splňující

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{10^n}.$$

Označme D množinu všech posloupností $\{a_n\} \in \mathcal{I}(10)$, pro které existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že platí:

$$\begin{aligned} a_{2m} &= 9, \\ \forall j \in \mathbb{N}, j > m: a_{2j} &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Definice pomocné funkce g . Nejprve zkonstruujeme funkci $g: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ splňující $g(I \cap [0, 1)) = [0, 1)$ pro každý otevřený nedegenerovaný interval I , který má neprázdný průnik s intervalem $[0, 1)$. Definujme g předpisem

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \{a_n(x)\} \in \mathcal{I}(10) \setminus D, \\ \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{a_{2j-1}(x)}{10^{j-m}}, & \text{pokud } \{a_n(x)\} \in D \text{ a } m \in \mathbb{N} \text{ splňuje (4.23) pro } \{a_n(x)\}. \end{cases}$$

Funkce g je dobře definovaná, protože pokud $\{a_n\} \in D$, pak je číslo $m \in \mathbb{N}$, pro které je splněno (4.23), určeno jednoznačně.

Nechť I je nedegenerovaný otevřený interval takový, že $I \cap [0, 1) \neq \emptyset$. Nalezneme $x, y \in I \cap [0, 1)$, $x < y$. Dále nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x + \frac{2}{10^k} < y$ a $a_k(x) \neq 9$. Položme

$$z = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n(x)}{10^n} + \frac{a_k(x) + 1}{10^k}.$$

Pak platí

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{10^n} < \sum_{n=1}^k \frac{a_n(x)}{10^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{n=1}^k \frac{a_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^k} = z, \\ z &= \sum_{n=1}^k \frac{a_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{10^n} + \frac{1}{10^k} = x + \frac{1}{10^k}. \end{aligned}$$

Platí tedy $x < z \leq x + \frac{1}{10^k}$.

Pozorování. Nechť posloupnost $\{c_n\} \in \mathcal{I}(10)$ splňuje $c_j = a_j(z)$ pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$. Potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} \in (x, y).$$

Máme totiž

$$x < z \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} < \sum_{n=1}^k \frac{a_n(z)}{10^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = z + \frac{1}{10^k} \leq x + \frac{2}{10^k} < y.$$

Tím je pozorování ověřeno.

Rovnost $g(I \cap [0, 1)) = [0, 1)$. Zřejmě $g(I \cap [0, 1)) \subset [0, 1)$. Dokážeme opačnou inkluzi. Zvolme $\alpha \in [0, 1)$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2m > k$. Definujme posloupnost $\{w_n\}$ následovně.

$$w_n = \begin{cases} a_j(z) & \text{pro } j \leq k, \\ 9 & \text{pro } k < j \leq 2m, \\ a_{\frac{j+1}{2}-m}(\alpha) & \text{pro } j > 2m \text{ liché,} \\ 0 & \text{pro } j > 2m \text{ sudé.} \end{cases}$$

Neformálně zapsána vypadá posloupnost $\{w_n\}$ takto

$$a_1(z) \quad \dots \quad a_k(z) \quad 9 \quad \dots \quad 9 \quad a_1(\alpha) \quad 0 \quad a_2(\alpha) \quad 0 \quad \dots$$

Platí, že $\{w_n\} \in \mathcal{I}(10)$. Reálné číslo $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{10^n}$ splňuje $t \in (x, y)$ podle výše uvedeného pozorování a podle definice funkce g platí $g(t) = \alpha$. Máme tedy $g(I \cap [0, 1)) = [0, 1)$.

Konstrukce hledané funkce f . Definujme $h: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ \operatorname{tg}(\pi x - \frac{\pi}{2}) & \text{pro } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Je snadné ověřit, že platí $h([0, 1)) = h((0, 1)) = \mathbb{R}$. Definujme

$$f(x) = h \circ g(x - [x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je-li I nedegenerovaný interval, nalezneme otevřený nedegenerovaný interval $(a, b) \subset I$. Pak nalezneme $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $(a, b) \cap [n, n+1) \neq \emptyset$. Potom platí

$$f((a, b) \cap [n, n+1)) = h(g((a-n, b-n) \cap [0, 1))) = h([0, 1)) = \mathbb{R}.$$

♣

4.4.10. Příklad. Dirichletova funkce $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dokažte, že každý bod $z \in \mathbb{R}$ je bodem neodstranitelné nespojitosti 2. druhu funkce D .

Řešení. Necht $a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\delta > 0$. Podle Věty 1.5.32 nalezneme $u, q \in (a, a+\delta) \cap \mathbb{Q}$, $u < q$. Položme $v = u + \frac{1}{\sqrt{2}}(q - u)$. Potom platí

$$u < v < u + (q - u) = q,$$

a tedy $v \in (a, a + \delta)$. Kdyby bylo číslo v racionální, pak by bylo racionální i číslo $\sqrt{2}$, což není pravda (vizte Příklad 1.2.17). Číslo v je tedy iracionální. Máme tedy $u, v \in P^+(a, \delta)$ splňující $D(u) = 1$ a $D(v) = 0$. Odtud plyne, že $\lim_{x \rightarrow a+} D(x)$ neexistuje. Obdobně lze ukázat, že $\lim_{x \rightarrow a-} D(x)$ neexistuje. Tím je důkaz proveden. ♣

4.4.11. Příklad. Riemannova funkce, někdy nazývaná také jako **Thomacova**² funkce, $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \text{ kde } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ a } p, q \text{ jsou nesoudělná,} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dokažte, že funkce R je spojitá právě v bodech množiny $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Řešení. Spojitost v bodech $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Necht' $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $q_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$. Díky iracionalitě a a vlastnostem celé části pro každé $q \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{[qa]}{q} < a < \frac{[qa] + 1}{q}. \quad (4.24)$$

Označme

$$d_q = \min \left\{ a - \frac{[qa]}{q}, \frac{[qa] + 1}{q} - a \right\}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Podle (4.24) je $d_q > 0$ pro každé $q \in \mathbb{N}$ a interval $(a - d_q, a + d_q)$ neobsahuje žádné číslo tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$. Definujme dále

$$\delta = \min\{d_q; q \in \mathbb{N}, q \leq q_0\}.$$

Číslo δ je definováno jako minimum z konečné množiny kladných čísel, a proto je také kladné. Množina $B(a, \delta)$ tedy neobsahuje žádné číslo tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}, q \leq q_0$. Pro každé $x \in B(a, \delta)$ tedy máme $0 \leq R(x) < \frac{1}{q_0} < \varepsilon$. Poněvadž $R(a) = 0$, je tím spojitost R v bodě a ověřena.

Nespojitost v bodech $\mathbb{Q}$. Necht' $a \in \mathbb{Q}$. Potom $R(a) > 0$. Nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $R(a) - \varepsilon > 0$. Zvolme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Nalezneme iracionální číslo $x \in B(a, \delta)$, vizte řešení Příkladu 4.4.10. Potom platí $R(x) = 0 < R(a) - \varepsilon$, a tedy $R(x) \notin B(R(a), \varepsilon)$. Tím jsme ověřili, že funkce R není spojitá v bodě a . ♣

4.4.12. Příklad. Nalezněte spojitou funkci na $\mathbb{R}$, která není na žádném nedege-nerovaném intervalu v $\mathbb{R}$ monotónní.

Řešení. Necht' $\varphi(x) = |x|$ pro $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a je dodefinována na $\mathbb{R}$ periodicky s periodou 1. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$f_n(x) = 4^{-n} \varphi(4^n x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

²Carl Johannes Thomac (1840–1921)

Funkce f_n je potom 4^{-n} -periodická a spojitá na $\mathbb{R}$ a nabývá maximální hodnoty $\frac{1}{2}4^{-n}$. Hledanou funkci definujeme předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

Korektnost definice f . Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2}4^{-n}$, a tedy řada v (4.25) konverguje podle srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2), neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}4^{-n}$ konverguje.

Spojitosť f . Necht $a \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $4^{-m} < \varepsilon$. Dále nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \forall x \in B(a, \delta): |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Pak pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(a)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} (|f_i(x)| + |f_i(a)|) \\ &\leq m \cdot \frac{\varepsilon}{m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2}4^{-i} = \varepsilon + \frac{1}{3} \cdot 4^{-m} < \frac{4}{3}\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Tedy f je spojitá v a .

Pozorování 1. Platí

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall x, y \in \mathbb{R}: |f_i(x) - f_i(y)| \leq |x - y|.$$

Zvolme $i \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}$. Funkce f_i je 4^{-i} -periodická, a proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x, y \in [-\frac{1}{2}4^{-i}, \frac{1}{2}4^{-i}]$. Potom platí $4^i x, 4^i y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a díky Důsledku 1.5.12(a) dostáváme

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f_i(y)| &= |4^{-i}\varphi(4^i x) - 4^{-i}\varphi(4^i y)| = |4^{-i}(|4^i x| - |4^i y|)| \\ &= ||x| - |y|| \leq |x - y|. \end{aligned}$$

Pozorování 2. Necht $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a = k4^{-n}$ a $h \in [0, \frac{1}{2}4^{-n}]$. Pak platí $f_n(a + h) = f_n(a - h) = h$.

Platí $4^n h \in [0, \frac{1}{2}]$, $4^n a = k \in \mathbb{Z}$ a φ je 1-periodická. Proto máme

$$f_n(a + h) = 4^{-n}\varphi(4^n a + 4^n h) = 4^{-n}\varphi(4^n h) = 4^{-n} \cdot 4^n h = h.$$

Obdobně obdržíme $f_n(a - h) = h$.

Pozorování 3. Necht $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, a = k4^{-m}$ a $h = \frac{1}{2}4^{-2m}$. Pak $f(a + h) > f(a)$ a $f(a - h) > f(a)$.

Pro $n > 2m$ platí $k4^{n-m} \in \mathbb{Z}$ a $k4^{n-m} + \frac{1}{2}4^{n-2m} \in \mathbb{Z}$. Díky Pozorování 2 tedy pro každé $n > 2m$ platí

$$f_n(a) = f_n(k4^{-m}) = f_n(k4^{n-m}4^{-n}) = 0$$

a

$$f_n(a+h) = f_n(k4^{-m} + \frac{1}{2}4^{-2m}) = f_n((k4^{n-m} + \frac{1}{2}4^{n-2m}) \cdot 4^{-n}) = 0,$$

Podle Pozorování 2 obdržíme pro každé $n \in \{m, \dots, 2m\}$ rovnost $f_n(a+h) = h$. Díky Pozorování 1 a 2 máme

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sum_{i=1}^{m-1} (f_i(a+h) - f_i(a)) + \sum_{i=m}^{2m} (f_i(a+h) - f_i(a)) \\ &\geq -(m-1)h + (m+1)h = 2h > 0. \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme, že $f(a-h) - f(a) \geq h > 0$.

Nikde monotónnost f . Necht I je nede degenerovaný interval. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{Z}$ taková, že $[(k-1)4^{-m}, (k+1)4^{-m}] \subset I$. Položme $a = k4^{-m}$ a $h = \frac{1}{2}4^{-2m}$. Pak máme $a-h, a, a+h \in I$ a z Pozorování 3 dostáváme $f(a-h) > f(a)$ a $f(a+h) > f(a)$. Funkce f proto není monotónní na I . ♣

4.4.13. Příklad. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je nekonstantní periodická funkce. Označme

$$P = \{T > 0; T \text{ je perioda } f\}.$$

- (a) Ukažte, že pokud je f spojitá, potom existuje minimum množiny P , tzv. *fundamentální perioda*.
- (b) Ukažte, že minimum množiny P nemusí existovat.

Řešení. (a) Označme $T = \inf P$. Nejprve ukážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = f(x+T)$. Nalezneme posloupnost $\{T_n\}$ prvků množiny P splňující $\lim T_n = T$. Potom platí

$$f(x+T) = \lim f(x+T_n) = \lim f(x) = f(x).$$

První rovnost plyne pomocí Heineovy věty (Věta 4.2.19) ze spojitosti funkce f , druhá rovnost plyne z faktu, že f je T_n -periodická funkce pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Zbývá ukázat, že $T > 0$. Pro spor předpokládejme, že $T = 0$. Nalezneme posloupnost $\{T_n\}$ prvků množiny P splňující $\lim T_n = 0$. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Díky spojitosti f nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall y \in (x-\delta, x+\delta): |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $T_{n_0} < \delta$. Pak nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $kT_{n_0} \in (x-\delta, x+\delta)$. Tedy

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - f(kT_{n_0})| < \varepsilon.$$

Protože ε bylo libovolné, platí $f(0) = f(x)$. Tedy f je konstantní, což je spor.

(b) Uvažujme Dirichletovu funkci D z Příkladu 4.4.10. Pak je každé kladné racionální číslo periodou funkce D , a tedy D nemá fundamentální periodu. ♣

Limes superior a limes inferior.

4.4.14. Limes superior a limes inferior pro funkce zavedeme podobně jako limes superior a limes inferior pro posloupnosti, vizte 2.4.8 a Definici 2.4.9. Necht $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce, pro kterou existuje $\eta \in \mathbb{R}, \eta > 0$, splňující $P(c, \eta) \subset \mathcal{D}(f)$. **Limes superior** funkce f v bodě c definujeme předpisem

$$\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup f(P(c, \delta)), & \text{pokud existuje } \eta' \in (0, \eta), \text{ ta-} \\ & \text{kové, že } f \text{ je omezená shora na} \\ & P(c, \eta'), \\ \infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jestliže nastává první možnost, tj., pokud existuje $\eta' \in (0, \eta)$ takové, že f je omezená shora na $P(c, \eta')$, pak předpis $\delta \mapsto \sup f(P(c, \delta))$ definuje reálnou funkci na intervalu $(0, \eta')$, která je neklesající, a proto existuje uvedená limita podle Věty 4.2.27(a). Definice je tedy korektní.

Limes inferior funkce f v bodě c definujeme předpisem

$$\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \inf f(P(c, \delta)), & \text{pokud existuje } \eta' \in (0, \eta) \text{ takové, že } f \text{ je omezená zdola na} \\ & P(c, \eta'), \\ -\infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podobně jako v definici limes superior plyne existence limity v prvním případě z Věty 4.2.27. Tentokrát použijeme její část (b) na funkci $\delta \mapsto \inf f(P(c, \delta))$, která je na intervalu $(0, \eta')$ nerostoucí.

Obdobně definujeme limes superior a limes inferior v bodě c zleva či zprava, prstencová okolí v předchozích definicích nahradíme příslušnými jednostrannými prstencovými okolími.

V Příkladech 4.4.15–4.4.18 jsou funkce f a bod c jako v 4.4.14.

4.4.15. Příklad. Dokažte, že platí

$$\liminf_{x \rightarrow c} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow c} f(x). \quad (4.27)$$

Řešení. Předpokládejme, že existuje $\eta' \in (0, \eta)$ takové, že funkce f je na množině $P(c, \eta')$ omezená. Pak pro každé $\delta \in (0, \eta')$ platí

$$\inf f(P(c, \delta)) \leq \sup f(P(c, \delta)).$$

Podle definice $\limsup$ a $\liminf$ dostaneme

$$\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \inf f(P(c, \delta)) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup f(P(c, \delta)) = \limsup_{x \rightarrow c} f(x).$$

V případě, že neexistuje η' s uvedenými vlastnostmi, pak $\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ nebo $\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$. V obou případech pak (4.27) zřejmě platí. ♣

4.4.16. Příklad. Limita $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existuje právě tehdy, když $\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \liminf_{x \rightarrow c} f(x)$. Pokud $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existuje, pak platí

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \liminf_{x \rightarrow c} f(x). \quad (4.28)$$

Řešení. Začneme s důkazem prvního tvrzení.

$\Rightarrow$ Označme $A = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$. Rozlišíme případy podle hodnoty A . Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1): f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

Odtud plyne $\sup f(B(c, \delta)) \leq A + \varepsilon$ pro každé $\delta \in (0, \delta_1)$. Podle definice limes superior pak dostáváme

$$\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup f(B(c, \delta)) \leq A + \varepsilon.$$

Podobně odvodíme $\liminf_{x \rightarrow c} f(x) \geq A - \varepsilon$. Odtud a díky Příkladu 4.4.15 máme

$$0 \leq \limsup_{x \rightarrow c} f(x) - \liminf_{x \rightarrow c} f(x) \leq A + \varepsilon - (A - \varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo voleno libovolně, dostáváme požadovanou rovnost.

Pokud $A = \infty$, pak díky Příkladu 4.4.15 stačí dokázat, že $\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1): f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Odtud plyne $\sup f(B(c, \delta)) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ pro každé $\delta \in (0, \delta_1)$. Podle definice limes superior pak dostáváme $\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup f(B(c, \delta)) \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Vzhledem k tomu, že ε bylo voleno jako libovolné kladné reálné číslo, dostáváme požadovanou rovnost.

Pokud $A = -\infty$, pak lze postupovat obdobně jako v předchozím případě.

$\Leftarrow$ Označme

$$A = \limsup_{x \rightarrow c} f(y) = \liminf_{x \rightarrow c} f(y).$$

Opět rozlišíme tři případy podle hodnoty A . Předpokládejme nejprve, že platí $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$, taková, že

$$A - \varepsilon < \inf f(P(c, \delta_1)) \quad \text{a} \quad \sup f(P(c, \delta_2)) < A + \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak platí

$$A - \varepsilon < \inf f(P(c, \delta)) \leq \sup f(P(c, \delta)) < A + \varepsilon.$$

Tedy $f(P(c, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$, takže $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$.

Pokud platí $A = \infty$, pak pro dané $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ takové, že $\inf f(P(c, \delta)) > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy $f(P(c, \delta)) \subset B(A, \varepsilon)$. Odtud plyne $\lim_{x \rightarrow c} f(y) = \infty$. V případě $A = -\infty$ lze tvrzení dokázat obdobně jako v předchozím případě.

V důkazu druhé implikace jsme ověřili platnost (4.28). ♣

4.4.17. Příklad. Platí $\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = -\limsup_{x \rightarrow c} (-f(x))$.

Řešení. Pro $A \subset \mathbb{R}$ připomeňme značení $-A = \{-x; x \in A\}$.

Pomocné tvrzení. Necht $A \subset \mathbb{R}$. Potom platí $\inf A = -\sup(-A)$.

Pokud je A neprázdná a zdola omezená, pak pomocné tvrzení platí podle Věty 1.5.17. Pokud je A prázdná, pak

$$\sup A = \sup \emptyset = -\infty \quad \text{a} \quad \inf(-A) = \inf \emptyset = \infty,$$

takže dokazovaná rovnost platí. Pokud A není zdola omezená, pak $-A$ není shora omezená, a proto $\sup(-A) = \infty$. Poněvadž platí $\inf A = -\infty$, dostáváme dokazovanou rovnost i v tomto případě.

Vlastní řešení. Nejprve předpokládejme, že existuje $\eta' \in (0, \eta)$, takové, že funkce f je zdola omezená na $P(c, \eta')$. Potom platí i díky pomocnému tvrzení

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \inf f(P(x, \delta)) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} -\sup(-f(P(x, \delta))) \\ &= -\lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup(-f(P(x, \delta))) = -\limsup_{x \rightarrow c} (-f(x)), \end{aligned}$$

čímž je tvrzení v tomto případě dokázáno.

V případě, kdy neexistuje $\eta' \in \mathbb{R}, \eta' > 0$, takové, že funkce f je zdola omezená a definovaná na $P(c, \eta')$, pak také neexistuje $\eta' \in \mathbb{R}, \eta' > 0$, takové, že funkce $-f$ je shora omezená a definovaná na $P(c, \eta')$. Podle definice dostáváme $\limsup_{x \rightarrow c} (-f(x)) = \infty$ a $\liminf_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$. Odtud plyne dokazovaná rovnost. ♣

4.4.18. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou funkce definované na nějakém $P(c, \delta)$. Potom platí

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) &\geq \liminf_{x \rightarrow c} f(x) + \liminf_{x \rightarrow c} g(x), \\ \limsup_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) &\leq \limsup_{x \rightarrow c} f(x) + \limsup_{x \rightarrow c} g(x), \end{aligned}$$

pokud jsou pravé strany definovány.

Řešení. Dokážeme pouze druhou nerovnost. První nerovnost lze dokázat obdobně. Označme

$$b_1 = \limsup_{x \rightarrow c} f(x) \quad \text{a} \quad b_2 = \limsup_{x \rightarrow c} g(x).$$

Je-li $b_1 + b_2 = \infty$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy, že $b_1 + b_2 < \infty$ a necht $b' \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo větší než $b_1 + b_2$. Snadno nalezneme čísla $b'_1, b'_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $b_1 < b'_1, b_2 < b'_2$ a $b'_1 + b'_2 < b'$. Z definice nyní nalezneme $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \delta_1, \delta_2 > 0$, splňující

$$\sup f(P(x, \delta_1)) < b'_1 \quad \text{a} \quad \sup g(P(x, \delta_2)) < b'_2.$$

Pro $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ pak z Věty 1.5.21(a) dostáváme

$$\begin{aligned} \sup(f + g)(P(c, \delta)) &\leq \sup f(P(c, \delta)) + \sup g(P(c, \delta)) \\ &\leq \sup f(P(c, \delta_1)) + \sup g(P(c, \delta_2)) \\ &< b'_1 + b'_2 < b'. \end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{x \rightarrow c} (f + g)(x) < b'.$$

Protože bylo b' libovolné, platí

$$\limsup_{x \rightarrow c} (f + g)(x) \leq b_1 + b_2.$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

4.5. Početní příklady k limitě funkce

4.5.1 (metody výpočtu limit). Necht $c \in \mathbb{R}^*$, f je funkce a naším úkolem je spočítat limitu funkce f v bodě c . Pokud je funkce f v bodě c spojitá, pak platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ a výpočet je proveden. Často se však budeme setkávat se situací, kdy funkce f není spojitá v bodě c . Jednou z možností, kterou budeme často využívat, je nalezení funkce g , která je spojitá v bodě c a která se shoduje s funkcí f na jistém prstencovém okolí bodu c . Potom podle 4.1.14 platí $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$.

Mezi další metody patří použití věty o aritmetice limit (Věta 4.2.1), věty o dvou strážnících (Věta 4.2.9), věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.22) a využití limit, jejichž hodnotu již známe. V následujících úlohách tyto postupy podrobně předvedeme. Dalšími důležitými metodami jsou výpočet limity pomocí l'Hôpitalova pravidla a pomocí Taylorova polynomu, které jsou však uvedeny až v kapitolách 5 a 6.

4.5.2. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}.$$

Řešení. Z 4.2.5 víme, že funkce $x \mapsto x^2 + 2x - 3$, $x \mapsto x^2 - 1$ jsou spojité na $\mathbb{R}$, a proto

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x - 3) = -3 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1.$$

Z věty o aritmetice limit funkcí (Věta 4.2.1(c)) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

♣

4.5.3. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}.$$

Řešení. Díky spojitosti příslušných funkcí platí

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0.$$

Protože výraz $\frac{0}{0}$ není definovaný, nelze použít přímočaře Větu 4.2.1(c). Označme

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},$$

$$g(x) = \frac{x + 3}{x + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Pak

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Speciálně tedy platí, že pro každé $x \in P(1, 1)$ máme $f(x) = g(x)$. Proto podle 4.1.14 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, pokud alespoň jedna z limit existuje. Poslední limitu ale snadno spočteme pomocí věty o aritmetice limit. Obdržíme tak

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

♣

4.5.4. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$$

Řešení. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a vyjádřeme

$$\begin{aligned} x^n - 2x + 1 &= (x^n - x) - (x - 1) = x(x^{n-1} - 1) - (x - 1) \\ &= x(x - 1) \left(\sum_{j=0}^{n-2} x^j \right) - (x - 1) = (x - 1) \left(x \left(\sum_{j=0}^{n-2} x^j \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

Tedy dostáváme postupem podobným jako v Příkladu 4.5.3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \left(x \left(\sum_{j=0}^{98} x^j \right) - 1 \right)}{(x - 1) \left(x \left(\sum_{j=0}^{48} x^j \right) - 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \left(\sum_{j=0}^{98} x^j \right) - 1}{x \left(\sum_{j=0}^{48} x^j \right) - 1} = \frac{1 \cdot 99 - 1}{1 \cdot 49 - 1} = \frac{98}{48} = \frac{49}{24}. \end{aligned}$$

♣

4.5.5 (limita racionální funkce ve vlastním bodě). Necht P , Q jsou nenulové polynomy a $c \in \mathbb{R}$. Pro výpočet limity

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

lze uvést následující obecný postup. Podle 1.7.9 rozložíme uvažované polynomy:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - c)^n \tilde{P}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ Q(x) &= (x - c)^m \tilde{Q}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

kde $\tilde{P}, \tilde{Q}$ jsou polynomy, $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\tilde{P}(c) \neq 0$ a $\tilde{Q}(c) \neq 0$. Rozlišíme následující případy.

Případ $m = n$. Pak podle 4.1.14 a Věty 4.2.1(c) obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} = \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)}.$$

Případ $m > n$. Zde budeme nejprve počítat jednostranné limity v bodě c . Tím zajistíme, že funkce $x \mapsto x - c$ nebude na (pravém či levém) prstencovém okolí c měnit znaménko. Pro limitu zprava platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c+} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \rightarrow c+} \frac{1}{(x - c)^{m-n}} \cdot \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} = \infty \cdot \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{pokud } \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} > 0, \\ -\infty, & \text{pokud } \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pro limitu zleva platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c-} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \rightarrow c-} \frac{1}{(x - c)^{m-n}} \cdot \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} \\ &= \begin{cases} \infty \cdot \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} & \text{pokud } m - n \text{ je sudé,} \\ -\infty \cdot \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} & \text{pokud } m - n \text{ je liché.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{pokud } m - n \text{ je sudé a } \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} > 0, \\ -\infty, & \text{pokud } m - n \text{ je sudé a } \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} < 0, \\ -\infty, & \text{pokud } m - n \text{ je liché a } \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} > 0, \\ \infty, & \text{pokud } m - n \text{ je liché a } \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Z uvedených výpočtů plyne, že limita $\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)}$ existuje právě tehdy, když je číslo $m - n$ sudé. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} > 0, \\ -\infty, & \text{pokud } \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} < 0. \end{cases}$$

Případ $m < n$. Pak podle 4.1.14 a Věty 4.2.1(c) obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow c} (x - c)^{n-m} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} = 0 \cdot \frac{\tilde{P}(c)}{\tilde{Q}(c)} = 0.$$

4.5.6 (limita racionální funkce v ∞). Necht P, Q jsou nenulové polynomy. Pro výpočet limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

existuje také obecný postup. Zapišme polynomy ve tvaru

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \quad \text{a} \quad Q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $n, m \in \mathbb{N}$, pro každé $j \in \{0, \dots, n\}$ platí $a_j \in \mathbb{R}$, pro každé $i \in \{0, \dots, m\}$ platí $b_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ a $b_m \neq 0$. Rozlišíme opět tři případy.

Případ $n = m$. Použijeme Větu 4.2.1 a Příklad 4.1.12 a obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-n}}{b_m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^{i-n}} = \frac{a_n}{b_m}.$$

Případ $n > m$. Použijeme Větu 4.2.1 a Příklady 4.1.12, 4.1.11 a obdržíme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-m} (a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-n})}{b_m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^{i-m}} = \frac{\infty \cdot (a_n + 0)}{b_m} \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{pokud } \frac{a_n}{b_m} > 0, \\ -\infty, & \text{pokud } \frac{a_n}{b_m} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Případ $n < m$. Použijeme Větu 4.2.1 a Příklady 4.1.12, 4.1.11 a obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-n}}{x^{m-n} (b_m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^{i-m})} = \frac{a_n + 0}{\infty \cdot b_m} = 0.$$

4.5.7. Poznámka. Limitu racionální funkce v $-\infty$ je možné počítat obdobně jako v 4.5.6.

4.5.8. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

Řešení. Polynom v čitateli označme P a polynom ve jmenovateli Q . Pro tyto polynomy platí pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x)^{20} \cdot (3x)^{30} + \tilde{P}(x), \\ Q(x) &= (2x)^{50} + \tilde{Q}(x), \end{aligned}$$

kde $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ jsou polynomy stupně menšího než 50. Podle 4.5.6 platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

♣

4.5.9. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sum_{j=1}^n x^j) - n}{x - 1}.$$

Řešení. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ vyjádříme

$$\frac{(\sum_{j=1}^n x^j) - n}{x - 1} = \frac{\sum_{j=1}^n (x^j - 1)}{x - 1} = \sum_{j=1}^n \frac{x^j - 1}{x - 1}.$$

Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^j - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\sum_{k=0}^{j-1} x^k)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{j-1} x^k = j. \end{aligned}$$

Z Věty 4.2.1 tady máme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sum_{j=1}^n x^j) - n}{x - 1} = \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}n(n + 1),$$

přičemž poslední rovnost plyne z Příkladu 1.8.6 pro $a = 1$ a $b = 0$. ♣

4.5.10. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2},$$

kde $n, m \in \mathbb{N}$.

Řešení. Čitatel zadané funkce vyjádříme pro $x \in \mathbb{R}$ jako

$$\begin{aligned} (1 + mx)^n - (1 + nx)^m &= \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (mx)^j \right) - \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (nx)^k \right) \\ &= \left(1 + \binom{n}{1}mx + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j}(mx)^j \right) - \left(1 + \binom{m}{1}nx + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k}(nx)^k \right). \end{aligned}$$

Protože platí $\binom{n}{1}m = nm = mn = \binom{m}{1}n$, máme

$$(1 + mx)^n - (1 + nx)^m = x^2 \cdot P(x),$$

kde P je polynom definovaný předpisem

$$P(x) = \left(\sum_{j=2}^n \binom{n}{j} m^j x^{j-2} \right) - \left(\sum_{k=2}^m \binom{m}{k} n^k x^{k-2} \right). \quad (4.29)$$

Z Věty 4.2.1 a Příkladu 4.2.5 tedy dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} P(x) = P(0).$$

V závislosti na n a m vyjádříme hodnotu $P(0)$ z (4.29), přičemž bereme v úvahu konvenci zavedenou v Označení 1.5.2(a):

$$P(0) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & n = m = 1, \\ 0 - \binom{m}{2}n^2 = -\binom{m}{2}n^2, & n = 1, m > 1, \\ \binom{n}{2}m^2 - 0 = \binom{n}{2}m^2, & n > 1, m = 1, \\ \binom{n}{2}m^2 - \binom{m}{2}n^2. & n > 1, m > 1. \end{cases}$$

Ve všech uvedených případech je příslušná hodnota $P(0)$ rovna $\frac{1}{2}nm(n-m)$, což je tedy výsledek naší úlohy. ♣

4.5.11. Příklad. Necht $m, n \in \mathbb{N}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right).$$

Řešení. Funkci v zadané limitě upravíme takto

$$\begin{aligned} \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} &= \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x^n)(1-x^m)} \\ &= \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\right) \cdot (1-x) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m-1} x^j\right)} \\ &= \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot \sum_{j=0}^{m-1} x^j}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Limity obou činitelů vypočítáme zvlášť. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} m(1-x^n) &= m(1-x) \sum_{j=0}^{n-1} x^j \\ &= m(1-x) \sum_{j=0}^{n-1} (x^j - 1) + m(1-x) \sum_{j=0}^{n-1} 1 \\ &= -m(1-x)^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{j-1} x^k + mn(1-x). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Obdobně platí

$$n(1-x^m) = -n(1-x)^2 \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{i-1} x^l + mn(1-x). \quad (4.32)$$

Díky (4.31) a (4.32) platí pro každé $x \in P(1, 1)$

$$\frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x)^2} = -m \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{j-1} x^k + n \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{i-1} x^l.$$

Limitu funkce v bodě 1 na pravé straně je již snadné dopočítat, neboť jde o polynom. Máme tedy

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{m(1-x^n) - n(1-x^m)}{(1-x)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-m \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{j-1} x^k + n \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{i-1} x^l \right) \\
 &= -m \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{j-1} 1 + n \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{i-1} 1 \\
 &= -m \sum_{j=0}^{n-1} j + n \sum_{i=0}^{m-1} i = -m \cdot \frac{1}{2}n(n-1) + n \cdot \frac{1}{2}m(m-1) \\
 &= \frac{1}{2}mn(m-n).
 \end{aligned}$$

Přímým použitím věty o limitě podílu spočteme limitu druhého činitele v (4.30)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m-1} x^j\right)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} 1\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m-1} 1\right)} = \frac{1}{nm}.$$

Odtud pomocí věty o limitě součinu odvodíme výsledek naší úlohy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{\frac{1}{2}mn(m-n)}{nm} = \frac{1}{2}(m-n).$$

♣

4.5.12 (úprava rozdílů odmocnin). Necht f a g jsou funkce. Předpokládejme, že funkce $h: x \mapsto \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ je definována na $P(c, \delta)$, kde $c \in \mathbb{R}^*$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Při zkoumání funkce h na $P(c, \delta)$ může být užitečná následující úprava

$$h(x) = h(x) \cdot \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}} = \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}},$$

přičemž jsme použili vzorec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Nové vyjádření funkce h může být někdy složitější než vyjádření původní, přece však práce s ním může být jednodušší, jak uvidíme na příkladech.

Obdobně lze pracovat s funkcí $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Zde lze použít vzorec pro rozvoj výrazu $a^n - b^n$, vizte 1.5.7.

4.5.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$$

Řešení. Pro každé $x \in P(3, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} \cdot \frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+13)-4(x+1)}{x^2-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Funkce

$$g(x) = \frac{-3}{x+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}, \quad x \in (2, \infty),$$

je spojitá na intervalu $I = (2, \infty)$ z následujících důvodů. Funkce $x \mapsto x+13$, $x \mapsto x+1$ jsou spojité na I dle 4.2.5. Vzhledem k Příkladu 4.2.21 a Větě 4.3.5 jsou i funkce $x \mapsto \sqrt{x+13}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ spojité na I . Dále jsou funkce $x \mapsto x+3$, $x \mapsto \sqrt{x+13}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ kladné na I , a tedy je g , jakožto výsledek algebraických operací provedených na tyto funkce, spojitá na I dle Věty 4.2.4. Odtud a také díky 4.5.1 máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{x+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{-3}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{16}+2\sqrt{4}} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

♣

4.5.14. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

Řešení. Pro každé $x \in P(0, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &\quad \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} \\ &= \frac{1+x-(1-x)}{1+x-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$

Z Věty 4.2.1 a Příkladu 4.2.21 máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \frac{3}{2}.$$

♣

4.5.15. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2},$$

Řešení. Úprava čitatele. Použijeme vzorec z Příkladu 1.5.7 pro $n = 6$, $a = \sqrt{x+2}$ a $b = \sqrt[3]{x+20}$. Definujme funkci g předpisem

$$g(x) = \sum_{i=1}^6 (\sqrt{x+2})^{6-i} \cdot (\sqrt[3]{x+20})^i, \quad x \in (0, \infty).$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow 7} g(x) = 6 \cdot 3^6 \quad (4.33)$$

a pro každé $x \in (0, \infty)$ máme

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20} &= \frac{(\sqrt{x+2})^6 - (\sqrt[3]{x+20})^6}{g(x)} = \frac{(x+2)^3 - (x+20)^2}{g(x)} \\ &= \frac{x^3 + 5x^2 - 28x - 392}{g(x)}. \end{aligned}$$

Polynom v čitateli předchozího výrazu označme symbolem Q . Číslo 7 je kořenem Q a pomocí algoritmu z 1.7.8 dostaneme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$Q(x) = (x-7)(x^2 + 12x + 56). \quad (4.34)$$

Úprava jmenovatele. Opět použijeme vzorec z Příkladu 1.5.7, tentokrát pro $n = 4$, $a = \sqrt[4]{x+9}$ a $b = 2$. Definujme funkci h předpisem

$$h(x) = \sum_{i=1}^4 (\sqrt[4]{x+9})^{4-i} 2^i, \quad (0, \infty).$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow 7} h(x) = 4 \cdot 2^4 \quad (4.35)$$

a pro každé $x \in (0, \infty)$ máme

$$\sqrt[4]{x+9} - 2 = \frac{(x+9) - 2^4}{h(x)} = \frac{x-7}{h(x)}.$$

Kombinací (4.33), (4.34) a (4.35) dostaneme pomocí Věty 4.2.1 závěr

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x^2+12x+56)}{g(x)} \cdot \frac{h(x)}{x-7} \\ &= \frac{(7^2+12 \cdot 7+56) \cdot (4 \cdot 2^4)}{6 \cdot 3^6} = \frac{189 \cdot 4 \cdot 2^4}{6 \cdot 3^6} = \frac{7 \cdot 2^5}{3^4}.\end{aligned}$$

♣

4.5.16.

4.5.17. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}x} - \sqrt[4]{1+\frac{1}{4}x}}{1 - \sqrt{1-\frac{1}{2}x}}.$$

Řešení. Úprava čitatele. Pro zjednodušení zápisu definujme na intervalu $(-1, 1)$ pomocné funkce

$$a(x) = \sqrt[3]{1+\frac{1}{3}x} \quad \text{a} \quad b(x) = \sqrt[4]{1+\frac{1}{4}x}.$$

Podle vzorce z Příkladu 1.5.7 pro $n = 12$ platí pro každé $x \in (-1, 1)$

$$a(x)^{12} - b(x)^{12} = (a(x) - b(x)) \cdot \sum_{k=1}^{12} a(x)^{12-k} b(x)^{k-1}.$$

Pro $x \in (-1, \infty)$ označme ještě

$$c(x) = \sum_{k=1}^{12} a(x)^{12-k} b(x)^{k-1}.$$

Pak pro každé $x \in (-1, 1)$ máme

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}x} - \sqrt[4]{1+\frac{1}{4}x} &= a(x) - b(x) = \frac{a(x)^{12} - b(x)^{12}}{c(x)} \\ &= \frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}x}\right)^{12} - \left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{4}x}\right)^{12}}{c(x)} \\ &= \frac{1}{c(x)} \cdot \left(\left(1+\frac{1}{3}x\right)^4 - \left(1+\frac{1}{4}x\right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{c(x)} \cdot \left(\sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}x\right)^k - \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left(\frac{1}{4}x\right)^k \right) \\ &= \frac{1}{c(x)} \cdot \left(x \left(\binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3} - \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{4} \right) + x^2 P(x) \right), \\ &= \frac{1}{c(x)} \cdot \left(\frac{7}{12}x + x^2 P(x) \right),\end{aligned}$$

kde P je polynom.

Úprava jmenovatele. Dále pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}x} = \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}x}}.$$

Žáděrečný výpočet. Funkce a a b jsou spojité v 0, a proto je v 0 spojitá i funkce c . Platí $a(0) = b(0) = 1$, a tedy $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = c(0) = 12$. Podobně jako v předchozích úlohách dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{3}x} - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{4}x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{c(x)} \cdot \left(\frac{7}{12}x + x^2 P(x)\right)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{c(x)} \cdot \left(\frac{7}{12} + xP(x)\right) \cdot 2 \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}x}\right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{7}{36}. \end{aligned}$$

♣

4.5.18. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

Řešení. Pomocí Věty 4.2.1 a Příkladu 4.2.21 spočteme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}} = 1. \end{aligned}$$

♣

4.5.19. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \right).$$

Řešení. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \\ &= \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = \frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}. \end{aligned}$$

Proto platí

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \left(1 + \sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)} \\ &= \frac{-2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

♣

4.5.20. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x^2+5}] + x}{\sqrt{x^2+1} + [3x]}.$$

Řešení. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $[x] \leq x < [x] + 1$, dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, odhady

$$\frac{\sqrt{x^2+5} + x - 1}{\sqrt{x^2+1} + 3x} \leq \frac{[\sqrt{x^2+5}] + x}{\sqrt{x^2+1} + [3x]} \leq \frac{\sqrt{x^2+5} + x}{\sqrt{x^2+1} + 3x - 1}. \quad (4.36)$$

Označme pro $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} + x - 1}{\sqrt{x^2+1} + 3x} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} + x}{\sqrt{x^2+1} + 3x - 1}.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} + 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 3} = \frac{1}{2} \quad (4.37)$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} + 1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 3 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. \quad (4.38)$$

Označíme-li

$$h(x) = \frac{[\sqrt{x^2 + 5}] + x}{\sqrt{x^2 + 1} + [3x]}, \quad x \in (1, \infty),$$

dostáváme z (4.36) nerovnosti

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in (1, \infty).$$

Díky Větě 4.2.9 tak z (4.37) a (4.38) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{1}{2}.$$

♣

4.5.21. Příklad. Ukažte, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

neexistuje.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} = A \in \mathbb{R}^*$. Označme $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Uvažujme pro $n \in \mathbb{N}$ body

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y_n = 2\pi n.$$

Pak $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou posloupnosti v definičním oboru funkce $\frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ konvergující k ∞ , a proto z Heineovy věty (Věta 4.2.18) plyne

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)(\sin x_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

a

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)(\sin y_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)(-1) = -1.$$

To je ale zřejmý spor, takže $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ neexistuje.

♣

Derivace funkce

Derivace funkce je po pojmech limity posloupnosti a limity funkce dalším klíčovým pojmem matematické analýzy. V této kapitole odvodíme jeho základní vlastnosti a pomocí něj budeme zkoumat hlubší vlastnosti funkcí.

5.1. Základní vlastnosti derivace

5.1.1. Definice. Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (5.1)$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě a** a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce f v bodě a** předpisy

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivaci zleva v bodě a a derivaci zprava v bodě a nazýváme **jednostrannými derivacemi**.

5.1.2. Označení. Jestliže existuje derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak je určena jednoznačně. Tvrzení bezprostředně vyplývá z definice derivace a Věty 4.1.7 o jednoznačnosti limity funkce. Obdobná tvrzení platí pro jednostranné derivace. Derivaci funkce f v bodě a , derivaci funkce f v bodě a zprava a derivaci funkce f v bodě a zleva budeme po řadě značit $f'(a)$, $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

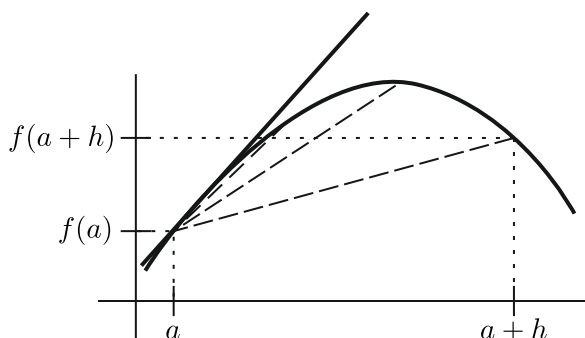
5.1.3. (a) Při počítání derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je } \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } +\infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

(b) Z existence $f'(a)$ plyne, že funkce f je definovaná na jistém okolí bodu a . Podobně z existence $f'_+(a)$ plyne, že funkce f je definovaná na jistém pravém okolí bodu a . Obdobné tvrzení platí i pro derivaci zleva.

(c) Derivace reálné funkce v bodě má *lokální charakter*. To znamená, že jestliže se funkce f a g shodují na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$, pak existuje i $g'(a)$ a platí $f'(a) = g'(a)$. Srovnejte s 4.1.14.

5.1.4 (geometrický význam derivace). Podíl $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ je směrnici afinní funkce, jejíž graf obsahuje body $[a, f(a)]$ a $[a+h, f(a+h)]$. Přibližujeme-li bod h k 0, pak, pokud $f'(a)$ existuje vlastní, se příslušná afinní funkce v jistém smyslu přibližuje k afinní funkci se směrnici $f'(a)$, jejíž graf obsahuje bod $[a, f(a)]$.



OBRÁZEK 1.

5.1.5. Definice. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f'(a)$ existuje vlastní. Pak **tečnou ke grafu funkce f v bodě a** nazýváme afinní funkci $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

5.1.6 (aproximační vlastnost tečny). Necht f, t a a jsou jako v Definici 5.1.5. Pak tečna t má následující důležitou vlastnost

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = f'(a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

Funkce t tedy v blízkosti bodu a dobře přibližuje (aproximuje) chování funkce f ve výše uvedeném smyslu.

5.1.7 (diferenciální počet jako nauka o linearizaci). Tečna ke grafu funkce f v bodě a je afinní funkce, a jde tedy o jednoduchý objekt, který poskytuje informaci o chování obecně složitějšího objektu, totiž funkce f . Tečna nese jen část informace o chování f , která však někdy může být dostatečná pro zkoumání jistých vlastností funkce f . Pokud při řešení nějakého problému nahradíme funkci f její tečnou, hovoříme o *linearizaci*. Možnosti a korektnost takových postupů budeme zkoumat v této i dalších kapitolách.

5.1.8 (alternativní vzorec pro výpočet derivace). Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (5.2)$$

pokud alespoň jedna z limit existuje. Odtud plyne alternativní vzorec pro výpočet derivace

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Obdobně platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

vždy má-li alespoň jedna ze stran rovnosti smysl.

Ověříme rovnost (5.2). Předpokládejme, že existuje limita na levé straně. Pak je funkce

$$F(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

definována na jistém prstencovém okolí bodu 0. Označme dále $g(x) = x - a$, $x \in \mathbb{R}$. Funkce g splňuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.22(P)) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} F(g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nyní naopak předpokládejme, že existuje limita na pravé straně (5.2). Potom je funkce

$$G(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a . Označme dále $u(h) = a + h$, $h \in \mathbb{R}$. Funkce u splňuje $\lim_{h \rightarrow 0} u(h) = a$ a $u(h) \neq a$ pro každé $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.22(P)) dostáváme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} G(u(h)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

5.1.9. Věta (vztah derivace a jednostranných derivací). Necht $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ a platí $f'_+(a) = f'_-(a)$. Navíc pokud $f'(a)$ existuje, potom $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$.

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z definice derivace, definice jednostranných derivací a Věty 4.1.18. ■

5.1.10. Definice. Necht f je reálná funkce. Potom **definičním oborem funkce** f' budeme rozumět množinu všech $x \in \mathcal{D}(f)$, pro která existuje vlastní $f'(x)$.

5.1.11. Příklad. Necht $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, a $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že platí $f'(a) = 0$.

Řešení. Podle 5.1.8 platí

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0.$$

♣

5.1.12. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, a $a \in \mathbb{R}$. Dokažte, že platí $f'(a) = na^{n-1}$.

Řešení. S pomocí Příkladu 1.5.7 spočteme

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} \cdot \sum_{k=1}^n x^{n-k} a^{k-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n x^{n-k} a^{k-1} = \sum_{k=1}^n a^{n-k} a^{k-1} = na^{n-1}. \end{aligned}$$

Předposlední rovnost plyne ze spojitosti polynomů (Příklad 4.2.5).

♣

5.1.13. Příklad. Necht $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $f'(0)$ neexistuje, $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$.

Řešení. Podle 5.1.8 máme

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1. \end{aligned}$$

Protože se jednostranné derivace funkce f v bodě 0 nerovnají, vyplývá z Věty 5.1.9, že $f'(0)$ neexistuje.

♣

5.1.14. Příklad. Necht $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $f'(0) = \infty$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-1}{x} = \infty. \end{aligned}$$

Z Věty 5.1.9 tedy vyplývá, že $f'(0) = \infty$.

♣

Z Příkladu 5.1.14 plyne, že existence (nevládní) derivace funkce f v bodě a nezaručuje její spojitost v a . Jestliže však má f vlastní derivaci v a , pak je již v tomto bodě spojitá.

5.1.15. Věta (derivace a spojitost). Necht funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Potom je f v bodě a spojitá.

Důkaz. Podle věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.1) platí

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \right) \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a),\end{aligned}$$

neboť $f'(a)$ existuje vlastní. Funkce f je tedy v a spojitá. ■

5.1.16. Tvrzení obdobné Věte 5.1.15 platí i pro jednostranné derivace: existuje-li vlastní $f'_+(a)$, pak funkce f je spojitá zprava v bodě a a existuje-li vlastní $f'_-(a)$, pak funkce f je spojitá zleva v bodě a . Důkaz lze provést obdobně jako důkaz předchozí věty.

5.1.17. Věta (aritmetika derivací). Necht $a \in \mathbb{R}$ a f, g jsou funkce, které mají v bodě a derivaci.

(a) Pak platí

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Necht alespoň jedna z funkcí f a g je spojitá v bodě a . Potom platí

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(c) Necht funkce g je spojitá v bodě a . Potom platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. (a) Je-li výraz $f'(a) + g'(a)$ definován, pak podle definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce (Věta 4.2.1) máme

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h) + g(a + h) - f(a) - g(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h) - f(a)) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (g(a + h) - g(a)) \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že funkce g je spojitá v bodě a a výraz $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ je definován. Potom $\lim_{h \rightarrow 0} g(a + h) = g(a)$ a díky této rovnosti dostaneme pomocí definice derivace a věty o aritmetice limit pro funkce

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h)g(a + h) - f(a)g(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h)g(a + h) - f(a)g(a + h) + f(a)g(a + h) - f(a)g(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((f(a + h) - f(a))g(a + h) + f(a)(g(a + h) - g(a))) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h) - f(a))g(a + h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(a)(g(a + h) - g(a)) \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

V případě, že je v bodě a spojitá funkce f , postupujeme obdobně.

(c) Předpokládejme, že výraz na pravé straně dokazované rovnosti je definován. Potom $g(a) \neq 0$ a můžeme počítat

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a) - f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\ &= \frac{1}{g^2(a)} \cdot (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)). \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme využili větu o aritmetice limit a vztah $\lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a)$, neboli spojitost funkce g v bodě a . ■

5.1.18. Tvrzení Věty 5.1.17 platí obdobně i pro jednostranné derivace.

5.1.19. Pokud jsou derivace funkcí f a g v bodě a vlastní, pak jsou splněny předpoklady platnosti vztahů v bodech (a) a (b) předchozí věty. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak jsou splněny i předpoklady pro bod (c).

5.1.20. Pomocí matematické indukce můžeme rozšířit platnost tvrzení (a) a (b) z předchozí věty následovně. Necht $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a $f_1, \dots, f_n$ jsou funkce, které mají v bodě a derivaci.

(a) Pak platí

$$\left(\sum_{j=1}^n f_j\right)'(a) = \sum_{j=1}^n f_j'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

(b) Necht jsou funkce $f_1, \dots, f_n$ spojitě v bodě a . Potom platí

$$\left(\prod_{j=1}^n f_j\right)'(a) = \sum_{k=1}^n \left(f_k'(a) \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^n f_j(a)\right),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

5.1.21. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Vzorec plyne z Příkladů 5.1.11, 5.1.12 a Věty 5.1.17(a),(b). ♣

5.1.22. Příklad. Definujme funkce f a g předpisy

$$f(x) = \operatorname{sign} x \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f+g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Z Příkladu 5.1.14 víme, že $f'(0) = \infty$, a podobně spočteme $g'(0) = -\infty$. Dále platí

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Opět snadno vypočítáme, že $(f + g)'_+(0) = -\infty$ a $(f + g)'_-(0) = \infty$. Tedy podle Věty 5.1.9 $(f + g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.23. Předcházející příklad ukazuje, že z existence derivací funkcí f a g v bodě a obecně neplyne existence derivace funkce $f + g$ v bodě a . Funkce uvedené v tomto příkladu ovšem nesplňují podmínku Věty 5.1.17(a), totiž že výraz $f'(a) + g'(a)$ má být definován, tento předpoklad Věty 5.1.17(a) tedy nelze vynechat. Obdobné příklady vztahující se k částem (b) a (c) jsou uvedeny v oddílu 5.8.

5.1.24. Věta (derivace složené funkce). Nechť funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, má v tomto bodě derivaci a funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a), \quad (5.3)$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Definujme pomocnou funkci φ předpisem

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in \mathcal{D}(f) \setminus \{b\}.$$

Díky existenci $f'(b)$ platí $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = f'(b)$. Důkaz nyní rozdělíme na dva případy podle toho, zda je $g'(a)$ různá od 0, nebo rovna 0.

Případ $g'(a) \neq 0$. Podle Věty 4.2.8(a) nalezneme $\eta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \eta): \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0.$$

Odtud plyne

$$\forall x \in P(a, \eta): g(x) \neq g(a). \quad (5.4)$$

Potom podle předpokladu platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Nyní použijeme Větu 4.2.22(P) pro složení vnější funkce φ s vnitřní funkcí g . Podmínka (P) je splněna díky (5.4). Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} (\varphi \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = f'(b). \quad (5.5)$$

Odtud podle věty o limitě součinu (Věta 4.2.1(b)) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(b) \cdot g'(a), \end{aligned}$$

přičemž jsme využili (5.5), předpoklad existence $g'(a)$ a také předpoklad, že výraz $f'(b) \cdot g'(a)$ je definován.

Případ $g'(a) = 0$. Protože výraz na pravé straně (5.3) je definován, je $f'(b)$ vlastní. Podle Věty 4.1.24 nalezneme $C > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pro každé $y \in P(b, \delta)$ platí $|\varphi(y)| < C$. Odtud plyne

$$\forall y \in B(b, \delta): |f(y) - f(b)| \leq C|y - b|. \quad (5.6)$$

Nerovnost v (5.6) platí i pro $y = b$, neboť na obě strany nerovnosti jsou nulové. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z definice derivace nalezneme $\varrho_1 > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(a, \varrho_1): \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < \varepsilon. \quad (5.7)$$

Díky spojitosti g v a existuje $\varrho_2 \in (0, \varrho_1)$ takové, že platí

$$\forall x \in B(a, \varrho_2): g(x) \in B(b, \delta). \quad (5.8)$$

Pro každé $x \in P(a, \varrho_2)$ pak platí $g(x) \in B(b, \delta)$ a podle (5.6), (5.7) máme

$$\begin{aligned} \left| \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} \right| &= \frac{|f(g(x)) - f(b)|}{|x - a|} \leq \frac{C|g(x) - b|}{|x - a|} \\ &= C \cdot \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < C \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0 = f'(b) \cdot g'(a).$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.1.25. Ve Větě 5.1.24 je předpoklad spojitosti funkce g v bodě a automaticky splněn, je-li $g'(a)$ vlastní, jak plyne z Věty 5.1.15.

Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.1.24 nelze obecně vynechat, jak ukazuje následující příklad.

5.1.26. Příklad. Necht funkce f a g jsou definovány pomocí předpisů

$$f(y) = |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz $f'(g(0)) \cdot g'(0)$ má smysl, ale přesto $(f \circ g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Podobně jako v Příkladu 5.1.14 odvodíme, že $g'(0) = \infty$. Dále zřejmě platí $f'(-\frac{1}{2}) = -1$. Výraz

$$f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(-\frac{1}{2}) \cdot g'(0) = (-1) \cdot \infty = -\infty$$

tedy má smysl. Dále platí

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(f \circ g)'_-(0) = -\infty$, $(f \circ g)'_+(0) = \infty$, takže $(f \circ g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.27. Věta (derivace inverzní funkce). Nechť a je vnitřním bodem intervalu I a f je spojitá a ryze monotónní funkce na I . Označme $b = f(a)$.

(a) Nechť $f'(a)$ existuje a je nenulová. Potom platí

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Nechť $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I . Potom platí $(f^{-1})'(b) = \infty$.

(c) Nechť $f'(a) = 0$ a f je klesající na I . Potom platí $(f^{-1})'(b) = -\infty$.

Důkaz. Nejprve provedeme několik předběžných úvah, které pak využijeme v důkazech jednotlivých částí věty. Interval I je nedegenerovaný, neboť obsahuje vnitřní bod a . Z Věty 4.3.8 pak vyplývá, že množina $J = f(I)$ je interval. Dle Věty 4.3.15 navíc víme, že inverzní funkce $f^{-1}: J \rightarrow I$ je spojitá a ryze monotónní. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I , nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(a, \delta) \subset I$. Protože a je vnitřním bodem I a f je ryze monotónní, je také b vnitřním bodem J . Nalezneme tedy $\varepsilon > 0$ takové, že $B(b, \varepsilon) \subset J$. Ze spojitosti funkce f v bodě a plyne, že toto δ lze zvolit tak, aby $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon)$. Definujme pomocnou funkci φ předpisem

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P(a, \delta).$$

Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f'(a). \quad (5.9)$$

Ze spojitosti f^{-1} v bodě b plyne $\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$. Protože je f^{-1} ryze monotónní, můžeme použít Větu 4.2.22(P) pro složení vnitřní funkce f^{-1} s vnější funkcí φ a odvodit z (5.9)

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)} = \lim_{y \rightarrow b} (\varphi \circ f^{-1})(y) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f'(a). \quad (5.10)$$

(a) Podle věty o limitě podílu (Věta 4.2.1(c)) a (5.10) dostáváme

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Definujme pomocnou funkci ψ předpisem

$$\psi(y) = \frac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}, \quad y \in P(b, \varepsilon).$$

Podle (5.10) máme $\lim_{y \rightarrow b} \psi(y) = 0$. Funkce ψ je na prstencovém okolí $P(b, \varepsilon)$ kladná, neboť funkce f^{-1} je rostoucí na J . Z Věty 4.2.6 pak plyne

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{1}{\psi(y)} = \infty.$$

(c) Tvrzení dokázat obdobně jako v předchozím případě. ■

5.1.28. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in (0, \infty)$. Dokažte, že

$$g'(b) = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}, \quad b \in (0, \infty).$$

Řešení. Definujme funkci f předpisem $f(x) = x^n$, $x \in (0, \infty)$, a označme $I = J = (0, \infty)$. Potom $f: I \rightarrow J$ je na I spojitá a rostoucí. Pro funkci $g: J \rightarrow I$ platí $g = f^{-1}$. Zvolme $b \in J$. Označme $a = g(b)$, neboli $a = \sqrt[n]{b}$. Pak podle Věty 5.1.27(a) a Příkladu 5.1.12 máme

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{a}{na^n} = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$

♣

5.1.29. Není těžké ověřit, že je-li $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in [0, \infty)$, pak $g'_+(0) = \infty$.

5.1.30. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je *liché* a $g(y) = \sqrt[n]{y}$, $y \in \mathbb{R}$. Pak

$$g'(b) = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{b}}{nb} & \text{pro } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \infty & \text{pro } b = 0. \end{cases}$$

Řešení. Definujme funkci f předpisem $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, a označme $I = J = (-\infty, \infty)$. Potom $f: I \rightarrow J$ je na I spojitá a rostoucí. Pro funkci $g: J \rightarrow I$ platí $g = f^{-1}$. Zvolme $b \in J$, $b \neq 0$, a $a = g(b)$. Pak podle Věty 5.1.27(a) a Příkladů 5.1.12 a 5.1.11 dostaneme obdobně jako v Příkladu 5.1.28

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{\sqrt[n]{b}}{nb}.$$

Je-li $b = 0$, pak $a = 0$, $f'(a) = 0$, a tedy $g'(0) = \infty$ podle Věty 5.1.27(b).

♣

5.1.31. Věta (nutná podmínka existence extrému). Necht f je funkce a a je bodem lokálního extrému funkce f . Potom buď $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $f'(a)$ existuje a je různá od 0. Uvažujme nejprve případ $f'(a) > 0$. Dle Věty 4.2.8(a) nalezneme $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta): \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(a) < f(x)$ a pro každé $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(a) > f(x)$. Tedy f nemá v a lokální extrém, což je spor. Obdobně lze odvodit, že funkce f nemá v a lokální extrém ani v případě, kdy $f'(a) < 0$. ■

5.1.32. Funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, nabývá svého minima na $\mathbb{R}$ v bodě 0, ale $f'(0)$ neexistuje podle Příkladu 5.1.13.

5.1.33. Definice. Necht funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. **Druhou derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(2)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje.

Necht nyní $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní n -tou derivaci (značíme ji symbolem $f^{(n)}$). Pak $(n+1)$ -**ní derivací** funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h},$$

pokud limita existuje. V této souvislosti první derivací rozumíme již definovaný pojem derivace.

5.1.34. Označení. Druhou a třetí derivací funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ často značíme po řadě jako $f''(a)$ a $f'''(a)$.

5.1.35. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\sin^{(n)}(x)$ a $\cos^{(n)}(x)$.

Řešení. Funkce sinus. Počítejme

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \cos(x), \\ \sin''(x) &= \cos'(x) = -\sin(x), \\ \sin'''(x) &= (-\sin)'(x) = -\cos(x), \\ \sin^{(4)}(x) &= (-\cos)'(x) = \sin(x).\end{aligned}$$

Pokud n zapíšeme ve tvaru $n = 4k + j$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, snadno pomocí matematické indukce odvodíme

$$\sin^{(4k+j)}(x) = \sin^{(j)}(x).$$

Funkce kosinus. Podobně jako v předchozím případě obdržíme

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= -\sin(x), \\ \cos''(x) &= (-\sin)'(x) = -\cos(x), \\ \cos'''(x) &= (-\cos)'(x) = \sin(x), \\ \cos^{(4)}(x) &= \sin'(x) = \cos(x), \\ \cos^{(4k+j)}(x) &= \cos^{(j)}(x), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in \{0, 1, 2, 3\}.\end{aligned}$$



5.2. Věty o střední hodnotě

5.2.1. Věta (Rolle¹). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je-li $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) , pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Věty 4.3.11 nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f([a, b])$ a $M = \max f([a, b])$. Pak

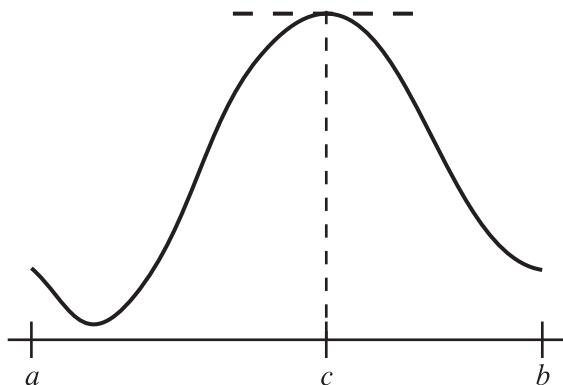
$$m \leq f(a) = f(b) \leq M. \quad (5.11)$$

Jestliže $m = M$, potom je funkce f konstantní na $[a, b]$. Z Příkladu 5.1.11 vyplývá, že $f'(c) = 0$ dokonce v každém bodě $c \in (a, b)$.

Nyní předpokládejme, že $m < M$. Potom musí být alespoň jedna z obou nerovností v (5.11) ostrá. Předpokládejme, že platí $f(b) < M$. Nalezneme $c \in [a, b]$ splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a, b\}$, a tedy $c \in (a, b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a, b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 5.1.31 tedy platí $f'(c) = 0$.

Jestliže $m < f(a)$, pak lze postupovat obdobně jako v předcházejícím případě. Alternativně je také možné použít již dokázané tvrzení na funkci $-f$. Tím je důkaz hotov. ■

5.2.2. Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.1 tak, že za předpokladů věty graf funkce f obsahuje bod $[c, f(c)]$, kde $c \in (a, b)$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s osou x .



OBRÁZEK 2.

¹Michel Rolle (1652–1719)

5.2.3. Ve Větě 5.2.1 nelze předpoklad o existenci derivace v bodech intervalu (a, b) vynechat. Například pro funkci $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, která je na intervalu $[-1, 1]$ spojitá, platí $f(-1) = f(1)$, ale funkce nemá v žádném bodě intervalu $(-1, 1)$ nulovou derivaci.

5.2.4. Věta (Lagrange²). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Myšlenka důkazu spočívá v převedení problému do situace, ve které bude možné použít Rolleovu větu (Věta 5.2.1). Definujme pomocnou funkci g předpisem

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \quad x \in [a, b].$$

Pak g je spojitá podle Věty 4.2.4 a Příkladu 4.2.5. Přímočarý výpočet navíc dává $g(a) = g(b)$. Protože v každém bodě intervalu (a, b) má funkce

$$x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \quad x \in [a, b],$$

vlastní derivaci (Příklad 5.1.12) a funkce f derivaci, existuje podle Věty 5.1.17(a) derivace g v každém bodě intervalu (a, b) . Díky Větě 5.2.1 nalezneme bod $c \in (a, b)$ splňující $g'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

dostáváme

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tedy $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

5.2.5. (a) Za předpokladů Věty 5.2.4 můžeme přírůstek funkce f na intervalu $[a, b]$, který je roven $f(b) - f(a)$, vyjádřit takto

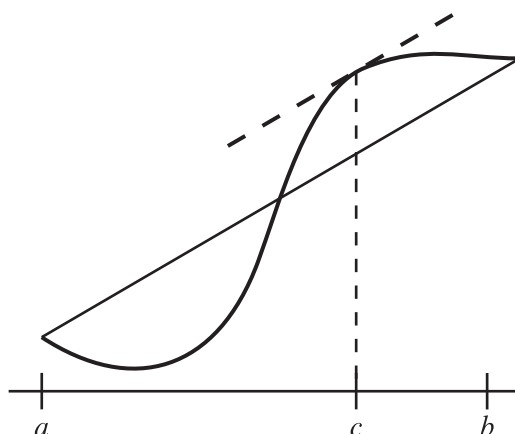
$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a),$$

tedy jako součin přírůstku proměnné x a derivace v jistém bodě c , o jehož poloze víme jen tolik, že patří do (a, b) .

(b) Uvědomme si, že ani Věta 5.2.1 ani Věta 5.2.4 neříkají nic o tom, kolik bodů c s danou vlastností existuje. Říkají pouze, že takový bod je alespoň jeden.

(c) Geometricky lze interpretovat Větu 5.2.4 tak, že za uvedených předpokladů obsahuje graf funkce f bod $[c, f(c)]$, v němž je tečna ke grafu f rovnoběžná s přímkou spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.

²Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)



OBRÁZEK 3.

5.2.6. Věta. Necht f je spojitá funkce na intervalu I , která má v každém vnitřním bodě I nezápornou (respektive kladnou, respektive zápornou, respektive nekladnou) derivaci. Pak f je neklesající (respektive rostoucí, respektive klesající, respektive nerostoucí) na I .

Důkaz. Dokážeme první variantu věty. Předpokládejme, že $a, b \in I, a < b$. Pak je funkce $f|_{[a,b]}$ spojitá na $[a, b]$ a má derivaci v každém vnitřním bodě $[a, b]$. Dle Věty 5.2.4 nalezneme bod $c \in (a, b)$ splňující

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podle předpokladu o znaménku derivace dostáváme

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \geq 0,$$

což znamená $f(a) \leq f(b)$. Funkce f je tedy neklesající. Všechny zbývající varianty tvrzení věty lze dokázat obdobně. ■

5.2.7. Předpoklad spojitosti lze ve Větě 5.2.6 vynechat, jak uvidíme ve Větě 5.5.7, jejíž důkaz je však o něco obtížnější.

5.2.8. Věta. Necht f je spojitá funkce na intervalu I , která má v každém vnitřním bodě I nulovou derivaci. Pak f je konstantní na I .

Důkaz. Podle Věty 5.2.6 je funkce f neklesající i nerostoucí na I . Funkce f je tedy konstantní na I . ■

5.2.9. Věta (limita derivace). Necht funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$.

Důkaz. Označme $L = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Díky existenci této limity nalezneme $\delta_0 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(a, \delta_0)$ je $f'(x)$ vlastní. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in (0, \delta_0)$ takové, že pro každé $z \in P_+(a, \delta)$ platí

$$f'(z) \in B(L, \varepsilon). \quad (5.12)$$

Zvolme $x \in P_+(a, \delta)$. Pak má funkce f vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, x) . Dále je f spojitá na intervalu $[a, x]$, neboť spojitost v bodech intervalu $(a, x]$ plyne z Věty 5.1.15 a spojitost v a zprava předpokládáme. Dle Věty 5.2.4 nalezneme $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Protože $c_x \in P_+(a, \delta)$, z (5.12) máme

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in B(L, \varepsilon).$$

Odtud plyne, že $f'_+(a) = L$. ■

5.2.10. (a) Tvrzení obdobná Větě 5.2.9 platí i pro derivaci zleva i pro oboustrannou derivaci.

(b) Předpoklad spojitosti ve Větě 5.2.9 nelze vynechat. Pro funkci sign platí $\lim_{x \rightarrow 0+} \text{sign}'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 0 = 0$, ale $\text{sign}'_+(0) = \infty$.

5.2.11. Věta (Cauchy). Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f a g jsou funkce spojitě na intervalu $[a, b]$, f má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci a g má v každém bodě $x \in (a, b)$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (5.13)$$

Důkaz. Díky Lagrangeově větě (Věta 5.2.4) nalezneme bod $d \in (a, b)$ takový, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Protože $g'(d) \neq 0$, dostáváme $g(a) \neq g(b)$. Položme

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a)) \cdot (g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a)) \cdot (f(b) - f(a)), \quad x \in [a, b].$$

Pak je funkce φ podle Věty 4.2.4 spojitá na $[a, b]$ a podle Věty 5.1.17(a),(b) má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci, neboť funkce

$$x \mapsto (f(x) - f(a)) \cdot (g(b) - g(a))$$

má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci a funkce

$$x \mapsto (g(x) - g(a)) \cdot (f(b) - f(a))$$

má v každém bodě intervalu (a, b) vlastní derivaci. Navíc $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Díky Větě 5.2.1 nalezneme $c \in (a, b)$ splňující $\varphi'(c) = 0$. Protože pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\varphi'(x) = f'(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(x) \cdot (f(b) - f(a)),$$

pro $x = c$ platí

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a)).$$

Odtud plyne, že $f'(c)$ je vlastní, a elementární úpravou dostáváme (5.13). ■

5.3. Elementární funkce

Již v první kapitole jsme se zabývali elementárními funkcemi. Uvedli jsme však pouze některé jejich vlastnosti a jejich konstrukcí jsme se nezabývali. Výsledky, které jsme odvodili v předchozích kapitolách, nám nyní umožní elementární funkce zkonstruovat a přesně odvodit jejich základní vlastnosti.

5.3.1. Odmocniny.

5.3.1. Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, a tedy dle Věty 4.3.15 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí funkce na $\mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, pak funkce $x \mapsto x^n$ je spojitá rostoucí funkce na $[0, \infty)$, a tedy dle Věty 4.3.15 je funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$.

V následujících příkladech odvodíme několik základních vlastností odmocnin.

5.3.2. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$ a $x, y \in \mathbb{R}$ jsou nezáporná čísla. Dokažte, že $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$.

Řešení. Označme $a = \sqrt[n]{x}$ a $b = \sqrt[n]{y}$. Potom platí $xy = a^n \cdot b^n = (ab)^n$, a tedy $\sqrt[n]{xy} = ab = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$. ♣

5.3.3. Příklad. Necht $n, k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ je nezáporné číslo. Dokažte, že $\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$.

Řešení. Plyne snadno z Příkladu 5.3.2 pomocí matematické indukce. ♣

5.3.2. Exponenciální funkce a logaritmus.

5.3.4. Označení. V následující části textu, ale i později, budeme pracovat s nekonečnými řadami tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde x i a_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou reálná čísla. Pro $x = 0, n = 0$, pak ale musíme uvažovat výraz $a_0 0^0$. Symbol 0^0 není obecně definován, zde však bude označovat číslo 1. Tato konvence umožňuje místo komplikovanějšího zápisu $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ psát pouze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

5.3.5. Definice. Exponenciální funkci $\exp$ definujeme pro $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (5.14)$$

5.3.6. Věta (základní vlastnosti funkce $\exp$). Funkce $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dobře definována a splňuje:

$$(E1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y),$$

$$(E2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

Důkaz. *Korektnost definice.* Z řešení Příkladu 3.9.23 vyplývá, že řada na pravé straně rovnosti (5.14) je absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce $\exp$ je tedy předpisem (5.14) dobře definována na množině $\mathbb{R}$.

Ověření (E1). Zvolme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom z binomické věty (Věta 1.5.6) plyne, že

$$\begin{aligned} \exp(x + y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{n-k} y^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Poslední výraz v (5.15) je Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ (vizte 3.6.6). Obě tyto řady jsou absolutně konvergentní, takže podle Mertensovy věty (Věta 3.6.2) a 3.6.6 je řada $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}$ konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right),$$

tedy $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Ověření (E2). Necht $x \in \mathbb{R}$, $0 < |x| \leq 1$. Potom podle (5.14) platí:

$$\left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\exp(x) - 1 - x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \left| x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right|.$$

Protože $|x| \leq 1$ a $n-2 \geq 0$ pro každé $n \geq 2$, dostáváme z Věty 3.4.3 a Příkladu 3.8.7, že

$$\left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-2}}{n!} \leq |x| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq e|x|.$$

Zřejmě platí $\lim_{x \rightarrow 0} e|x| = 0$, a tedy dle věty o dvou strážnících (Věta 4.2.9) platí také $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| = 0$. Podle Věty 4.1.19 tudíž platí $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right) = 0$. Odtud plyne tvrzení (E2). ■

5.3.7 (vlastnosti exponenciální funkce). Nyní uvedeme několik vlastností exponenciální funkce, které odvodíme *pouze* z výroků (E1) a (E2). To znamená, že se nebudeme odvolávat na předpis (5.14) ale pouze na (E1) a (E2). Tento přístup nám později umožní dokázat, že exponenciální funkce je svými vlastnostmi (E1) a (E2) jednoznačně určena.

(E3) Platí $\exp(0) = 1$.

Podle (E1) platí $\exp(0) = \exp(0+0) = (\exp(0))^2$. To znamená, že buď $\exp(0) = 1$, nebo $\exp(0) = 0$. Předpokládejme, že $\exp(0) = 0$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ podle (E1) platí $\exp(x) = \exp(x+0) = \exp(x)\exp(0) = 0$. Tedy z (E2) vyplývá, že $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x}$, což je spor. Platí tedy $\exp(0) = 1$.

(E4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp'(x) = \exp(x)$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom podle definice derivace a (E1) platí

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x+0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)\exp(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}. \end{aligned}$$

Odtud podle (E2) a (E3) plyne, že

$$\exp'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

(E5) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Z (E1) a (E3) plyne $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x)$, odkud již snadno plyne naše tvrzení.

(E6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x) > 0$.

Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Z (E5) plyne $\exp(x) \neq 0$. Dle (E1) platí

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

(E7) Funkce $\exp$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

Podle (E4) má funkce $\exp$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.1.15.

(E8) Funkce $\exp$ je rostoucí na $\mathbb{R}$.

Podle (E4) a (E6) platí $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.2.6.

(E9) Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.

Z (E3) a (E8) plyne $\exp(1) > \exp(0) = 1$. Odtud, z (E1) a Příkladu 2.3.34 dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(1))^n = \infty.$$

To znamená, že funkce $\exp$ není shora omezená. Zároveň je podle (E8) rostoucí, a tedy z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.27) plyne, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$. Odtud plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Podle Věty 4.2.22(P) a (E5) platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Tím jsou dokázána obě požadovaná tvrzení.

(E10) Platí $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

Podle (E7) a Věty 4.3.8 je množina $\mathcal{H}(\exp)$ interval. Podle (E6) pak platí $\mathcal{H}(\exp) \subset (0, \infty)$. Díky (E9) pak dostáváme $\mathcal{H}(\exp) = (0, \infty)$.

5.3.8. Věta. Existuje právě jedna funkce definovaná na $\mathbb{R}$ splňující podmínky (E1) a (E2).

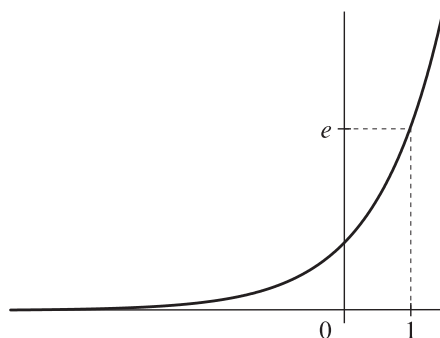
Důkaz. Existence funkce splňující podmínky (E1) a (E2) plyne z Definice 5.3.5 a Věty 5.3.6. Dokážeme nyní její jednoznačnost.

Předpokládejme, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňují podmínky (E1) a (E2), kde je $\exp$ nahrazeno f , respektive g . Ukážeme, že pak již nutně platí $f = g$.

Z 5.3.7 vyplývá, že funkce f splňuje všechny podmínky (E3)–(E10), neboť k jejich odvození jsme využili pouze podmínky (E1) a (E2). Obdobně je tomu pro funkci g . Platí tedy $f(0) = g(0) = 1$ podle (E3) a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) = f(x)$ a $g'(x) = g(x)$ podle (E4). Z podmínky (E6) vyplývá, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x) \neq 0$. Pomocí Věty 5.1.17(c) tudíž dostáváme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0.$$

Podle Věty 5.2.8 je funkce $\frac{f}{g}$ konstantní na $\mathbb{R}$, tedy existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\frac{f(x)}{g(x)} = c$. Protože $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$, platí $c = 1$. Odtud plyne, že $f = g$. ■



OBRÁZEK 4. Graf exponenciální funkce

5.3.9. Podle Příkladu 3.8.7 platí $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Ze vzorce (5.14) tedy plyne

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

5.3.10. Definice.

- (a) Funkce $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci $\exp$. Nazývá se **(přirozeným) logaritmem**.
- (b) Je-li $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme funkci $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu a** . V případě $a = e$ píšeme pouze $\log$ místo $\log_e$.

- (c) Necht' $a \in \mathbb{R}, a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log a)$.
- (d) Necht' $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

5.3.11 (vlastnosti přirozeného logaritmu).

(L1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$.

Platí $\mathcal{D}(\log) = \mathcal{H}(\exp)$, a proto tvrzení plyne z (E10).

(L2) Platí $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$.

Tvrzení plyne z faktu $\mathcal{H}(\log) = \mathcal{D}(\exp)$.

(L3) Funkce $\log$ je rostoucí na $(0, \infty)$.

Funkce $\exp$ je rostoucí, a proto je podle Věty 4.3.15 rostoucí i funkce $\log$.

(L4) Funkce $\log$ je spojitá na $(0, \infty)$.

Tvrzení plyne z Věty 4.3.15.

(L5) Pro každá $x, y \in (0, \infty)$ platí $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Zvolme $x, y \in (0, \infty)$ a označme $a = \log x$ a $b = \log y$. Pak

$$xy = \exp(a) \exp(b) = \exp(a + b) = \exp(\log(x) + \log(y)),$$

a tedy $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(L6) Pro každé $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ platí $\log a^b = b \log a$.

Pro příslušná a, b platí podle definice obecné mocniny

$$\log a^b = \log(\exp(b \log a)) = b \log a.$$

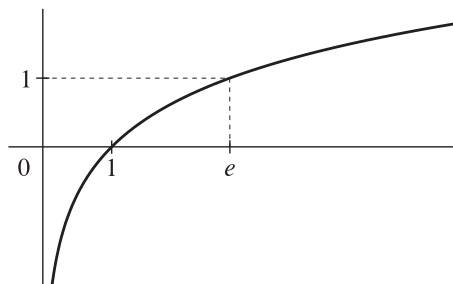
(L7) Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27(a)) a (E4) platí pro $x \in (0, \infty)$ vztah

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L8) Platí $\lim_{x \rightarrow 0+} \log x = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty$.

Podle (L3) je funkce $\log$ rostoucí, takže z věty o limitě monotónní funkce (Věta 4.2.27(a)) plyne $\lim_{x \rightarrow 0+} \log x = \inf \mathcal{H}(\log)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \sup \mathcal{H}(\log)$. Z (L2) pak vyplývá naše tvrzení.



OBRÁZEK 5. Graf funkce logaritmus

5.3.12 ((ne)soulad definic mocniny). V Definici 5.3.10(c) jsme provedli rozšíření výrazu a^b na všechny reálné exponenty b za předpokladu, že základ a je větší než 0. Doposud jsme měli korektně definován výraz a^b , $a > 0$, pouze pro případ, kdy b bylo číslo celé. Nová definice dává podle vlastnosti (L6) v tomto případě totéž, a je tedy rozšířením definice původní. Výraz a^b máme tedy definován v těchto případech:

- $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ libovolné,
- $a \in \mathbb{R}$ libovolné a $b \in \mathbb{N}$,
- $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b < 0$.

5.3.13. (a) Místo $\exp(x)$ často píšeme e^x , neboť podle definice obecné mocniny jsou si tyto výrazy rovny.

(b) Necht f a g jsou reálné funkce definované na množině $M \subset \mathbb{R}$, přičemž $f: M \rightarrow (0, \infty)$. Potom symbolem $f(x)^{g(x)}$ budeme označovat funkci definovanou na množině M předpisem $x \mapsto \exp(g(x) \log f(x))$.

5.3.3. Goniometrické funkce.

5.3.14 (goniometrické funkce v geometrii a matematické analýze).

Při odvozování některých vlastností elementárních funkcí v tomto oddílu využijeme následující lemma.

5.3.15. Lemma. Necht $x \in \mathbb{R}$. Potom existuje kladné $C \in \mathbb{R}$ (závisící na x) takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $h \in (-1, 1)$ platí

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 C^n. \quad (5.16)$$

Důkaz. Položme $C = 2(|x| + 1)$. Pokud $n = 1$, pak tvrzení triviálně platí. Z binomické věty pro $n \geq 2$ a $h \in (-1, 1)$ dostáváme

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

Využitím nerovností $|x| \leq |x| + 1$, $1 \leq |x| + 1$ a $|h| < 1$ obdržíme

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \leq \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (|x| + 1)^n h^2 \\ &\leq h^2 (|x| + 1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Podle Příkladu 1.8.5 platí $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Pak dostáváme

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 (|x| + 1)^n 2^n = h^2 C^n.$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.3.16. Definice. Funkci **sinus**, značíme $\sin$, a **kosinus**, značíme $\cos$, definujeme předpisy

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.17)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

5.3.17. Věta (základní vlastnosti sinu a kosinu). Funkce sinus a kosinus jsou dobře definované a splňují

(G1) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$

(G2) pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

(G3) $\sin$ je lichá funkce a $\cos$ je sudá funkce,

(G4) existuje právě jedno kladné reálné číslo π takové, že $\sin$ je rostoucí na $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$ a $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,

(G5) $\sin'(0) = 1$.

Důkaz. Podle řešení Příkladu 3.9.24 obě řady konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou tedy dobře definovány.

Nejprve dokážeme, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}: \sin'(x) = \cos(x). \quad (5.19)$$

Zvolme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in \mathbb{R}$ díky Důsledku 3.1.19 platí

$$\begin{aligned} & \sin(x+h) - \sin(x) - h \cos(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x+h)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} ((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Podle Lemmatu 5.3.15 nalezneme pro $x \in \mathbb{R}$ kladné C takové, že pro každé $h \in \mathbb{R}$, $|h| < 1$, platí

$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \leq C^{2n+1}h^2. \quad (5.21)$$

Odtud a z (5.20) dostáváme, že pro každé $h \in P(0, 1)$ platí

$$\begin{aligned} |\sin(x+h) - \sin(x) - h \cos(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} h^2 \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) h^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}$ konverguje podle podílového kritéria. Odtud pak plyne

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x+h) - \sin(x) - h \cos(x)}{h} \right| = 0,$$

neboli

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x).$$

Obdobně lze odvodit vztah

$$\forall x \in \mathbb{R}: \cos'(x) = -\sin(x). \quad (5.23)$$

Nyní ověříme vlastnosti (G1)–(G5).

(G1) a (G2) Zvolme $a \in \mathbb{R}$ a pro $x \in \mathbb{R}$ definujme

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (\sin(x+a) - \sin(x)\cos(a) - \sin(a)\cos(x))^2 \\ &\quad + (\cos(x+a) - \cos(x)\cos(a) + \sin(a)\sin(x))^2. \end{aligned}$$

Přímočarý výpočet spolu s (5.19) a (5.23) dává, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\psi'(x) = 0$. Protože

$$\psi(0) = (\sin(a) - \sin(a))^2 + (\cos(a) - \cos(a))^2 = 0,$$

dostáváme $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy také dokazované vztahy z (G1) a (G2).

(G3) Ze vztahu (5.17) plyne, že funkce $\sin$ je lichá. Podobně z (5.18) plyne, že funkce $\cos$ je sudá.

(G4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ díky Příkladu 3.8.16 platí

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)} \right). \end{aligned}$$

Pokud $x \in (0, 2)$, potom jsou členy předchozí řady kladné a platí $\sin(x) > 0$. Podle Věty 5.2.6 a (5.23) je funkce $\cos$ klesající na intervalu $(0, 2)$. Ze vztahu

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} + \frac{x^{4n+4}}{(4n+4)!} \right) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4n+3)(4n+4)} \right)\end{aligned}$$

plyne

$$\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2!} \left(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4} \right) = -\frac{1}{3} < 0.$$

Díky této nerovnosti, vztahu $\cos(0) > 0$ a spojitosti funkce kosinus existuje podle Věty 4.3.6 právě jedno $\alpha \in (0, 2)$ takové, že $\cos(\alpha) = 0$. Tedy funkce $\cos$ je na intervalu $(0, \alpha)$ kladná. Odtud a z (5.19) plyne, že funkce $\sin$ je rostoucí na $[0, \alpha]$ (Věta 5.2.6). Položme nyní $\pi = 2\alpha$. Podle (G2) a (G3) platí

$$1 = \cos(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

a tedy $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Poněvadž $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$, platí $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Podle (5.17) snadno ověříme, že $\sin(0) = 0$. Tím jsou vlastnosti popsané v (G4) ověřeny.

(G5) Podle (5.18) máme $\cos(0) = 1$, a tedy podle (5.19) platí $\sin'(0) = \cos(0) = 1$. ■

5.3.18 (vlastnosti sinu a kosinu). K odvození vlastností funkcí sinus a kosinus použijeme *pouze* vlastnosti (G1)–(G5).

(G6) Platí $\cos(0) = 1$.

Z (G1) a (G4) dostáváme

$$\begin{aligned}1 &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(0) \\ &= 1 \cdot \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 0 = \cos(0).\end{aligned}$$

(G7) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Z (G2) a (G3) máme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$1 = \cos(x - x) = \cos(x) \cos(-x) - \sin(x) \sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

(G8) Platí $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Tvrzení plyne z (G4) a (G7).

(G9) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ a $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

Podle (G1), (G2), (G4) a (G8) platí

$$\begin{aligned}\sin(x + \pi) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), \\ \cos(x + \pi) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x).\end{aligned}$$

(G10) Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou 2π -periodické.

Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Potom podle (G9) platí $\sin(x + 2\pi) = -\sin(x + \pi) = \sin x$ a $\cos(x + 2\pi) = -\cos(x + \pi) = \cos(x)$.

(G11) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin'(x) = \cos(x)$.

Spočteme nejprve dvě limity, které budeme potřebovat při odvození derivace funkce $\sin$. Podle (G4) a (G5) platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = 1.$$

Podle vztahu (G2) platí pro každé $h \in \mathbb{R}$ rovnost $\cos(h) = \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Podle (G7) pak obdržíme vztah $\cos(h) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$. Tento vztah použijeme v následujícím výpočtu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h^2} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ počítejme

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h^2} h + \cos(x) \frac{\sin(h)}{h} \right) \\ &= \sin(x) \cdot \frac{-1}{2} \cdot 0 + \cos(x) \cdot \sin'(0) = \cos(x).\end{aligned}$$

(G12) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí podle (G1), (G4) a (G8) vztah $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$, a tedy také $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme podle věty o derivaci složené funkce

$$\cos'(x) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin(x).$$

(G13) Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Funkce $\sin$ a $\cos$ mají v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, a tedy jsou podle Věty 5.1.15 v x spojité.

(G14) Platí $\sin(x) = 0$ právě tehdy, když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Funkce $\sin$ je 2π -periodická podle (G10). Stačí tedy určit nulové body v intervalu $[0, 2\pi)$. Podle (G4) platí, že $\sin(0) = 0$ a funkce $\sin$ je kladná na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Odtud, podle Věty 5.2.6 a podle (G12) je $\cos$ klesající na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Díky (G8) dostáváme, že funkce $\cos$ je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$ kladná. Ze vztahů $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ a $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ dostáváme, že funkce $\sin$ je nulová v intervalu $[0, 2\pi)$ právě v bodech 0 a π .

(G15) Platí $\cos(x) = 0$ právě tehdy, když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení plyne z (G14) a vztahu $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

5.3.19. Věta. Trojice $(\sin, \cos, \pi)$ je vlastnostmi (G1)–(G5) určena jednoznačně.

Důkaz. Předpokládejme, že trojice $(\sin^*, \cos^*, \pi^*)$ splňuje vlastnosti (G1)–(G5). Položme

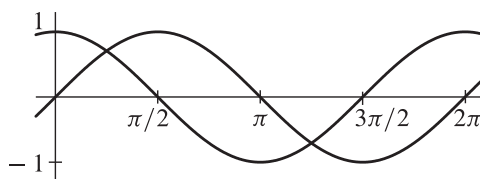
$$\varphi(x) = (\sin(x) - \sin^*(x))^2 + (\cos(x) - \cos^*(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2(\sin(x) - \sin^*(x)) \cdot (\cos(x) - \cos^*(x)) \\ &\quad + 2(\cos(x) - \cos^*(x)) \cdot (-\sin(x) + \sin^*(x)) = 0. \end{aligned}$$

Tedy je dle Věty 5.2.8 funkce φ konstantní na $\mathbb{R}$. V bodě 0 je však nulová, a tedy $\varphi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Proto je $\sin = \sin^*$ a $\cos = \cos^*$. Odtud a díky (G4) platí $\pi = \pi^*$ a důkaz je hotov. ■

5.3.20. Poznámka. Vzhledem k tomu, že již bylo zavedeno číslo π a obecná mocnina, máme zavedeno také reálné číslo π^π , o němž jsme se zmínili v 1.1.2.



OBRÁZEK 6. Grafy funkcí sinus a kosinus

5.3.21. Definice. Funkce **tangens**, značíme ji tg , a **kotangens**, značíme ji cotg , definujeme předpisy

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ \operatorname{cotg}(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

5.3.22 (vlastnosti funkce tangens).

(G16) Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Plyne z (G13) pomocí Věty 4.2.4.

(G17) Funkce tg je lichá.

Plyne z (G3).

(G18) Funkce tg je π -periodická.

Je-li $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$, pak také $x + \pi \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ a $x - \pi \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ podle (G15). Pro $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ pak máme podle (G9)

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg}(x).$$

(G19) Pro každé $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$ platí $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Podle věty o derivaci podílu (Věta 5.1.17(c)), (G7), (G11) a (G12) dostaneme pro každé $x \in \mathcal{D}(\operatorname{tg})$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

(G20) Funkce tg je rostoucí na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Funkce $\cos$ je na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ kladná, a tedy je derivace funkce tg na tomto intervalu kladná. Z Věty 5.2.6 pak plyne, že funkce tg je rostoucí na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

(G21) Platí $\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi) = 1$.

Díky (G2), (G7, a (G8) dostáváme $0 = \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{4})$. Odtud plyne $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, neboť podle (G4) je $\sin(\frac{\pi}{4}) > 0$. Podobně obdržíme $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Odtud již plyne dokazovaný vztah.

(G22) Platí $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg}(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg}(x) = -\infty$.

Tvrzení plyne z poznámky za Větou 4.2.6 a vlastností funkcí sinus a kosinus.

(G23) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.

Funkce tg je spojitá na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a zobrazuje tento interval opět na interval (Věta 4.3.8), který podle předchozího tvrzení není omezený ani shora ani zdola. Musí tedy být $\operatorname{tg}((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$, čímž je tvrzení dokázáno.

5.3.23 (vlastnosti funkce kotangens). Při důkazu následujících vlastností lze postupovat stejně jako v případě funkce tangens, a proto odvození již uvádět nebudeme.

(G21) Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

(G22) Funkce cotg je lichá.

(G23) Funkce cotg je periodická s periodou π .

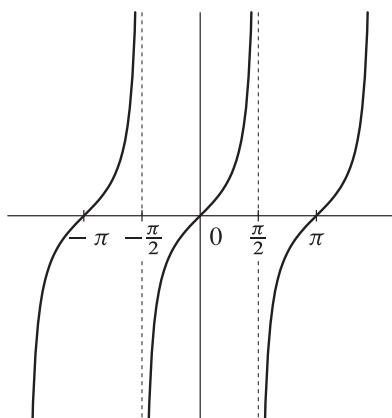
(G24) Funkce cotg je klesající na intervalu $(0, \pi)$.

(G25) Platí $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{cotg}(x) = \infty$.

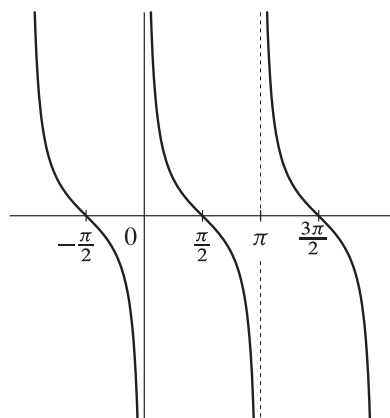
(G26) Platí $\lim_{x \rightarrow \pi-} \operatorname{cotg}(x) = -\infty$.

(G27) Platí $\operatorname{cotg}(\frac{1}{4}\pi) = 1$.

(G28) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$.



OBRÁZEK 7. Graf funkce tangens



OBRÁZEK 8. Graf funkce kotangens

5.3.4. Cyklometrické funkce.

5.3.24. Žádná z goniometrických funkcí nemá funkci inverzní, protože goniometrické funkce nejsou prosté. Pokud však uvažujeme zúžení těchto funkcí na vhodné intervaly, pak můžeme k těmto zúženým funkcím definovat funkce inverzní.

5.3.25. Definice. Cyklometrické funkce arkussinus ($\arcsin$), arkuskosinus ($\arccos$), arkustangens ($\arctg$) a arkuskotangens ($\operatorname{arccotg}$) definujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\arcsin &= (\sin |_{[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]})^{-1}, \\ \arccos &= (\cos |_{[0, \pi]})^{-1}, \\ \arctg &= (\operatorname{tg} |_{(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)})^{-1}, \\ \operatorname{arccotg} &= (\operatorname{cotg} |_{(0, \pi)})^{-1}.\end{aligned}$$

5.3.26 (vlastnosti arkussinu).

(AS1) Platí $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$ a $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$.

(AS2) Funkce $\arcsin$ je lichá, rostoucí a spojitá na $[-1, 1]$.

(AS3) Následující rovnosti plynou z .

$$\begin{aligned}\arcsin(-1) &= -\frac{1}{2}\pi, & \arcsin(0) &= 0, \\ \arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{2}) &= \frac{1}{4}\pi, & \arcsin(1) &= \frac{1}{2}\pi.\end{aligned}$$

(AS4) Platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Funkce $\arcsin$ je prostá, a proto $\arcsin x \neq 0$ pro každé $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. Užitím Věty 4.2.22(P) a vlastnosti funkce sinus dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = 1.$$

Odtud po algebraické úpravě plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1.$$

Dokazovaný vztah nyní plyne z Věty 4.2.1(c) o limitě podílu.

(AS5) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Pro dané $y \in (-1, 1)$ nalezneme $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ splňující $\sin(x) = y$. Podle Věty 5.1.27 platí

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(AS6) Platí $\arcsin'_+(-1) = \infty$ a $\arcsin'_-(1) = \infty$.

V bodě 1 počítejme dle Věty 5.2.9

$$\arcsin'_-(1) = \lim_{y \rightarrow 1-} \arcsin'(y) = \lim_{y \rightarrow 1-} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \infty.$$

Obdobně odvodíme $\arcsin'_+(-1) = \infty$.

(AS7) Pro každé $x \in [-1, 1]$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Vezměme libovolné $x \in [-1, 1]$ a označme $y = \arcsin x$. Potom platí $x = \sin y = \cos(\frac{1}{2}\pi - y)$. Protože $y \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, je $\frac{1}{2}\pi - y \in [0, \pi]$, a tedy $\arccos x = \frac{1}{2}\pi - y = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$, odkud již plyne dokazovaná rovnost.

5.3.27 (vlastnosti arkuskosinu).

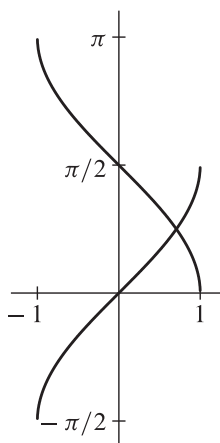
(AC1) Platí $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a $\mathcal{H}(\arccos) = [0, \pi]$.

(AC2) Funkce $\arccos$ je klesající a spojitá na $[-1, 1]$.

(AC3) Následující rovnosti plynou ze známých vlastností funkcí $\sin$ a $\cos$.

$$\begin{aligned} \arcsin(-1) &= -\frac{1}{2}\pi, & \arccos(-1) &= \pi, \\ \arcsin(0) &= 0, & \arccos(0) &= \frac{1}{2}\pi, \\ \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{1}{4}\pi, & \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{1}{4}\pi, \\ \arcsin(1) &= \frac{1}{2}\pi, & \arccos(1) &= 0. \end{aligned}$$

(AC4) Pro každé $y \in (-1, 1)$ platí $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.



OBRÁZEK 9. Grafy funkcí arkussinus a arkuskosinus

5.3.28 (vlastnosti funkce arkustangens).

(ATa1) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

(ATa2) Funkce arctg je spojitá, rostoucí a lichá na $\mathbb{R}$.

(ATa3) Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\pi$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{2}\pi$.

(ATa4) Platí $\operatorname{arctg}(0) = 0$, $\operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{1}{4}\pi$.

(ATa5) Platí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

(ATa6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$.

5.3.29 (vlastnosti funkce arkuskotangens).

(ACo1) Platí $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

(ACo2) Funkce $\operatorname{arccotg}$ je spojitá a klesající funkce na $\mathbb{R}$.

(ACo3) Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg}(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg}(x) = \pi$.

(ACo4) Platí $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{1}{2}\pi$ a $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{1}{4}\pi$.

(ACo5) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$.

(ACo6) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.

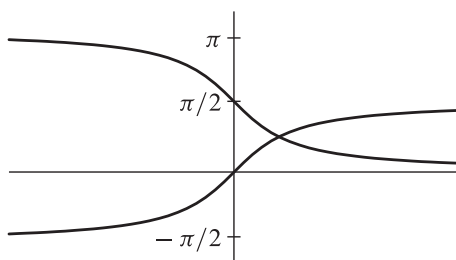
Nechť $I = (0, \pi)$ a necht' $f(y) = \cotg y$, $y \in (0, \pi)$. Potom inverzní funkce f^{-1} je definována na $\mathbb{R}$ a splňuje $f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pro každé $y \in (0, \pi)$ platí

$$f'(y) = \frac{-1}{\sin^2(y)} = -(1 + \cotg^2 y),$$

a tedy f je spojitá a klesající na I . Necht' $x \in \mathbb{R}$ a $y = \operatorname{arccotg}(x)$. Potom $y \in (0, \pi)$ a $x = \cotg(y)$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27(a)) tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg}'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{-1}{1 + \cotg^2(y)} = \frac{-1}{1 + x^2},$$

což jsme chtěli dokázat.



OBRÁZEK 10. Grafy funkcí arkustangens a arkuskotangens

5.4. L'Hôpitalovo pravidlo

5.4.1. Věta (L'Hôpitalovo³ pravidlo). Necht $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce, existuje

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a platí

- (a) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, nebo
 (b) $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = \infty$.

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Důkaz. Označme

$$L = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (5.24)$$

Dokažme nejprve následující pomocné tvrzení.

Pomocné tvrzení.

- (i) Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje $\alpha > L$, pak existuje $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta): \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

- (ii) Jestliže $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$, pak existuje $\delta' > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta'): \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz pomocného tvrzení. (i) Zvolme $r \in (L, \alpha)$. Díky předpokladu existence limity v (5.24) nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že funkce f a g jsou definované na $P_+(a, \delta_1)$, f zde má vlastní derivaci, g zde má vlastní nenulovou derivaci a platí

$$\forall x \in P_+(a, \delta_1): \frac{f'(x)}{g'(x)} < r. \quad (5.25)$$

Vezměme nyní libovolná $x, y \in P_+(a, \delta_1)$, $x < y$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.11) aplikované na f a g na intervalu $[x, y]$ existuje $c \in (x, y)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (5.26)$$

Pro každé $x, y \in P_+(a, \delta_1)$, $x < y$, tedy podle (5.25) a (5.26) platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r. \quad (5.27)$$

³Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661–1704)

Je splněna podmínka (a). Potom pro pevné $y \in P_+(a, \delta_1)$ dostaneme podle (5.27)

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < \alpha.$$

Nyní stačí položit $\delta = \delta_1$.

Je splněna podmínka (b). Zvolme pevně $\tilde{y} \in P_+(a, \delta_1)$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a+} r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} = r + 0 = r < \alpha. \quad (5.28)$$

Existuje tedy $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2): r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha. \quad (5.29)$$

Navíc díky podmínce (b) můžeme požadovat, aby platilo

$$\forall x \in P_+(a, \delta_2): \frac{g(\tilde{y})}{g(x)} < 1. \quad (5.30)$$

Nechť $x \in P_+(a, \delta_2)$. Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \cdot \frac{g(x) - g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\ &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

S pomocí (5.29), (5.30) a (5.31) odhadneme

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha.$$

Nyní stačí položit $\delta = \delta_2$.

(ii) Podle (5.24) platí $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{-f(x)}{g(x)} = -L$. Předpokládejme, že $\beta \in \mathbb{R}$ splňuje $\beta < L$. Potom platí $-\beta > -L$. Již dokázanou část (i) použijeme pro $\alpha = -\beta$ a nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P_+(a, \delta): \frac{-f(x)}{g(x)} < -\beta.$$

Nyní stačí položit $\delta' = \delta$ a tvrzení je dokázáno. ■

Vlastní důkaz. Pokud $L = -\infty$, respektive $L = \infty$, tvrzení věty plyne okamžitě z (i), respektive z (ii). Nechť $L \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Použijeme (i) pro $\alpha = L + \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta > 0$. Dále použijeme (ii) pro $\beta = L - \varepsilon$ a obdržíme příslušné $\delta' > 0$. Pro každé $x \in P_+(a, \min\{\delta, \delta'\})$ dostaneme

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (\beta, \alpha) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = B(L, \varepsilon),$$

což dokazuje naši větu. ■

5.4.2. Věta 5.4.1 platí i pro limity zleva a oboustranné limity.

5.4.3. Příklad. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(x - \sin(x))' = 1 - \cos(x)$, $(x - \sin(x))'' = \sin(x)$ a $(x^3)' = 3x^2$, $(x^3)'' = 6x$. Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}$, dostáváme použitím l'Hospitalova pravidla 5.4.1(a) rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Dalším použitím l'Hospitalova pravidla 5.4.1(a) obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

♣

5.4.4. Příklad. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, platí vztahy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \log x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^\alpha = 0.$$

Řešení. Použijeme l'Hospitalovo pravidlo 5.4.1(b) a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \log x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

Pro výpočet druhé limity nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $\alpha < n$. Pak n -násobné užití Věty 5.4.1(b) dává

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Protože $0 \leq e^{-x} x^\alpha \leq e^{-x} x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$, platí $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^\alpha = 0$ dle Věty 4.2.9. ♣

5.4.5. Obecně není pravda, že z existence $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ můžeme něco usoudit o $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Například platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x + \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + \frac{\sin(x)}{x}} = -\infty,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1 + \cos(x)}$$

neexistuje, neboť funkce $x \mapsto \frac{2x}{1 + \cos(x)}$ není definována na žádném okolí bodu $-\infty$.

5.4.6. L'Hospitalovo pravidlo není vždy vhodným nástrojem pro výpočet limity. Přímočaré použití l'Hospitalova pravidla pro limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

vede k limitě

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Výpočet poslední limity není však snazší než výpočet původní limity.

5.4.7. Poznámka. Uvažujme

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \quad \text{a} \quad g(x) = f(x)e^{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sin(x)}} \quad (5.32)$$

neexistuje. Na druhou stranu, počítáme-li pomocí l'Hospitalova pravidla (Věta 5.4.1), dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)e^{\sin(x)} + f(x)e^{\sin(x)}\cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}(\cos(x) + f(x))} = 0, \end{aligned} \quad (5.33)$$

což nesouhlasí s (5.32). Chybné použití l'Hospitalova pravidla spočívá v tom, že výraz $\frac{f'}{g'}$ není definovaný na žádném okolí ∞ , tj. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ z definice neexistuje. Druhá rovnost ve výpočtu (5.33) je tedy chybná.

5.5. Monotónní funkce

5.5.1. Definice. Necht $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je

- **rostoucí v bodě a** , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(x) < f(a)$ a pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(x) > f(a)$,
- **klesající v bodě a** , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(x) > f(a)$ a pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(x) < f(a)$,
- **neklesající v bodě a** , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(x) \leq f(a)$ a pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(x) \geq f(a)$,
- **nerostoucí v bodě a** , pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(x) \geq f(a)$ a pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Podobně definujeme, že funkce f je **rostoucí v a zprava** apod.

5.5.2. Je-li funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ rostoucí na intervalu I , pak je zřejmě rostoucí v každém vnitřním bodě intervalu I a rostoucí zprava či zleva v eventuálních krajních bodech intervalu I .

5.5.3. Lemma. Necht $a \in \mathbb{R}$ a funkce f splňuje $f'_+(a) > 0$. Pak je f rostoucí v a zprava.

Důkaz. Dle Věty 4.2.8(a) existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Pak zřejmě pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(x) > f(a)$, takže je f rostoucí zprava v a . ■

5.5.4. Zřejmé modifikace výše uvedené věty platí pro derivaci zleva, oboustrannou derivaci i případy, kdy je příslušná derivace menší než 0.

5.5.5. Je-li funkce f rostoucí v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak obecně nemusí existovat $\delta > 0$ takové, že f je monotónní na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$. Stačí vzít

$$f(x) = 2 \cdot \text{sign } x + D(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde D je Dirichletova funkce (vizte 4.4.10), a uvažovat bod $a = 0$. Potom pro každé $x < 0$ platí $f(x) = -2 + D(x) \leq -1 < 0 = f(0)$ a podobně pro každé $x > 0$ platí $f(x) = 2 + D(x) \geq 2 > f(0)$. Funkce f je tedy rostoucí v 0. Díky chování Dirichletovy funkce není f monotónní na žádném neprázdném otevřeném intervalu.

5.5.6. Lemma. Necht I je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.

- (a) Necht f je funkce rostoucí v každém vnitřním bodě I , rostoucí zleva v pravém krajním bodě I , pokud patří do I , a rostoucí zprava v levém krajním bodě I , pokud patří do I . Potom je f rostoucí na I .
- (b) Necht f je funkce neklesající v každém vnitřním bodě I , neklesající zleva v pravém krajním bodě I , pokud patří do I , a neklesající zprava v levém krajním bodě I , pokud patří do I . Potom je f neklesající na I .

Důkaz. (a) Necht $a, b \in I$, $a < b$. Chceme dokázat, že $f(a) < f(b)$. Definujme množinu $M = \{c \in (a, b]; f(c) > f(a)\}$. Pak M je shora omezená, neboť b je horní závorou M . Funkce f je rostoucí zprava v bodě a , a proto existuje $\delta_1 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(a, \delta_1)$ platí $f(x) > f(a)$. Pak $(a, b] \cap P_+(a, \delta_1) \subset M$, a tedy $M \neq \emptyset$. Položme $s = \sup M$. Pak zřejmě $a < s \leq b$. Funkce f je rostoucí v bodě s zleva, a proto můžeme nalézt $\delta_2 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_-(s, \delta_2)$ platí $f(x) < f(s)$. Podle definice suprema existuje $t \in M \cap P_-(s, \delta_2)$. Pak máme $f(a) < f(t) < f(s)$, a tedy $s \in M$.

Dokážeme nyní, že $s = b$. Pro spor předpokládejme $s < b$. Funkce f je rostoucí v bodě s zprava, a proto můžeme nalézt $\delta_3 > 0$ takové, že pro každé $x \in P_+(s, \delta_3)$ platí $f(x) > f(s)$. Pak tedy libovolné $u \in P_+(s, \delta_3) \cap (s, b)$ splňuje $f(a) < f(s) < f(u)$, což znamená $u \in M$. To je ale spor s faktem $s = \sup M$. Tím je rovnost $s = b$ dokázána.

Poněvadž $s \in M$, máme $f(b) = f(s) > f(a)$. Tím je nerovnost $f(a) < f(b)$ dokázána.

- (b) Necht $a, b \in M$, $a < b$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Definujme pomocnou funkci předpisem

$$g(x) = f(x) + \varepsilon x, \quad x \in I.$$

Funkce g splňuje předpoklady v již dokázaném tvrzení (a), a je tedy rostoucí na I . Pak platí $f(a) + \varepsilon a = g(a) < g(b) = f(b) + \varepsilon b$. Jelikož ε je libovolné, platí $f(a) \leq f(b)$. Tím je důkaz dokončen. ■

Následující věta ukazuje vztah monotonie a znaménka derivace a narozdíl od Věty 5.2.6 nepracuje s předpokladem spojitosti.

5.5.7. Věta. Necht I je interval a funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má v každém bodě I kladnou (respektive nezápornou, zápornou, nekladnou) derivaci, přičemž v krajních bodech I , pokud patří do I , uvažujeme příslušné jednostranné derivace. Pak f je rostoucí (respektive neklesající, klesající, nerostoucí) na I .

Důkaz. Dokážeme pouze první variantu věty, důkazy ostatních jsou obdobné. Podle Lemmatu 5.5.3 a 5.5.4 je funkce f v každém vnitřním bodě I rostoucí, v levém krajním bodě je rostoucí zprava, pokud tento bod patří do I , v pravém krajním bodě je rostoucí zleva, pokud tento bod patří do I . Z Lemmatu 5.5.6 pak plyne, že f je rostoucí na I . ■

5.6. Konvexní a konkávní funkce

V tomto oddílu se seznámíme s dalšími pojmy, které jsou vhodné pro popsání průběhu funkce.

5.6.1. Definice. Necht I je interval a f je funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je

- **konvexní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I \quad \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konvexní** na I , jestliže

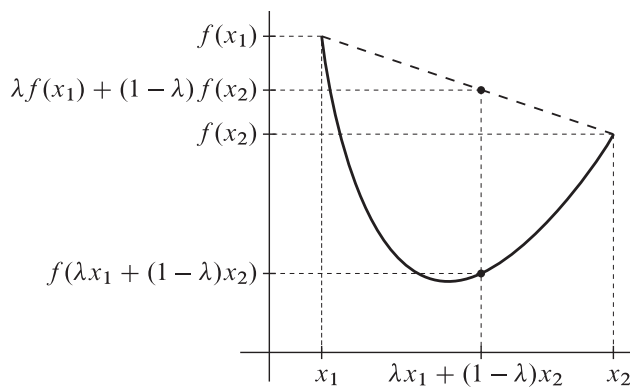
$$\forall x, y \in I, x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

- **ryze konkávní** na I , jestliže

$$\forall x, y \in I, x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1): f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

5.6.2. Přímou z definice jsou vidět následující tvrzení. Funkce f je konkávní na I , právě když je funkce $-f$ konvexní na I . Funkce f je ryze konkávní na I , právě když je funkce $-f$ ryze konvexní na I .

5.6.3 (geometrický smysl konvexity). Funkce f konvexní na I je taková, že vedeme-li libovolnými dvěma body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, přímkou, leží každý bod množiny $\{[x, f(x)] \in \mathbb{R}^2; x \in [x_1, x_2]\}$ pod touto přímkou nebo na ní.



OBRÁZEK 11.

V dalším lemmatu popíšeme konvexitu poněkud jinak než v předchozí definici.

5.6.4. Lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu). Necht $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

- (i) f je konvexní na I ,
- (ii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$,
- (iii) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$,
- (iv) $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$.

Obdobné charakterizace platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$. Položme $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$. Pak platí $\lambda \in (0, 1)$ a $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Označme $c = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3)$. Přímocharým výpočtem pak obdržíme

$$\frac{c - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_3) - c}{x_3 - x_2}. \quad (5.34)$$

Pokud platí $f(x_2) \leq c$, pak pomocí (5.34) dostáváme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \quad (5.35)$$

Pokud platí jedna z nerovností v (5.35) nebo nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

pak podle (5.34) platí nerovnost $f(x_2) \leq c$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$. Při označení z předchozího odstavce dostaneme $f(x_2) \leq c$, neboť f je konvexní. Pak podle (5.34) dostáváme nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Předpokládejme, že $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, a c je definováno stejně jako v úvodním odstavci. Potom podle předpokladu platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

takže $c \geq f(x_2)$. Tím je podmínka z definice konvexity ověřena.

Ekvivalenci (i) $\Leftrightarrow$ (iii) a (i) $\Leftrightarrow$ (iv) lze pomocí úvah prvního odstavce ověřit obdobně. ■

5.6.5 (geometrická interpretace). Předchozí lemma poskytuje ekvivalentní popis konvexity pomocí jisté monotonie směrníc sečen grafu funkce f . Následující obrázky ukazují směrnice kterých sečen porovnáváme v bodech (ii), (iii) a (iv).

5.6.6. Pokud budeme v bodech (ii)–(iv) požadovat ostré nerovnosti mezi směrnici obdržíme charakterizaci ryzí konvexity. Zřejmou modifikací můžeme dále získat charakterizaci konkávnosti a ryzí konkávnosti.

5.6.7. Věta (konvexita a jednostranné derivace). Necht f je konvexní funkce na nedegenerovaném intervalu I a $a \in I$.

- (a) Je-li a vnitřní bod I , potom existují *vlastní* jednostranné derivace $f'_+(a)$, $f'_-(a)$, které splňují $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.
- (b) Je-li a pravý krajní bod I , pak $f'_-(a)$ existuje.
- (c) Je-li a levý krajní bod I , pak $f'_+(a)$ existuje.

Důkaz. (a) Necht a je vnitřní bod I . Nalezneme $\delta > 0$ splňující $B(a, \delta) \subset I$ a definujeme funkce

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & x \in P_+(a, \delta), \\ \psi(y) &= \frac{f(y) - f(a)}{y - a}, & y \in P_-(a, \delta). \end{aligned}$$

Pro body $y_1, y_2, x_1, x_2 \in P(a, \delta)$ splňující $y_2 < y_1 < a < x_1 < x_2$ dostáváme z Lemmatu 5.6.4

$$\varphi(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = \varphi(x_2)$$

a

$$\psi(y_2) = \frac{f(y_2) - f(a)}{y_2 - a} \leq \frac{f(y_1) - f(a)}{y_1 - a} = \psi(y_1).$$

Tedy φ je neklesající na $P_+(a, \delta)$ a ψ je neklesající na $P_-(a, \delta)$. Z Lemmatu 5.6.4 dále pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ a $y \in P_-(a, \delta)$ plyne

$$\psi(y) = \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x). \quad (5.36)$$

Tedy φ je zdola omezená na $P_+(a, \delta)$ a ψ je shora omezená na $P_-(a, \delta)$.

Z Věty 4.2.27 plyne, že

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x)$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{y \rightarrow a-} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = \lim_{y \rightarrow a-} \psi(y)$$

existují vlastní.

Navíc z (5.36) a Věty 4.2.27 plyne pro každé $x \in P_+(a, \delta)$

$$f'_-(a) = \lim_{y \rightarrow a-} \psi(y) \leq \varphi(x).$$

Po dalším použití Věty 4.2.27 dostáváme

$$f'_-(a) \leq \lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = f'_+(a).$$

Tím je důkaz dokončen.

(b) Necht a je pravý koncový bod I . Vzhledem k tomu, že I není degenerovaný, existuje $\delta > 0$ splňující $B_-(a, \delta) \subset I$. Na tomto prstencovém okolí uvažujme funkci ψ z předchozí části důkazu. Pro ni i zde platí, že je na $P_-(a, \delta)$ neklesající, a proto $f'_-(a)$ existuje.

(c) Důkaz lze provést obdobně jako v části (b). ■

5.6.8. (a) Jednostranné derivace konvexní funkce f na intervalu I se nemusí v bodě $a \in \text{Int } I$ rovnat, a nemusí tedy existovat $f'(a)$. Příkladem je funkce $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$.

(b) Jednostranné derivace v tvrzení (b) a (c) předchozí věty mohou být nevlastní, vizte např. funkci sign uvažovanou na intervalu $[-1, 0]$.

5.6.9. Věta (konvexita a spojitost). Necht I je interval, a je vnitřní bod I a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce na I . Potom je f spojitá v a .

Důkaz. Díky Větě 5.6.7(a) existují $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ vlastní. Podle 5.1.16 je f spojitá zleva i zprava v a , tedy je spojitá v a . ■

5.6.10. Funkce sign , která je na intervalu $(-1, 0]$ konvexní, není spojitá v bodě 0. Z konvexity funkce f tedy nevyplývá spojitost ve všech bodech intervalu I , na němž je funkce f definována.

5.6.11. Věta (druhá derivace a konvexita). Necht I je nedegenerovaný interval, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce na I , která má v každém vnitřním bodě I vlastní derivaci.

- (a) Necht funkce f' je neklesající na svém definičním oboru. Potom je f konvexní na I .
 (b) Necht pro každý vnitřní bod x intervalu I platí $f''(x) \geq 0$. Potom je f konvexní na I .

Důkaz. (a) Vezměme libovolné body $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu I . Podle předpokladů je funkce f spojitá na intervalu $[x_1, x_3]$ a v bodech intervalu (x_1, x_3) má derivaci. Díky Lagrangeově větě (Věta 5.2.4) existují body $c \in (x_1, x_2)$ a $d \in (x_2, x_3)$ splňující

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad \text{a} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d).$$

Z předpokladu na f' obdržíme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Dle Lemmatu 5.6.4((i) $\Leftrightarrow$ (iv)) je tedy f konvexní.

(b) Funkce f' je neklesající na svém definičním oboru (Věta 5.5.7), a tedy f je konvexní díky části (a). ■

5.6.12. Obdobná tvrzení platí pro ryzí konvexitu, konkávnost a ryzí konkávnost.

5.6.13. Příklad. Dokažte, že pro každé $h \in [0, \frac{\pi}{2}]$ platí $\sin h \geq \frac{2}{\pi}h$.

Řešení. Funkce sinus má druhou derivaci rovnou funkci $-\sin$, která je na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ menší nebo rovna 0. Funkce sinus je tedy na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ konkávní. Pro $h \in [0, \frac{\pi}{2}]$ položme $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ a $\lambda = \frac{2}{\pi}h$. Podle definice konkávní funkce platí

$$\sin h = \sin(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda \sin x + (1 - \lambda) \sin y = \lambda = \frac{2}{\pi}h.$$

♣

5.6.14. Definice. Necht f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a **inflexi** nebo také že a je **inflexním bodem** funkce f , jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta > 0$ takové, že buď

$$\forall x \in P_-(a, \delta): f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{a}$$

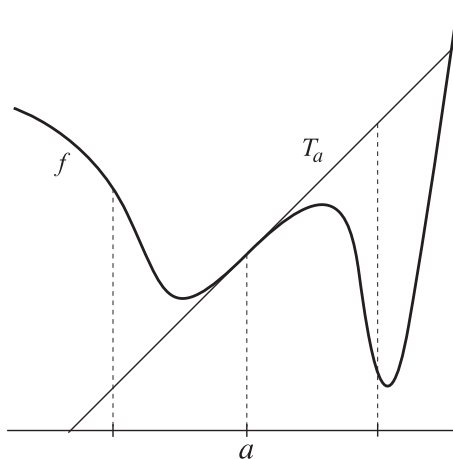
$$\forall x \in P_+(a, \delta): f(x) < f(a) + f'(a)(x - a),$$

nebo

$$\forall x \in P_-(a, \delta): f(x) < f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{a}$$

$$\forall x \in P_+(a, \delta): f(x) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

5.6.15 (geometrická interpretace). Graf funkce v oblasti inflexního bodu přechází z jedné strany tečny na druhou, buď je v levém prstencovém okolí bodu a nad tečnou a v pravém prstencovém okolí bodu a pod tečnou, nebo je v levém prstencovém okolí bodu a pod tečnou a v pravém prstencovém okolí bodu a nad tečnou. Tuto poznámku ilustruje následující obrázek.



OBRÁZEK 12.

5.6.16. Věta (nutná podmínka inflexe). Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f''(a)$ existuje a je různá od nuly. Potom a není inflexním bodem funkce f .

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f''(a) > 0$. Z definice limity najdeme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Dostáváme tedy, že

$$\begin{aligned} \forall x \in P_-(a, \delta): f'(x) &< f'(a) \quad \text{a} \\ \forall x \in P_+(a, \delta): f'(x) &> f'(a). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Vezměme nyní libovolné $x \in P_-(a, \delta)$. Protože f je spojitá na $B(a, \delta)$ dle Věty 5.1.15, pomocí Lagrangeovy věty (Věta 5.2.4) najdeme $c_x \in (x, a)$ splňující

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(c_x).$$

Protože díky (5.37) máme $f'(c_x) < f'(a)$, obdržíme $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a)$. Úpravou dostáváme $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$.

Je-li $x \in P_+(a, \delta)$, jako výše nalezneme $d_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(d_x) > f'(a).$$

Tedy máme $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$. Jinými slovy, bod $[x, f(x)]$ leží nad tečnou f v bodě a na levém i pravém okolí a . Tedy a není inflexním bodem f . Obdobně bychom postupovali v případě $f''(a) < 0$. ■

5.6.17. Rovnost $f''(a) = 0$ ještě nezaručuje, že a je inflexním bodem f . Příkladem je funkce $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $f''(0) = 0$, ale bod 0 není inflexním bodem f , protože graf funkce f leží nad tečnou v bodě 0.

5.6.18. Věta (postačující podmínka pro inflexi). Necht funkce f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b) , $c \in (a, b)$ a platí

$$\forall x \in (a, c): f''(x) > 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b): f''(x) < 0 \quad (5.38)$$

nebo

$$\forall x \in (a, c): f''(x) < 0 \quad \text{a} \quad \forall x \in (c, b): f''(x) > 0. \quad (5.39)$$

Pak c je inflexním bodem f .

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f splňuje (5.38). Z Věty 5.2.6 plyne, že f' je rostoucí na $(a, c]$ a je klesající na $[c, b)$. Pro dané $x \in (a, c)$ použijeme Lagrangeovu větu 5.2.4 k nalezení $c_x \in (x, c)$ splňujícího

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c_x) < f'(c).$$

Tedy $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$.

Podobně pro $x \in (c, b)$ najdeme $d_x \in (c, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(d_x) < f'(c).$$

Úpravou obdržíme $f(x) < f(c) + f'(c)(x - c)$. Tedy c splňuje první variantu v Definici 5.6.14, tj. c je inflexním bodem f .

Obdobně bychom ověřili, že funkce splňující (5.39) splňuje v c druhou možnost v definici inflexního bodu. ■

5.7. Průběh funkce

Při zkoumání vlastností funkcí nás může zajímat chování funkce v ∞ nebo $-\infty$. Často postačí výpočet limity, ale někdy potřebujeme mít přesnější představu o chování funkce. Asymptota je jedním z možných nástrojů, pomocí kterého lze toto chování popsat.

5.7.1. Definice. Asymptotou funkce f v bodě ∞ rozumíme afinní funkci l splňující

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - l(x)) = 0. \quad (5.40)$$

Obdobně definujeme asymptotu funkce f v bodě $-\infty$.

5.7.2 (komentář k definici).

5.7.3. Věta (tvar asymptoty). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$. Funkce f má v bodě ∞ asymptotu $x \mapsto ax + b$ právě tehdy, když platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}. \quad (5.41)$$

Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v bodě $-\infty$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky Větě 4.2.1 dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b}{x}\right) = 0 + a = a,$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) + \lim_{x \rightarrow \infty} b = b.$$

$\Leftarrow$ S pomocí (5.41) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = b - b = 0.$$

Tedy $x \mapsto ax + b$ je asymptotou funkce f v ∞ . ■

5.7.4. Příklad. Funkce e^x má v $-\infty$ asymptotu $x \mapsto 0$ a v bodě ∞ asymptotu nemá, neboť první limita ve Větě 5.7.3 je nevlastní.

5.7.5. Příklad. Funkce $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$ má v bodě ∞ asymptotu $x \mapsto \sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}$. To plyne z

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{x} = \sqrt{2}$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \sqrt{2}x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2}x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2}x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

5.7.6. Příklad. Funkce tangens nemá v bodě ∞ asymptotu, protože není definovaná na žádném jeho okolí.

5.7.7. Příklad. Funkce sinus nemá v bodě ∞ asymptotu, ačkoli první z obou limit ve Větě 5.7.3 existuje a je rovna nule, neexistuje však limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0 \cdot x)$.

5.7.8. Vyšetření průběhu funkce je neformálně zadaná úloha, kde zkoumáme jisté vlastnosti uvažované funkce. Volba těchto vlastností závisí na cíli našeho zkoumání. Při vyšetřování průběhu funkce získáváme zejména následující informace:

- (1) definiční obor funkce,
- (2) spojitost, limity v krajních bodech definičního oboru (což mohou být i body ∞ a $-\infty$) a limity v bodech nespojitosti,
- (3) výpočet derivace a případně jednostranných derivací, intervaly monotonicity, extrémy (lokální i globální), obor hodnot,
- (4) výpočet druhé derivace, intervaly konvexity a konkávnosti, inflexní body.

Na základě těchto informací pak zpravidla již získáme poměrně přesnou představu o chování funkce. Pokud funkce vykazuje nějaké symetrie (např. sudost, lichost nebo periodicitu) nebo má asymptotu, pak je užitečné tyto informace zahrnout do výpočtu.

5.7.9. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Řešení. Podívejme se nejdříve na funkci

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a funkce g má vlastní první i druhou derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \quad (5.42)$$

g je lichá a kladná na $(0, \infty)$. Počítejme

$$g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} (2(x^2+1) - 4x^2) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy $g' > 0$ na intervalu $(-1, 1)$ a $g' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Dle Věty 5.2.6 g roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Tedy g má minimum v bodě -1 a maximum v 1 . Protože $g(-1) = -1$ a $g(1) = 1$, z Věty 4.3.6 plyne $\mathcal{H}(f) = [-1, 1]$.

Jelikož $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, je funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ a je zde spojitá (jelikož g i $\arcsin$ jsou spojité, plyne tvrzení z Poznámky 4.2.24(b)). Díky (5.42) a spojitosti funkce $\arcsin$ v 0 dostáváme použitím Věty 4.2.22

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(0) = 0.$$

Po dosazení vidíme $f(-x) = -f(x)$, tj. f je lichá.

Při výpočtu derivace dostáváme za pomoci Věty 5.1.17 a vlastnosti (C5)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)^2} \right)^{-1} \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

V bodech -1 a 1 použijeme Větu 5.2.9 k odvození

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-2}{x^2 + 1} = -1, \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2}{x^2 + 1} = 1, \\ f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{2}{x^2 + 1} = 1, \\ f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-2}{x^2 + 1} = -1. \end{aligned}$$

Tedy derivace v bodech -1 a 1 neexistuje.

Máme $f' > 0$ na $(-1, 1)$ a $f' < 0$ na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$. Z Věty 5.2.6 plyne, že f roste na $[-1, 1]$ a klesá na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$. Dále, f má maximum v bodě 1 a minimum v bodě -1 , přičemž $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ a $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Díky spojitosti funkce f dostáváme za použití Věty 4.3.6 $\mathcal{H}(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Počítáme-li druhou derivaci, dostáváme

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(x^2+1)^2} & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Tedy $f''(x) = 0$ právě v bodě $x = 0$, $f'' > 0$ na $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ a $f'' < 0$ na $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Z Věty 5.6.11 odvodíme, že f je ryze konvexní na intervalech $[-1, 0]$ a $[1, \infty)$ a je ryze konkávní na intervalech $(-\infty, -1]$ a $[0, 1]$. Dále má f v 0 inflexní bod dle Věty 5.6.18.

Pro výpočet asymptot můžeme použít Větu 5.7.3, což dává

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 0 \cdot x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 0 \cdot x = 0.$$

Tedy přímka $t(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je asymptotou funkce f v ∞ i $-\infty$.

Nyní již zbývá pouze načrtnout graf funkce f . ♣

5.8. Teoretické příklady k derivaci funkce

Následující příklad ilustruje důležitost předpokladu spojitosti alespoň jedné z uvažovaných funkcí ve Větě 5.1.17(b).

5.8.1. Příklad. Necht funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz $f'(0) \cdot f(0) + f(0) \cdot f'(0)$ má smysl, ale přesto $(f^2)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Vynásobíme-li funkci f se sebou samou, dostaneme

$$f^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Podobně jako v Příkladu 5.1.14 dostaneme $f'(0) = \infty$. Výraz $f'(0) \cdot f(0) + f(0) \cdot f'(0)$ má smysl, protože

$$f'(0) \cdot f(0) + f(0) \cdot f'(0) = \infty \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty.$$

Snadno odvodíme $(f^2)'_+(0) = \infty$ a $(f^2)'_-(0) = -\infty$, a proto $(f^2)'(0)$ neexistuje. ♣

Také ve Větě 5.1.17(c) je předpoklad spojitosti funkce g podstatný.

5.8.2. Příklad. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Pak $f'(x)$ existuje vlastní pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ podle Věty 5.1.17 platí

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

V bodě 0 máme

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

dle Věty 4.2.15. Uvažujme posloupnost $\{a_n\} = \{\frac{1}{2\pi n}\}$. Tato posloupnost konverguje k 0, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\cos(2\pi n)) = -1.$$

Tedy dle Heineovy věty (Věta 4.2.16) není pravda, že $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$, tj. f' není spojitá v bodě 0. ♣

5.8.3. Poznámka. Doplňme k předchozímu příkladu ještě následující neformální komentář. Funkce v předchozím příkladu má derivaci v bodě 0 rovnou nule, protože jsou její oscilace tlumeny funkcí $x \mapsto x^2$. Přesto však blízko bodu 0 jsou intervaly, kde funkce rychle roste, a intervaly, kde funkce rychle klesá. Derivace je na těchto intervalech blízko hodnotě 1, respektive -1 . Odtud pak pramení nespojitost funkce f' v bodě 0. Podívejte se na následující obrázek.

OBRÁZEK 13. Graf funkce z Příkladu 5.8.2

5.8.4. Příklad. Necht

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že f je rostoucí v bodě 0, má vlastní derivaci pro každé $x \in \mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

Řešení. Díky Příkladu 5.8.2 máme

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Z 5.5.4 plyne, že f je rostoucí v bodě 0.

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{2\pi n}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f'(x_n) = -\frac{1}{2}$, a tedy f je klesající v bodě x_n . Protože posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k 0, funkce f není monotónní na žádném okolí 0. ♣

5.8.5. Příklad. Necht funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^5(2 + \sin(\frac{1}{x})) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Pak f má v 0 inflexi, ale neexistuje okolí 0, kde by byly splněny předpoklady Věty 5.6.18.

Řešení. Protože $f'(0) = 0$ (vizte výpočet v Příkladu 5.8.2), tečna funkce f v bodě 0 je dána jako

$$t(x) = f(0) + f'(0)x = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je-li $x < 0$, pak $f(x) < 0 = t(x)$, a pro $x > 0$ máme $f(x) > 0 = t(x)$. Tedy f má v 0 inflexní bod.

Vypočteme první a druhou derivaci funkce f :

$$f'(x) = \begin{cases} 10x^4 + 5x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a

$$f''(x) = \begin{cases} x(20x^2(2 + \sin(\frac{1}{x})) + 2x \cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x})) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Označme

$$g(x) = 20x^2(2 + \sin(\frac{1}{x})) + 2x \cos(\frac{1}{x}), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pak dle Věty 4.2.15 platí $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Tedy výraz $g(x) - \sin(\frac{1}{x})$ nabývá kladných i záporných hodnot na libovolném okolí 0. Protože

$$f''(x) = x(g(x) - \sin(\frac{1}{x})), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

nabývá druhá derivace f kladné i záporné hodnoty na libovolném okolí bodu 0. ♣

5.8.6. Příklad. Necht funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ splňují $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $x_n \leq a \leq y_n$, $y_n - x_n > 0$. Dokažte, že potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq a - x_n \leq y_n - x_n$. Odtud díky předpokladu $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Podobně odvodíme $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \in B(a, \delta)$ (i pro $x = a$) máme

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq \varepsilon|x - a|. \quad (5.43)$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $x_n, y_n \in B(a, \delta)$. Díky (5.43) a trojúhelníkové nerovnosti pro každé $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned} & |f(y_n) - f(x_n) - f'(a)(y_n - x_n)| \\ & \leq |f(y_n) - f(a) - f'(a)(y_n - a)| + |f(a) - f(x_n) - f'(a)(a - x_n)| \\ & = |f(y_n) - f(a) - f'(a)(y_n - a)| + |f(x_n) - f(a) - f'(a)(x_n - a)| \\ & \leq \varepsilon|y_n - a| + \varepsilon|x_n - a| = \varepsilon(y_n - x_n). \end{aligned}$$

S pomocí předpokladu $y_n - x_n > 0$ dostáváme pro každé $n \geq n_0$ nerovnost

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} - f'(a) \right| \leq \varepsilon.$$

Odtud již plyne dokazované tvrzení. ♣

5.8.7. Příklad. Ukažte, že *spojitá* funkce f z Příkladu 4.4.12 nemá v žádném bodě vlastní derivaci.

Řešení. Necht $a \in \mathbb{R}$ je libovolný bod. Ukážeme za pomoci Příkladu 5.8.6, že $f'(a)$ neexistuje vlastní. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $x_n = [4^n a] \cdot 4^{-n}$ a $y_n = ([4^n a] + 1) \cdot 4^{-n}$. Podle definice celé části máme $x_n \leq a < y_n$. Necht f_n jsou funkce zkonstruované v Příkladu 4.4.12. Pozorování 2 z Příkladu 4.4.12 pro každé $m \geq n$ dává $f_m(x_n) = f_m(y_n) = 0$. Máme tedy

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n}.$$

Podle téhož pozorování pro každé $m \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $|f_m(y_n) - f_m(x_n)| = |y_n - x_n|$. Každý člen v předchozí sumě je tedy roven 1, nebo -1 , a proto

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{f_m(y_n) - f_m(x_n)}{y_n - x_n} \quad \text{je} \quad \begin{cases} \text{liché celé číslo, pokud je } n \text{ sudé,} \\ \text{sudé celé číslo, pokud je } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

tedy nemůže existovat vlastní, protože uvažovaná posloupnost nesplňuje Bolzano-vu-Cauchyovy podmínku 2.4.26. Poněvadž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{-n} = 0,$$

dostáváme podle Příkladu 5.8.6, že $f'(a)$ neexistuje vlastní. ♣

5.8.8. Příklad. Dokažte, že pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$\frac{x-1}{x} \leq \log x \leq x-1 \quad (5.44)$$

(srovnejte s 1.7.14). Rovnosti v (5.44) navíc platí právě tehdy, když $x = 1$.

Řešení. První nerovnost. Definujme pomocnou funkci $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \log x - \frac{x-1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Vypočteme

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

Podle Věty 5.5.7 je tedy f klesající na $(0, 1]$ a rostoucí na $[1, \infty)$. Funkce f má tedy v bodě 1 minimum. Vzhledem k tomu, že $f(1) = 0$, dostáváme první nerovnost v (5.44). Navíc $f(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 1$, tj. v první nerovnosti v (5.44) platí rovnost právě tehdy, když $x = 1$.

Druhá nerovnost. Definujme pomocnou funkci $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x) = x - 1 - \log x, \quad x \in (0, \infty).$$

Vypočteme

$$g'(x) = \frac{x-1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Podle Věty 5.5.7 je tedy g je tedy rostoucí na $[1, \infty)$ a klesající na $(0, 1]$. Má tedy v bodě 1 minimum. Vzhledem k tomu, že $g(1) = 0$, dostáváme první nerovnost v (5.44). Navíc $g(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 1$, tj. v druhé nerovnosti v (5.44) platí rovnost právě tehdy, když $x = 1$. ♣

Následující příklad je zobecněním Bernoulliho nerovnosti na intervalu $(-1, \infty)$ (vizte Příklad 1.8.10).

5.8.9. Příklad. Dokažte, že pro každé $\alpha \in [1, \infty)$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x.$$

Řešení. Definujme pomocnou funkci $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x.$$

Vypočteme

$$f'(x) = \alpha((1+x)^{\alpha-1} - 1), \quad x \in (-1, \infty).$$

Odtud plyne, že platí $f'(x) \leq 0$ pro $x \in (-1, 0)$ a $f'(x) \geq 0$ pro $x \in (0, \infty)$. Tedy f je nerostoucí na intervalu $(-1, 0]$ a neklesající na intervalu $[0, \infty)$ podle Věty 5.5.7. Tudíž f nabývá svého minima v bodě 0. Protože $f(0) = 0$, je f nezáporná na $(-1, \infty)$. Odtud plyne dokazovaná nerovnost. ♣

5.8.10. Příklad (Young⁴). Necht' $a, b \in [0, \infty)$, $p, q \in (1, \infty)$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Řešení. Definujme pomocnou funkci $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x) = \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax.$$

Funkce φ je spojitá na svém definičním oboru a platí

$$\varphi'(x) = x^{q-1} - a, \quad x \in (0, \infty).$$

Vyšetřením znaménka derivace obdržíme díky Větě 5.2.6, že funkce φ je klesající na intervalu $[0, a^{\frac{1}{q-1}}]$, rostoucí na intervalu $[a^{\frac{1}{q-1}}, \infty)$ a v bodě $a^{\frac{1}{q-1}}$ nabývá svého minima. Pro každé $b \in [0, \infty)$ tedy platí $\varphi(b) \geq \varphi(a^{\frac{1}{q-1}})$. Použijeme rovnost $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a pro každé $b \in [0, \infty)$ obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab &= \varphi(b) \geq \varphi(a^{\frac{1}{q-1}}) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^{\frac{q}{q-1}}}{q} - aa^{\frac{1}{q-1}} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{a^p}{q} - a^p = 0. \end{aligned}$$

Odtud plyne dokazovaná nerovnost. ♣

5.8.11. Příklad (Hölder⁵). Necht' $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ a $p, q \in (1, \infty)$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{1/q}.$$

⁴William Henry Young (1863–1942)

⁵Ludwig Otto Hölder (1859–1937)

Řešení. Označme $A = \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p}$ a $B = \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p\right)^{1/p}$. Pokud $A = 0$ nebo $B = 0$, pak nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $A > 0$ a $B > 0$. Pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ díky Příkladu 5.8.10 platí

$$\frac{|a_j|}{A} \cdot \frac{|b_j|}{B} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_j|}{A}\right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_j|}{B}\right)^q.$$

Odtud plyne

$$\sum_{j=1}^n \frac{|a_j| |b_j|}{AB} \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{p} \frac{|a_j|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_j|^q}{B^q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

což dokazuje Hölderovu nerovnost. ♣

5.8.12. Příklad (Minkowski⁶). Necht' $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ a $p \in (1, \infty)$. Potom platí

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p\right)^{1/p}.$$

Řešení. Pokud $\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \neq 0$. V následující sérii odhadů použijeme trojúhelníkovou nerovnost a dvakrát Hölderovu nerovnost (Příklad 5.8.11), kde za q vezmeme číslo $\frac{p}{p-1}$. Platí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p &= \sum_{j=1}^n |a_j + b_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \\ &\leq \sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|) \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \\ &= \sum_{j=1}^n |a_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |b_j| \cdot |a_j + b_j|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{(p-1) \cdot \frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (\text{Hölderova nerovnost}) \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{(p-1) \cdot \frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

⁶Hermann Minkowski (1864–1909)

Vydělením obou stran kladným členem $\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$ obdržíme dokazovanou nerovnost. ♣

5.8.13. Příklad. Ukažte, že $3 < \pi < 4$.

Řešení. Podle odvození vlastnosti (G4) platí $\frac{\pi}{2} \in (0, 2)$ a $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Zjevně tedy $\pi < 4$. Abychom dokázali nerovnost $\pi > 3$, stačí ověřit, že $\cos(\frac{3}{2}) > 0$, dle vlastnosti (G4) je totiž kosinus klesající na intervalu $(0, 2)$.

Označme $\beta = \frac{3}{2}$ a $a_n = \frac{\beta^{2n}}{(2n)!}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_{n+1} \leq a_n$, a tedy dle Věty 3.3.1 platí

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=4}^k (-1)^n a_n \geq 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n a_n \\ &\geq 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} = \frac{359}{5 \cdot 2^{10}} > 0 \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. ♣

V následujícím příkladu ukážeme, že pomocí věty o derivaci inverzní funkce je možné v některých případech spočítat derivaci určité funkce, ačkoli pro tuto funkci nemáme k dispozici explicitní vyjádření.

5.8.14. Příklad. Necht funkce f je definována předpisem $f(x) = x^3 + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že f je na $\mathbb{R}$ prostá a $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$ a pro její inverzní funkci $g = f^{-1}$ spočítejte $g'(b)$ a $g''(b)$, kde $b = f(1)$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f'(x) = 3x^2 + \cos x \quad \text{a} \quad f''(x) = 6x - \sin x.$$

Pro každé $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ platí $3x^2 + \cos x > 0$. Pro každé $x \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$ máme díky Příkladu 5.8.13 odhad

$$3x^2 + \cos x \geq 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1 \geq 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{23}{4} > 0.$$

Protože je f' sudá funkce, je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tedy funkce f je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$. Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, dostáváme z Věty 4.3.6, že $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$. K funkci f tedy existuje inverzní funkce $g = f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Podle věty o derivaci inverzní funkce (Věta 5.1.27(a)) platí

$$g'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Použijeme Věty 5.1.17 a 5.1.24 a pro každé $y \in \mathbb{R}$ obdržíme

$$g''(y) = -\frac{1}{(f'(g(y)))^2} \cdot f''(g(y)) \cdot g'(y) = -\frac{f''(g(y))}{(f'(g(y)))^3}.$$

Pro $b = f(1) = 1 + \sin 1$ máme $g(b) = 1$,

$$g'(b) = \frac{1}{3 + \cos 1} \quad \text{a} \quad g''(b) = -\frac{6 - \sin 1}{(3 + \cos 1)^3}.$$

♣

5.8.15. Příklad. Necht funkce f je definována na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f^{(n)}(0) = 0$.

Řešení. Dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existuje polynom P_n takový, že

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

(zde využíváme úmluvu $f^{(0)} = f$). Toto tvrzení zřejmě platí pro $n = 0$. Předpokládejme nyní, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot e^{-1/x^2}.$$

Označme pro $y \in \mathbb{R}$

$$P_{n+1}(y) = -y^2 P_n'(y) + 2y^3 P_n(y).$$

Pak P_{n+1} je polynom a platí

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pišme nyní polynom P_n jako $P_n(y) = \sum_{k=0}^m a_k y^k$, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

Necht $l \in \mathbb{N}$. Z Příkladu 5.4.4 plyne $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{l/2}}{e^y} = 0$. Odtud použitím Věty 4.2.22(P), kde za vnitřní funkci bereme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-l} e^{-1/x^2} = 0.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^m a_k x^{-k-1} e^{-1/x^2} = \sum_{k=0}^m a_k \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^{-k-1} e^{-1/x^2} = 0. \end{aligned}$$

Tím je ověřen indukční krok, a tedy i celé tvrzení.

♣

5.8.16. Příklad. Necht $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní na $(a, c]$ a na $[c, b)$. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní.

- (i) Funkce f je konvexní na (a, b) .
- (ii) Platí $f'_-(c) \leq f'_+(c)$.

Řešení. (i) $\Rightarrow$ (ii) Tvrzení plyne z Věty 5.6.7(a).

(ii) $\Rightarrow$ (i) Odvodme nejprve následující pozorování.

Pozorování. Necht $u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < u, 0 < v$, a je splněna nerovnost

$$\frac{\alpha}{u} \leq \frac{\beta}{v}. \quad (5.45)$$

Pak platí

$$\frac{\alpha}{u} \leq \frac{\alpha + \beta}{u + v}. \quad (5.46)$$

Důkaz pozorování. V (5.45) vynásobíme oba členy kladným výrazem uv a obdržíme $\alpha v \leq \beta u$. Odtud plyne $\alpha u + \alpha v \leq \alpha u + \beta u$. Oba členy vydělíme kladným výrazem $u(u + v)$ a obdržíme (5.46). ■

Funkce f je konvexní na intervalu $(a, c]$, a proto podle Lemmatu 5.6.4 je funkce

$$t \mapsto \frac{f(c) - f(t)}{c - t}$$

neklesající na intervalu (a, c) . Platí tedy

$$f'_-(c) = \sup \left\{ \frac{f(c) - f(t)}{c - t}; t \in (a, c) \right\}. \quad (5.47)$$

Podobně máme

$$f'_+(c) = \inf \left\{ \frac{f(t) - f(c)}{t - c}; t \in (c, b) \right\}. \quad (5.48)$$

Konvexitu funkce f dokážeme ověřením podmínky (ii) z Lemmatu 5.6.4. Necht $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 < x_3$. Pokud $c \leq x_1$, nebo $x_3 \leq c$, pak je dokazovaná nerovnost v podmínce (ii) splněna díky konvexitě f na $(a, c]$ a $[c, b)$. Pokud $x_1 < c < x_3$, rozlišíme dva případy.

Případ $x_2 \leq c$. Pak platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq \frac{f(x_3) - f(c)}{x_3 - c}. \quad (5.49)$$

Položme $\alpha = f(c) - f(x_1)$, $\beta = f(x_3) - f(c)$, $u = c - x_1$, $v = x_3 - c$. S pomocí Pozorování a (5.49) obdržíme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Případ $x_2 > c$. Díky (5.47) a (5.48) máme

$$\frac{f(c) - f(x_1)}{c - x_1} \leq f'_-(c) \leq f'_+(c) \leq \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c}.$$

Odtud pomocí Pozorování a Lemmatu 5.6.4 obdržíme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(c)}{x_2 - c} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Opět pomocí Pozorování pak máme

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Tím je podle Lemmatu 5.6.4 dokázána konvexita f na (a, b) . ♣

5.8.17. Příklad. Necht f je konvexní funkce na intervalu (a, b) . Pak množina bodů nediferencovatelnosti funkce f je nejvýše spočetná.

Řešení. Z Věty 5.6.11 víme, že v každém bodě $x \in (a, b)$ existují vlastní jednostranné derivace a platí $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. Ukažme nyní, že pro body $x, y \in (a, b)$, $x < y$, platí $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y)$. K tomuto účelu vezmeme body u, v splňující $x < u < v < y$. Díky konvexitě f (vizte Lemma 5.6.4) pak máme

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Tedy pro každé $v \in (x, y)$ platí dle Věty 4.2.8(b)

$$f'_+(x) = \lim_{u \rightarrow x_+} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(v) - f(y)}{v - y}.$$

Opětovným použitím Věty 4.2.8(b) máme

$$f'_+(x) \leq \lim_{v \rightarrow y_-} \frac{f(v) - f(y)}{v - y} = f'_-(y).$$

Tedy jsem ukázali, že f'_- je neklesající funkce na (a, b) . Podle Příkladu 4.4.4 je tedy f'_- spojitá všude na (a, b) s výjimkou nejvýše spočetné množiny D . Máme-li nyní bod $x \in (a, b) \setminus D$, platí

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \lim_{y \rightarrow x_+} f'_-(y) = f'_-(x).$$

Odtud plyne, že $f'_-(x) = f'_+(x)$. Dle Věty 5.1.9 tudíž existuje $f'(x)$. ♣

5.8.18. Příklad. Necht $D \subset (0, 1)$ je spočetná množina. Nalezněte konvexní funkci $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, která nemá derivaci právě v bodech množiny D .

Řešení. Pokud je množina D konečná, pak je řešení příkladu snadné. Stačí položit

$$f(x) = \sum_{a \in D} |x - a|, \quad x \in (0, 1).$$

Předpokládejme tedy, že D je nekonečná. Nalezneme prostou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $f_n(x) = 2^{-n}|x - x_n|$, $x \in (0, 1)$. Pak funkce f_n má následující vlastnosti:

- (a) $\forall x \in (0, 1): 0 \leq f_n(x) \leq 2^{-n}$,
- (b) $\forall x, y \in (0, 1): |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^{-n}|x - y|$,

- (c) f_n je konvexní,
- (d) $(f_n)'_-(x_n) = -2^{-n}$, $(f_n)'_+(x_n) = 2^{-n}$,
- (e) pro každé $x \in (0, 1) \setminus \{x_n\}$ platí, že $f'_n(x) = 2^{-n} \operatorname{sign}(x - x_n)$.

Definice funkce f . Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in (0, 1).$$

Díky vlastnosti (a) je f dobře definovaná funkce na $(0, 1)$, neboť pro každé $x \in (0, 1)$ je $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentní.

Konvexita f . Zvolme $x, y \in (0, 1)$ a $\lambda \in (0, 1)$. Díky (c) platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f_n(x) + (1 - \lambda)f_n(y).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda f_n(x) + (1 - \lambda)f_n(y)) \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) + (1 - \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

Tak jsme obdrželi požadovanou nerovnost z definice konvexity.

Pro každé $x \in (0, 1)$ platí

$$f'_+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_+(x), \tag{5.50}$$

$$f'_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_-(x). \tag{5.51}$$

Nechť $x \in (0, 1)$. Díky (d) a (e) jsou nekonečné řady v (5.50) a (5.51) konvergentní. Dokážeme (5.50). Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Počítejme

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{h \rightarrow 0_+} \left| \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) - \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_+(x) \right| \\
 &= \limsup_{h \rightarrow 0_+} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h} (f_n(x+h) - f_n(x)) - \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_+(x) \right| \\
 &= \limsup_{h \rightarrow 0_+} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h} (f_n(x+h) - f_n(x)) - (f_n)'_+(x) \right) \right| \\
 &\leq \limsup_{h \rightarrow 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{h} (f_n(x+h) - f_n(x)) - (f_n)'_+(x) \right| \\
 &\leq \limsup_{h \rightarrow 0_+} \sum_{n=1}^{n_0} \left| \frac{1}{h} (f_n(x+h) - f_n(x)) - (f_n)'_+(x) \right| \\
 &\quad + \limsup_{h \rightarrow 0_+} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \frac{1}{h} (f_n(x+h) - f_n(x)) - (f_n)'_+(x) \right| \\
 &\leq 0 + \limsup_{h \rightarrow 0_+} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\left| \frac{1}{h} (f_n(x+h) - f_n(x)) \right| + |(f_n)'_+(x)| \right) \\
 &\leq \limsup_{h \rightarrow 0_+} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (2^{-n} + 2^{-n}) < 2\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\limsup_{h \rightarrow 0_+} \left| \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) - \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_+(x) \right| = 0,$$

což dává vztah (5.50). Důkaz (5.51) lze provést obdobně.

Diferencovatelnost f v bodech $(0, 1) \setminus D$. Necht $x \in (0, 1) \setminus D$. Pak díky vlastnosti (e) platí $(f_n)'_-(x) = (f_n)'_+(x)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z (5.50) a (5.51) pak plyne

$$f'_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n)'_+(x) = f'_+(x),$$

a tedy $f'(x)$ existuje vlastní.

Nediferencovatelnost f v bodech D . Necht $x \in D$. Pak nalezneme $j \in \mathbb{N}$ takové, že $x = x_j$. Pak díky vlastnostem (d) a (e) platí $(f_n)'_-(x) = (f_n)'_+(x)$ pro každé $n \in \mathbb{N}, n \neq j$, a $(f_j)'_-(x) \neq (f_j)'_+(x)$. Z (5.50) a (5.51) pak plyne $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, a tedy $f'(x)$ neexistuje. ♣

Hyperbolické funkce.

5.8.19. Definice. Funkce **hyperbolický sinus**, **hyperbolický kosinus**, **hyperbolický tangens** a **hyperbolický kotangens** jsou po řadě značeny a definovány takto:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & x \in \mathbb{R}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Tyto funkce nazýváme **hyperbolické**.

Vlastnosti hyperbolických funkcí

(H1) Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\sinh(x + y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.\end{aligned}$$

Plyne dosazením do vzorců, například první identita se odvodí pomocí

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y})}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) = \sinh(x + y).\end{aligned}$$

(H2) Funkce $\sinh$ je lichá a funkce $\cosh$ je sudá.

Plyne z definice.

(H3) Funkce $\sinh$ a $\cosh$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Plyne z definice.

(H4) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sinh'(x) = \cosh(x)$ a $\cosh'(x) = \sinh(x)$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x), \\ \cosh'(x) &= \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x).\end{aligned}$$

(H5) Platí $\sinh(0) = 0$ a $\cosh(0) = 1$.

Tvrzení plyne snadno s definice.

(H6) Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \infty$.

Platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \cdot (0 - \infty) = -\infty$$

díky větě o aritmetice limit (Věta 4.2.1). Ostatní limity lze vypočítat obdobně.

(H7) Funkce $\sinh$ je rostoucí na $\mathbb{R}$, $\cosh$ je rostoucí na $[0, \infty)$ a klesající na $(-\infty, 0]$.

Funkce $\cosh$ je podle definice kladná funkce. Díky (H4) a Větě 5.5.7 pak platí, že $\sinh$ rostoucí na $\mathbb{R}$. Dále $\sinh(0) = 0$, a tedy $\sinh$ je záporná na $(-\infty, 0)$ a kladná na $(0, \infty)$. Opět s pomocí (H4) a Věty 5.5.7 dostáváme, že $\cosh$ je klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0, \infty)$.

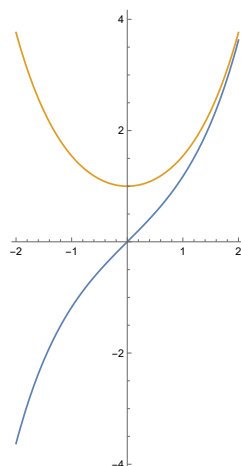
(H8) Platí $\mathcal{H}(\sinh) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}(\cosh) = [1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H3), (H6), (H7) a Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot (vizte Větu 4.3.6).

(H9) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Podle definice máme pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2) = 1.$$



OBRÁZEK 14. Graf hyperbolického sinu a cosinu

(H10) Platí $\mathcal{D}(\tanh) = \mathbb{R}$ a $\mathcal{D}(\coth) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Plyne z definice.

(H11) Funkce tgh a cotgh jsou liché a na svých definičních oborech spojité.

Plyne z definice a Věty 4.2.4.

(H12) Platí $\operatorname{tgh}(0) = 0$.

Výsledek obdržíme dosazením do definičního vztahu.

(H13) Platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh}(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tgh}(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cotgh}(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{cotgh} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{cotgh}(x) = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{cotgh}(x) = 1$.

Počítáme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tgh}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1.$$

Ostatní limity spočteme obdobně.

(H14) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{tgh}'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ a pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $\operatorname{cotgh}'(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$.

Z (H4) a (H9) máme

$$(\operatorname{tgh})' = \left(\frac{\sinh}{\cosh} \right)' = \frac{1}{\cosh^2} (\cosh^2 - \sinh^2) = \frac{1}{\cosh^2}.$$

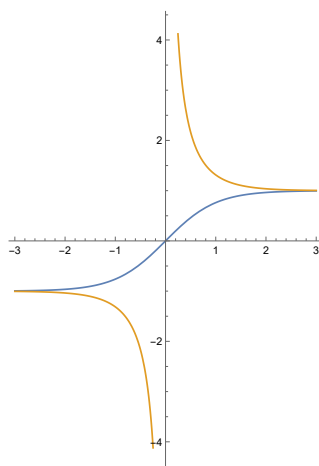
Obdobně se ověří druhé tvrzení.

(H15) Funkce tgh roste na $\mathbb{R}$, cotgh klesá na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H14) a Věty 5.2.6.

(H16) Platí $\mathcal{H}(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$ a $\mathcal{H}(\operatorname{cotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Tvrzení plyne z (H15), (H12) a spojitosti obou funkcí.



OBRÁZEK 15. Grafy hyperbolického tangensu a hyperbolického kotangensu

5.8.20. Příklad. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá periodická nekonstantní funkce. Pak nemá ani v ∞ ani v $-\infty$ asymptotu.

Řešení. Necht $a > 0$ je perioda funkce f , tj. $f(x) = f(x + a)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Nejprve si rozmysleme, že f je omezená funkce. To plyne z faktu, že f je v absolutní hodnotě omezená na $[0, a]$ nějakou konstantou M (viz Věta 4.3.12), a tedy je omezená M i na každém intervalu tvaru $[ka, (k + 1)a]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dostáváme proto, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Předpokládáme-li nyní existenci asymptoty například v ∞ , existuje $b \in \mathbb{R}$ splňující $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - b) = 0$. Najdeme $x \in (0, a)$ splňující $f(x) \neq f(a)$. Z Věty 4.2.18 nyní plyne, že

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x + na) = b = \lim_{n \rightarrow \infty} f(na) = f(0),$$

což je spor. Tím je důkaz dokončen. ♣

5.9. Početní příklady k derivaci a jejím aplikacím

5.9.1. Limity funkcí.

5.9.1. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1.$$

Řešení. (a) Protože $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ (vlastnosti (E2) a (E4)), platí dle Definice 5.1.1 rovnost

$$1 = \exp'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

(b) Z definice logaritmu a vlastnosti (E3) plyne $\log(1) = 0$. Z vlastnosti (L7) pak dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \log(1+0)}{x - 0} = (\log(1+x))'_{x=0} \\ &= \left(\frac{1}{1+x}\right)_{x=0} = 1. \end{aligned}$$

(c) Položme

$$f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}, \quad y \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \quad g(x) = x - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$x_0 = 1$ a $y_0 = 0$. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = 1$$

a pro každé $x \in P(x_0, 1)$ máme $g(x) \neq y_0$. Tedy z Věty 4.2.22(P) plyne

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1.$$

♣

5.9.2. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Řešení. Z vlastnosti sinu (G5) víme, že $\sin'(0) = 1$. Dále platí $\sin(0) = 0$ (vizte (G4)). Tedy z Definice 5.1.1 plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = 1.$$

♣

5.9.3. Příklad. Dokažte, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

Jelikož kosinus je spojitá funkce (vizte (G13)) a $\cos(0) = 1$ (vizte (G6)), plyne z Příkladu 5.9.2 a Věty 4.2.1 rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

♣

5.9.4. Příklad. Spočítejte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\frac{\sin(5x)}{x} = 5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x}.$$

Položme

$$f(y) = \frac{\sin(y)}{y}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad g(x) = 5x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$x_0 = 0$ a $y_0 = 0$. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = 1$ a pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \neq y_0$. Z Věty 4.2.22(P) a Příkladu 5.9.2 tedy plyne, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = 1.$$

Z Věty 4.2.1(b) máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x} = 5.$$

♣

5.9.5. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

Řešení. Pro každé x z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} &= \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}} \\ &= \frac{x^2}{1 - \cos x + x \sin x} \cdot (\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}) \\ &= \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2} + \frac{\sin x}{x}} \cdot (\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}). \end{aligned}$$

Funkce $x \mapsto \sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x}$ je spojitá v bodě 0. Pak pomocí Příkladů 5.9.2 a 5.9.3 dostáváme díky Větě 4.2.1 rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \cdot (1 + 1) = \frac{4}{3}.$$

♣

5.9.6. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Řešení. Pro každé x z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \frac{\sin(2x)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\frac{\pi}{4} - x} \cdot \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos(2x)} \\ &= \frac{\sin(2x)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\frac{\pi}{4} - x} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Položme

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\pi}{4} - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Potom platí $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} g(x) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ a pro každé $x \in P(0, 1)$ máme $g(x) \neq 0$. Díky Větě 4.2.22(P) dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\frac{\pi}{4} - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f \circ g(x) = 1.$$

Podobně obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{2} - 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = 1.$$

Tedy máme z (5.52)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

♣

5.9.7. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Řešení. Pro každé x z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} &= \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right)} \cdot \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} \cdot \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = 1,$$

konverguje první část výrazu v (5.53) k číslu -1 . Dále máme

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}} &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{x - \frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot \frac{4 \sin^2 x - 3}{x - \frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot \frac{(2 \sin x - \sqrt{3}) \cdot (2 \sin x + \sqrt{3})}{x - \frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot 2 \cdot \frac{(\sin x - \sin \frac{\pi}{3}) \cdot (2 \sin x + \sqrt{3})}{x - \frac{\pi}{3}}.
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Protože

$$\frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{\cos(\frac{1}{2}(x + \frac{\pi}{3})) \cdot \sin(\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}))}{\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})},$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Z (5.53) a (5.54) pak máme

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})} &= -1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{x - \frac{\pi}{3}} \\
 &= -1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2})^3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right) \\
 &= -24.
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

♣

5.9.8. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})).$$

Řešení. Pro každé $x > 0$ platí

$$\begin{aligned}
 \sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x}) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\right) \\
 &= 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}\right).
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Dále platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0.$$

Ze spojitosti sinu a Věty 4.2.22(S) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}\right) = 0.$$

Funkce $x \mapsto 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})\right)$ je omezená na intervalu $(0, \infty)$, a tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin(\sqrt{x+1}) - \sin(\sqrt{x})) = 0$$

dle Věty 4.2.15. ♣

5.9.9. Příklad. Necht $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Řešení. Definujme

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, \quad x \in (|a|, \infty).$$

Pak f je dobře definovaná funkce splňující

$$f(x) = \exp(x \log(1 + \frac{a}{x})), \quad x \in (|a|, \infty).$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + \frac{a}{x}) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} = a & \text{pro } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0 = a & \text{pro } a = 0. \end{cases}$$

platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \exp(a).$$

Z Heineovy věty 4.2.16 plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp(a).$$

Srovnejte s Příkladem 2.4.5. ♣

5.9.10. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Jako v předchozích příkladech je třeba spočítat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x}\right).$$

Snadno spočteme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} = 1.$$

Dle Věty 4.2.8(a) existuje $\eta > 0$ takové, že

$$\forall x \in B(0, \eta): \frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} > 0.$$

Dále máme pro každé $x \in B(0, \eta)$

$$\frac{1+x2^x}{1+x3^x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Platí tedy

$$\forall x \in P(0, \eta): \frac{1+x2^x}{1+x3^x} \neq 1.$$

Z Věty o limitě složené funkce 4.2.22(P) tedy plyne rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y - 1} = 1.$$

Pro každé $x \in B(0, \eta)$ platí

$$\frac{1}{x^2} \log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\log\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)}{\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1} \cdot \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1\right).$$

a také

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1\right) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{2^x - 3^x}{1+x3^x} \\ &= \frac{(e^{x \log 2} - 1) - (e^{x \log 3} - 1)}{x} \cdot \frac{1}{1+x3^x} \\ &= \left(\frac{e^{x \log 2} - 1}{x \log 2} \cdot \log 2 - \frac{e^{x \log 3} - 1}{x \log 3} \cdot \log 3 \right) \cdot \frac{1}{1+x3^x}. \end{aligned}$$

Snadno ověříme předpoklady Věty 4.2.22(P) pro okolí $P(0, \eta)$ a dostaneme tak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} - 1\right) = (1 \cdot \log 2 - 1 \cdot \log 3) \cdot 1 = \log\left(\frac{2}{3}\right).$$

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp(\log \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}.$$

♣

5.9.11. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)}.$$

Řešení. Pro každé $x > 1$ z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\begin{aligned} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)} &= \frac{\log(x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}))}{\log(x^{10}(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}))} \\ &= \frac{2 \log x + \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{10 \log x + \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})} \\ &= \frac{2 + \frac{\log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{\log x}}{10 + \frac{\log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}})}{\log x}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Protože je logaritmus spojitá funkce na $(0, \infty)$ (vizte (I4)) a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 1,$$

máme z Věty 4.2.22(S)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 0.$$

Obdobně odvodíme, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}) = 0.$$

Z (5.57) pak plyne díky Větě 4.2.1 rovnost

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)} = \frac{1}{5}.$$

♣

5.9.12. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log \cos(\pi 2^x)}.$$

Řešení. Označme

$$f(y) = \frac{\sin^2 y}{\log \cos y}, \quad y \in P(2\pi, \frac{\pi}{2}).$$

Počítejme limitu $\lim_{y \rightarrow 2\pi} f(y)$. Pak máme

$$f(y) = \frac{\sin^2 y}{(y - 2\pi)^2} \cdot \frac{\cos y - 1}{\log \cos y} \cdot \frac{(y - 2\pi)^2}{\cos y - 1}. \quad (5.58)$$

Položme

$$h(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{a} \quad g(y) = y - 2\pi, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Protože pro každé $y \in P(2\pi, 1)$ platí $g(y) \neq 0$, plyne z Věty 4.2.22(P)

$$\lim_{y \rightarrow 2\pi} \frac{\sin(y - 2\pi)}{y - 2\pi} = \lim_{y \rightarrow 2\pi} (h \circ g)(y) = \lim_{z \rightarrow 0} h(z) = 1.$$

Analogicky odvodíme rovnosti

$$\lim_{y \rightarrow 2\pi} \frac{\cos y - 1}{\log \cos y} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow 2\pi} \frac{\cos y - 1}{(y - 2\pi)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Z (5.58) a Věty 4.2.1 tak plyne

$$\lim_{y \rightarrow 2\pi} f(y) = 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2.$$

Nakonec označme

$$u(x) = \pi 2^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x \rightarrow 1} u(x) = 2\pi$ a pro každé $x \in P(1, 1)$ platí $u(x) \neq 2\pi$, a tedy z Věty 4.2.22(P) plyne

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\log \cos(\pi 2^x)} = \lim_{x \rightarrow 1} (f \circ u)(x) = \lim_{y \rightarrow 2\pi} f(y) = -2.$$

♣

5.9.13. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^2}.$$

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\frac{\sin x}{(e^x - 1)^2} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Označíme

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{(e^x - 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Potom platí $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Protože

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

z jednostranné verze věty o aritmetice limit funkcí (vizte Větu 4.2.1 a 4.2.3), dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{(e^x - 1)^2} = -\infty.$$

Zadaná limita tedy neexistuje dle Věty 4.1.18.

♣

5.9.14. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right).$$

Řešení. Přímocárým použitím Věty 4.2.26(P) obdržíme

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\cos y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Pak máme

$$\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} y \cdot \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin y \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\cos y} = 1.$$

Označíme

$$f(y) = \operatorname{tg} y \cdot \left(\frac{\pi}{2} - y\right), \quad y \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \text{a} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme $g(x) \neq \frac{\pi}{2}$. Pak z Věty 4.2.26(P) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f \circ g(x) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(y) = 1.$$

♣

5.9.15. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}.$$

Řešení. Označme

$$f(y) = \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\sqrt{1 - \sin y}}, \quad y \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad \text{a} \quad g(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1].$$

Naším úkolem je spočítat limitu $\lim_{x \rightarrow 1-} f \circ g(x)$. Nejprve spočteme

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(y) &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\sqrt{1 - \sin y}} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\sqrt{1 - \sin y}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \sin y}}{\sqrt{1 + \sin y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\sqrt{\cos^2 y}} \cdot \frac{1}{1 + \sin y} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{\pi}{2} - y}{\cos y} \cdot \frac{1}{1 + \sin y} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

V předposlední rovnosti jsme využili vztah $\sqrt{\cos^2 y} = \cos y$, který platí pro každé $y \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ze spojitosti funkce $\arcsin$ na svém definičním oboru plyne $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \frac{\pi}{2}$. Dále pro každé $x \in (-1, 1)$ platí $g(x) < \frac{\pi}{2}$. Odtud podle varianty Věty 4.2.26(P) plyne $\lim_{x \rightarrow 1-} f \circ g(x) = \sqrt{2}$.

♣

5.9.16. Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right).$$

Řešení. Označme

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce g na $P(\infty, 1)$ nenabývá hodnoty 1, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$ a

$$\lim_{y \rightarrow 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin y}{\sqrt{1-y}} = \sqrt{2}$$

dle Příkladu 5.9.15. Z věty o limitě složené funkce 4.2.26(P) tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} = \sqrt{2}.$$

Dále pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} x \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} &= \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1} \sqrt{\sqrt{x^2+1} + x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1+1}} = 1. \end{aligned}$$

♣

5.9.17. Příklad. Necht $a, b \in (0, \infty)$. Spočítejte limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^b} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^a x}{x^b}.$$

Řešení. Z Příkladu 5.4.4 a Věty 4.2.6 plyne, že pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Máme tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{(ax)^b} \cdot a^b = \infty.$$

Protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{(e^x)^b} = 0,$$

pomocí Věty 4.2.26 dostáváme

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^a}{(e^{\log x})^b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^a x}{x^b}.$$

♣

5.9.18. Příklad. Necht' $a \in \mathbb{R}$. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}).$$

Řešení. Je-li $a = 0$, zadaná limita se zřejmě rovná 0. Dále budeme tedy předpokládat, že $a \neq 0$. Na intervalu $(|a|, \infty)$ definujme funkce

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \log(x+a) \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{x+a+1}{x+a} \log x.$$

Spočítejme nejprve limitu $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$. Platí

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{x(x+a)} ((x+a)(x+1) \log(x+a) - x(x+a+1) \log x) \\ &= \frac{1}{x(x+a)} (x^2(\log(x+a) - \log x) + x(a+1)(\log(x+a) - \log x) + a \log(x+a)) \\ &= \frac{1}{x(x+a)} (x^2 \log(1 + \frac{a}{x}) + x(a+1) \log(1 + \frac{a}{x}) + a \log(x+a)) \\ &= \frac{x}{x+a} \log(1 + \frac{a}{x}) + \frac{a+1}{x+a} \log(1 + \frac{a}{x}) + \frac{a}{x(x+a)} \log(x+a). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Označme dále pro $x \in (|a|, \infty)$

$$h(x) = x^2 \log(1 + \frac{a}{x}) + x(a+1) \log(1 + \frac{a}{x}) + a \log(x+a).$$

Pak

$$h(x) = x \left(\frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} \cdot a + (a+1) \log(1 + \frac{a}{x}) + a \cdot \frac{\log(x+a)}{x} \right).$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \begin{cases} \infty & \text{pro } a > 0, \\ -\infty, & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

V obou případech tak existuje $\eta \in (|a|, \infty)$ takové, že $h(x) \neq 0$ na (η, ∞) . Tedy i

$$f(x) - g(x) = \frac{h(x)}{x(x+a)} \neq 0, \quad x \in (\eta, \infty).$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= e^{\frac{x+1}{x} \log(x+a)} - e^{\frac{x+a+1}{x+a} \log x} \\ &= e^{f(x)} - e^{g(x)} \\ &= e^{g(x)} \cdot \frac{e^{f(x)-g(x)} - 1}{f(x) - g(x)} \cdot (f(x) - g(x)). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Dále

$$\begin{aligned} e^{g(x)}(f(x) - g(x)) &= x e^{\frac{\log x}{x+a}} \frac{1}{x(x+a)} h(x) = e^{\frac{\log x}{x+a}} \frac{h(x)}{x+a} \\ &= e^{\frac{\log x}{x+a}} \left(\frac{x}{x+a} \frac{\log(1 + \frac{a}{x})}{\frac{a}{x}} a + \frac{x}{x+a} (a+1) \log(1 + \frac{a}{x}) + \frac{1}{x+a} a \log(x+a) \right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)}(f(x) - g(x)) = a.$$

Z (5.59) tedy plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{a}{x+a}} \right) = a.$$

♣

5.9.2. Derivace funkce. Při výpočtu derivace dané funkce f nejprve určíme definiční obor této funkce. V těch bodech definičního oboru, ve kterých je to možné, pak vypočteme hodnotu derivace pomocí vzorců pro derivace elementárních funkcí a vět z odstavce 5.1, zejména věty o aritmetice derivací (Věta 5.1.17) a věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24). V bodech definičního oboru funkce f , v nichž tento postup z nějakého důvodu selhává, se pokusíme vypočítat jednostranné derivace podle Definice 5.1.1, případně pomocí věty o limitě jednostranných derivací (Věta 5.2.9). Máme přitom na paměti, že definiční obor derivace může být vlastní podmnožinou definičního oboru funkce.

5.9.19 (značení derivace). Při počítání často používáme pro označení derivace funkce f v bodě x symbol $(f(x))'$ místo $f'(x)$. Například píšeme $(x^2)' = 2x$, čímž rozumíme $f'(x) = 2x$, kde $f(x) = x^2$. Při správné interpretaci tato notační konvence nepůsobí nedorozumění a zjednodušuje zápis.

5.9.20. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $h(x) = x^4 + \sin x$.

Řešení. Funkce h má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a je součtem funkcí $f(x) = x^4$ a $g(x) = \sin x$. Podle Příkladu 5.1.12 a (G11) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnosti $f'(x) = 4x^3$ a $g'(x) = \cos x$. Potom podle Věty 5.1.17(a) máme

$$h'(x) = 4x^3 + \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

5.9.21. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $u(x) = x^4 \sin x$.

Řešení. Funkce u má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a je součinem funkcí f a g z předchozího příkladu. Potom podle Věty 5.1.17(a) máme

$$u'(x) = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

5.9.22. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $v(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$.

Řešení. Funkce v má definiční obor roven $\mathbb{R}$ a je podílem funkcí $f(x) = x^2 - 1$ a $g(x) = 1 + x^2$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) = 2x$ a $g'(x) = 2x$. Potom podle Věty 5.1.17(c) máme

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2}, \\ &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

♣

5.9.23. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $h(x) = e^{x^2+2}$.

Řešení. Položme

$$g(x) = x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{a} \quad f(y) = e^y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Potom $\mathcal{D}(h) = \mathbb{R}$, neboť $h = f \circ g$. Snadno spočteme derivace

$$\begin{aligned} f'(y) &= e^y, \quad y \in \mathbb{R}, \\ g'(x) &= 2x + 0 = 2x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Protože je g spojitá v každém bodě $\mathbb{R}$, dostaneme podle věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24) pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2+2} \cdot 2x.$$

♣

5.9.24. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $h(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

Řešení. Položme

$$f(y) = \log y, \quad y \in (0, \infty) \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$, platí $x \in \mathcal{D}(h)$ právě tehdy, když $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$. Vyřešením příslušné nerovnice dostáváme $\mathcal{D}(h) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Pro derivace f a g platí

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{1}{y}, \quad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \\ g'(x) &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{vizte Příklad 5.9.22}). \end{aligned}$$

Pomocí věty o derivaci složené funkce dostáváme pro $x \in \mathcal{D}(f)$

$$h'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{x^4 - 1}.$$

Platí tedy $\mathcal{D}(h') = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Definiční obor funkce $x \mapsto \frac{4x}{x^4-1}$ je sice roven $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, nicméně definiční obor derivace je menší. ♣

5.9.25. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = x^{\log x}$, $x \in (0, \infty)$.

Řešení. Podle definice obecné mocniny (Definice 5.3.10(c)) platí pro každé $x \in (0, \infty)$ vztah $f(x) = e^{\log x \cdot \log x} = e^{\log^2 x}$. Derivaci spočteme pomocí věty o derivaci složené funkce (Věta 5.1.24), tedy

$$f'(x) = e^{\log^2 x} \cdot (\log^2 x)' = e^{\log^2 x} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Pro definiční obor derivace platí $\mathcal{D}(f') = (0, \infty)$. ♣

5.9.26. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

Řešení. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $1 - e^{-x^2} \geq 0$, a proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Derivaci funkce f v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spočteme dvojnásobným užitím věty o derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} (1 - e^{-x^2})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} (-e^{-x^2}) (-2x) \\ &= \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}. \end{aligned}$$

V bodě 0 dopočítáme jednostranné derivace přímo podle definice:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Obdobně lze spočítat derivaci zleva za použití vztahu $h = -\sqrt{h^2}$ pro $h < 0$. Dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} -\sqrt{\frac{e^{-h^2} - 1}{-h^2}} = -1.$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, a tedy $f'(0)$ neexistuje, neboť $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ (vizte Větu 5.1.9). ♣

5.9.27. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \min\{x, x^3\}$.

Řešení. Funkci f můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{pro } x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1], \\ x & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Tedy zřejmě platí

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1), \\ 1 & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Zbývá vyšetřit derivaci v bodech $x \in \{0, 1, -1\}$. Protože funkce f je spojitá v bodě -1 , platí podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.9)

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-} 3x^2 = 3, \quad f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+} 1 = 1.$$

Odtud plyne, že $f'(-1)$ neexistuje. Podobně lze odvodit, že $f'(0)$ a $f'(1)$ neexistují a že platí

$$f'_-(0) = 1, \quad f'_+(0) = 0, \quad f'_-(1) = 3, \quad f'_+(1) = 1.$$

♣

5.9.28. Příklad. Spočítejte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Řešení. Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí, že funkce f je na jistém okolí bodu x definována předpisem $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$. Derivace v bodě je lokální pojem (vizte 5.1.3(c)), a proto pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^2)' \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \left(\sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

V bodě 0 spočteme derivaci podle definice

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z Věty 4.2.15, neboť funkce sinus je omezená. Platí tedy $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R}$. ♣

5.9.29. Příklad. Spočítejte derivaci funkce $f(x) = \arccos(1 - x^2)$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{D}(\arccos) = [-1, 1]$ a reálné číslo x splňuje nerovnosti

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$$

právě tehdy, když $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, je $\mathcal{D}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Podle věty pro derivaci složené funkce (Věta 5.1.24), kterou lze použít pro každé $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$,

dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} \cdot (1 - x^2)' = \frac{-1}{\sqrt{2x^2 - x^4}}(-2x) \\ &= \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Funkce f je na svém definičním oboru spojitá, a proto se můžeme pokusit jednostranné derivace v bodech množiny $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ počítat jako limity jednostranných derivací podle věty o limitě derivací (Věta 5.2.9). Dostaneme tak

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}} = -\sqrt{2}, \\ f'_+(-\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}+} \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}} = -\infty, \\ f'_-(\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2 \operatorname{sign} x}{\sqrt{2 - x^2}} = \infty. \end{aligned}$$

Definičním oborem f' je tedy množina $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$, přičemž hodnoty jednostranných derivací ve zbývajících bodech definičního oboru f jsou uvedeny výše. ♣

5.9.30. Příklad. Dokažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x.$$

Řešení. Definiční obor funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

je $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Na každém z těchto dvou intervalů platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Zadaná funkce je tedy na intervalu $(0, \infty)$ konstantní podle Věty 5.2.8 a dosazením bodu $x = 1$ dostaneme

$$f(1) = \operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Funkce f je tedy rovna $\frac{\pi}{2}$ na celém intervalu $(0, \infty)$. Analogicky dosazením bodu $x = -1$ dostaneme, že f je rovna $-\frac{\pi}{2}$ na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

5.9.3. l'Hospitalovo pravidlo.**5.9.31. Příklad.** Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}{x}.$$

Řešení. Označme

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x) \quad \text{a} \quad g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pak $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Můžeme se tedy pokusit spočítat zadanou limitu pomocí l'Hospitalova pravidla 5.4.1(a). Dokážeme-li totiž existenci limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, můžeme z výše uvedeného l'Hospitalova pravidla usoudit na existenci limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, a navíc obdržíme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+(1+x)^2}(1+x)' - \frac{1}{1+(1-x)^2}(1-x)'}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{-1}{1+(1-x)^2} \right) = \frac{1}{1+1} - \frac{-1}{1+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Zadaná limita je tedy rovna 1. ♣

5.9.32 (postupná aplikace l'Hospitalova pravidla). Při výpočtu limity podílu funkcí často zapisujeme řešení ve tvaru

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A. \quad (5.60)$$

Postupujeme tak, že pro funkce f a g ověříme splnění předpokladů l'Hospitalova pravidla a vypočteme f' a g' . Tak obdržíme novou limitu pro funkci f'/g' . Pokud bychom tuto limitu uměli vypočítat, byli bychom hotovi. Často je i tato limita ale pro přímý výpočet obtížná. Pak můžeme l'Hospitalovo pravidlo zkusit použít znovu. Bez dopočetí limity funkce f'/g' však platnost první rovnosti v (5.60) *není ověřena*. Takto je tomu pro každou rovnost v (5.60). Pokud se nám podaří ověřit poslední rovnost, bude odtud plynout platnost předposlední rovnosti v (5.60) a tak dále až ověříme platnost první rovnosti v (5.60). Tím bude výpočet dokončen. Chronologicky tedy při výpočtu postupujeme samozřejmě zleva doprava, ale logické ověřování jde zprava doleva.

5.9.33. Příklad. Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Řešení. Postupnou aplikací l'Hospitalova pravidla dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x - 2}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cos x - 2e^x \sin x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

♣

5.9.34. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

Řešení. Pro každé x z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}. \quad (5.61)$$

Třikrát použijeme l'Hospitalovo pravidlo a obdržíme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8 \cos x \sin x}{24x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Díky (5.61) dopočteme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{3}.$$

♣

5.9.35. Příklad. Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Řešení. Pro každé x z definičního oboru funkce, jejíž limitu počítáme, platí

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp \left(\frac{1}{x^2} \log \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right) \right). \quad (5.62)$$

Argument funkce $\exp$ přepíšeme následujícím způsobem

$$\frac{1}{x^2} \log \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right) = \underbrace{\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right)}_{(A)} \cdot \underbrace{\frac{\log \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1}}_{(B)}. \quad (5.63)$$

Uvedený vztah platí pro každé x , pro které je pravá strana definována. Vypočítáme limitu funkcí označených jako (A) a (B).

Výpočet limity výrazu (A). Pomocí l'Hospitalova pravidla obdržíme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Výpočet limity výrazu (B). Ověříme podmínku (P) z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.22). Ukážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $\operatorname{arctg} x \neq x$. Definujme funkci f předpisem $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$. Pro její derivaci platí

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ze znaménka derivace vidíme, že f je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0]$ i na intervalu $[0, \infty)$. Funkce f je tedy rostoucí na celém $\mathbb{R}$. Z vlastnosti $f(0) = 0$ plyne, že pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $f(x) > 0$ a pro každé $x \in (-\infty, 0)$ platí $f(x) < 0$. Proto $f(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Máme tedy, že (například) pro $\eta = 1$ platí $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \neq 1$ pro každé $x \in P(0, 1)$. Z Příkladu 5.9.1 a vlastnosti (ATa5) tedy dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1} = 1.$$

Žádný výpočet. Z (5.62) tedy plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

♣

5.9.4. Průběh funkce.

5.9.36. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Řešení. (1) Exponenciální funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}$, a proto $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x),$$

takže f je sudá. Stačí tedy vyšetřovat průběh pouze na intervalu $[0, \infty)$ a zbytek odvodit ze symetrie funkce. Průsečík grafu funkce f s osou y je bod $[0, 1]$. Rovnice $0 = f(x) = e^{-x^2}$ zřejmě nemá řešení, a graf f nemá žádné průsečíky s osou x .

(2) Funkce $x \mapsto -x^2$ je spojitá na $\mathbb{R}$, exponenciální funkce je spojitá na $\mathbb{R}$ a složení dvou spojitých funkcí je funkce spojitá. Proto je f spojitá na svém definičním oboru. Snadno spočítáme limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0. \quad (5.64)$$

Odtud snadno vidíme, že funkce $x \mapsto 0$ je asymptotou v ∞ i asymptotou v $-\infty$.

(3) Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = e^{-x^2}(-x^2)' = -e^{-x^2}2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pro použití Věty 5.5.7 prozkoumáme znaménko první derivace, tj. určíme intervaly, kde je f' kladná a kde záporná. Platí

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{pro } x < 0, \\ = 0 & \text{pro } x = 0, \\ < 0 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

která je díky nezápornosti exponenciální funkce zřejmě splněna, právě tehdy když $x < 0$. Naše funkce je tedy rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$ a klesající na intervalu $(0, \infty)$. Funkce má tedy globální maximum v 0 s hodnotou 1 a jiné extrémy nemá.

Funkce f je spojitá, a proto je obor hodnot $\mathcal{H}(f) = f(\mathbb{R})$ interval (Věta 4.3.8). Právý krajní bod tohoto intervalu musí být 1, neboť jde o maximální hodnotu, které f nabývá. Tento bod patří do $\mathcal{H}(f)$. Funkce f je kladná. Odtud a díky (5.64) dostáváme, že druhým koncovým bodem intervalu $\mathcal{H}(f)$ je bod 0, který do tohoto intervalu nepatří. Obor hodnot naší funkce je tedy $\mathcal{H}(f) = (0, 1]$.

(4) Druhou derivaci spočteme jako derivaci první derivace:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = (-e^{-x^2}2x)' \\ &= -e^{-x^2}(-2x)2x - e^{-x^2}2 = e^{-x^2}(4x^2 - 2). \end{aligned}$$

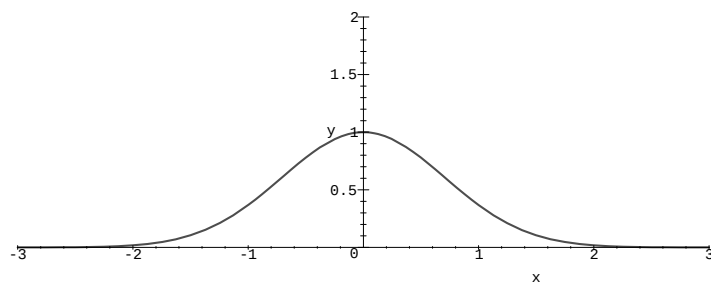
Pro použití Věty 5.6.11 prozkoumáme znaménko druhé derivace, tj. určíme intervaly, kde je f'' kladná a kde záporná. Platí

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{pro } x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty), \\ < 0 & \text{pro } x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \\ = 0 & \text{pro } x \in \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}. \end{cases}$$

Odtud plyne, že naše funkce:

- je konvexní na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a na intervalu $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$,
- konkávní na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
- body $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní podle Věty 5.6.18.

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 16.



5.9.37. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right).$$

Řešení. (1) Funkce arctg je definována na $\mathbb{R}$, a proto je naše funkce definována pro každé x , pro které je definována funkce v argumentu, tj. $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$. V definičním oboru této funkce jsou právě ta x , která splňují $x^2 - 1 \neq 0$. Dostáváme tedy $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(-x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = f(x),$$

a tedy je f sudá.

(2) Snadno vidíme, že naše funkce je spojitá na svém definičním oboru. Spočteme limitu v ∞ . Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1.$$

Pomocí věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.22(S)) obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Díky sudosti f dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Funkce f má v ∞ i $-\infty$ limitu, a tedy snadno vidíme, že přímka $y = \frac{\pi}{4}$ je asymptotou v ∞ i asymptotou v $-\infty$.

Nyní spočteme jednostranné limity v bodech 1 a -1 . Podle Věty 4.2.6 platí

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \infty.$$

Odtud a ze vztahu $\lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$ obdržíme díky větě o limitě složené funkce (Věta 4.2.22(S)) výsledek

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Obdobně obdržíme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) &= -\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -1-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -1+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(3) Derivaci spočteme pomocí vzorce pro derivování složené funkce a pro derivaci podílu jako

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-4x}{(x^2+1)^2 + (x^2-1)^2} = \frac{-2x}{x^4+1}, \quad x \in \mathcal{D}(f). \end{aligned}$$

Pro použití Věty 5.5.7 prozkoumáme znaménko první derivace. Platí

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{pro } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0), \\ = 0 & \text{pro } x = 0, \\ < 0 & \text{pro } x \in (0, 1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Dostáváme, že f je rostoucí na $(-\infty, -1)$, rostoucí na $(-1, 0)$, klesající na $(0, 1)$ a klesající na $(1, \infty)$. Naše funkce má tedy lokální maximum v 0 s hodnotou $-\frac{\pi}{4}$ a jiné extrémy nemá. Z právě uvedeného a spojitosti funkce f dostáváme

$$f((-\infty, -1)) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f((-1, 1)) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right], \quad f((1, \infty)) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

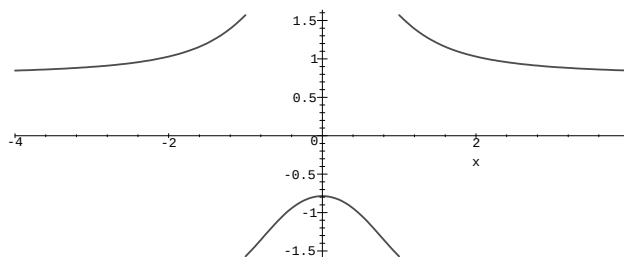
Obor hodnot naší funkce tedy je $\mathcal{H}(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(4) Vypočteme druhou derivaci

$$f''(x) = \left(\frac{-2x}{x^4+1}\right)' = \frac{-2(x^4+1) - (-2x)4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{6(x^4 - \frac{1}{3})}{(x^4+1)^2}.$$

Podle znaménka druhé derivaci tedy určíme, že naše funkce je konvexní na $(-\infty, -1)$, konvexní na $(-1, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$, konkávní na $(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$, konvexní na $(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 1)$ a konvexní na $(1, \infty)$. Body $-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ a $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ jsou inflexními body funkce f .

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 17.

5.9.38 (několik omylů). Z nerovnosti

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 + 1)^2 + (x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{x^4 + 1} > 0$$

nelze usoudit, že naše funkce je rostoucí na intervalu $(-\infty, 0)$. Toto není správně, neboť -1 není součástí definičního oboru, a proto zde funkce nemůže být rostoucí. Dalším chybným tvrzení je, že funkce je rostoucí na $(-\infty, -1) \cup (1, 0)$. Ani toto nemůže být dobře vzhledem k tomu, že $-2 < -\frac{1}{2}$, ale $f(-2) > f(-\frac{1}{2})$. Správným tvrzením je tedy, že f je rostoucí na intervalu $(-\infty, -1)$ a funkce je rostoucí na intervalu $(-1, 0)$.

5.9.39. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg} |x - 1|.$$

Řešení. (1) Funkce arctg je definována na $\mathbb{R}$, a proto dostáváme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Je snadno vidět, že f je spojitá na $\mathbb{R}$. Spočteme limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (|x| + \operatorname{arctg} |x - 1|) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x + \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(x - 1) = \infty + \frac{\pi}{2} = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| + \operatorname{arctg} |x - 1|) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(1 - x) = \infty + \frac{\pi}{2} = \infty. \end{aligned}$$

Pro nalezení asymptoty v ∞ spočteme limity

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} |x - 1|}{x} = 1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \operatorname{arctg}(x - 1) - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(x - 1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Naše funkce má tedy v ∞ asymptotu $x \mapsto x + \frac{\pi}{2}$.

Obdobně spočteme

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} |x-1|}{x} = -1 + 0 = -1, \\ \tilde{b} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \tilde{a}x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + \operatorname{arctg}(1-x) + x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(1-x) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Asymptotou f v bodě $-\infty$ je tedy funkce $x \mapsto -x + \frac{\pi}{2}$.

(2) U příkladů obsahujících absolutní hodnoty je většinou vhodné rozdělit definiční obor na několik intervalů, kde absolutní hodnota nemění znaménko, a na těchto intervalech vyšetřit vždy zadanou funkci zvlášť. Platí

$$f(x) = \begin{cases} -x + \operatorname{arctg}(1-x) & \text{pro } x \in (-\infty, 0], \\ x + \operatorname{arctg}(1-x) & \text{pro } x \in (0, 1], \\ x + \operatorname{arctg}(x-1) & \text{pro } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Mimo body 0 a 1 spočteme derivaci f :

$$f'(x) = \begin{cases} (-x + \operatorname{arctg}(1-x))' = -1 + \frac{-1}{1+(1-x)^2} = \frac{-(x^2-2x+3)}{x^2-2x+2} & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ (x + \operatorname{arctg}(1-x))' = 1 + \frac{-1}{1+(1-x)^2} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2} & \text{pro } x \in (0, 1), \\ (x + \operatorname{arctg}(x-1))' = 1 + \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x+2} & \text{pro } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Zbývá nám vyšetřit jednostranné derivace ve zlomových bodech 0 a 1. Naše funkce je v těchto bodech spojitá, a proto můžeme použít Větu 5.2.9 o limitě jednostranných derivací a dostaneme

$$\begin{aligned}f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x+2} = \frac{1-2+3}{1-2+2} = 2, \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2} = \frac{1-2+1}{1-2+2} = 0, \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2} = \frac{0-0+1}{0-0+2} = \frac{1}{2}, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-(x^2-2x+3)}{x^2-2x+2} = \frac{-(0-0+3)}{0-0+2} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

V bodech 0 a 1 tedy existují pouze jednostranné derivace a definičním oborem derivace tedy je $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

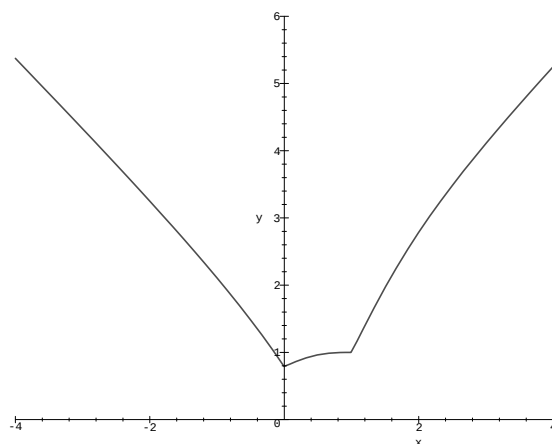
Pro každé $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ platí $f'(x) > 0$ a pro každé $x \in (-\infty, 0)$ platí $f'(x) < 0$. Funkce f je tedy klesající na $(-\infty, 0]$, rostoucí na $[0, 1]$ a rostoucí na $[1, \infty)$. Z toho, že f je rostoucí na $[0, 1]$ i na $[1, \infty)$, dostáváme, že f je rostoucí i na intervalu $[0, \infty)$. Odtud plyne, že f má globální minimum v 0 s hodnotou $\frac{\pi}{4}$ a jiné extrémy nemá. Obor hodnot je $\mathcal{H}(f) = [\frac{\pi}{4}, \infty)$.

(3) Vypočteme druhou derivaci:

$$f''(x) = \begin{cases} \left(-1 - \frac{1}{1+(x-1)^2}\right)' = \frac{2(x-1)}{(1+(x-1)^2)^2} & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ \left(1 - \frac{1}{1+(x-1)^2}\right)' = \frac{2(x-1)}{(1+(x-1)^2)^2} & \text{pro } x \in (0, 1), \\ \left(1 + \frac{1}{1+(x-1)^2}\right)' = \frac{-2(x-1)}{(1+(x-1)^2)^2} & \text{pro } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Snadným vyšetřením znaménka f'' dostaneme, že f je konkávní na $(-\infty, 0)$, konkávní na $(0, 1)$ a konvexní na $(1, \infty)$. Infexní body zadaná funkce nemá.

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 18.

♣

5.9.40. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{1+x}}.$$

Řešení. (1) Snadno zjistíme, že definiční obor je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(2) Zadaná funkce je spojitá na svém definičním oboru. Určíme limity v krajních bodech:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} &= \infty \cdot e^1 = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} &= -\infty \cdot e^1 = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1+} (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} &= -2 \cdot 0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -1-} (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} &= -2 \cdot \infty = -\infty.\end{aligned}$$

Asymptotu f v ∞ určíme pomocí limit

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x}{1+x}} = 1 \cdot e = e, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x(e^{\frac{x}{1+x}} - e) - e^{\frac{x}{1+x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} xe \left(\frac{x}{1+x} - 1 \right) \cdot \frac{e^{\frac{x}{1+x}-1} - 1}{\frac{x}{1+x} - 1} - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x}{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-xe}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{1+x}-1} - 1}{\frac{x}{1+x} - 1} - e = -e \cdot 1 - e = -2e.\end{aligned}$$

Použití věty o limitě složené funkce bylo korektní, neboť pro každé $x \in P(\infty, 1)$ platí $\frac{x}{x+1} - 1 \neq 0$, a proto je splněna podmínka (P). Funkce f má asymptotu v ∞ rovnou $x \mapsto ex - 2e$.

Obdobně spočteme asymptotu v $-\infty$:

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{1+x}} = 1 \cdot e = e \\ \tilde{b} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \tilde{a}x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((e^{\frac{x}{1+x}} - e) - e^{\frac{x}{1+x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe \left(\frac{x}{1+x} - 1 \right) \cdot \frac{e^{\frac{x}{1+x}-1} - 1}{\frac{x}{1+x} - 1} - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-xe}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{x}{1+x}-1} - 1}{\frac{x}{1+x} - 1} - e = -e \cdot 1 - e = -2e.\end{aligned}$$

Podmínka (P) věty o limitě složené funkce je opět splněna, neboť $\frac{x}{x+1} - 1 \neq 0$ pro každé $x \in P(-\infty, 1)$. Funkce f má asymptotu v ∞ rovnou $x \mapsto ex - 2e$.

(3) Vypočteme první derivaci:

$$\begin{aligned}f'(x) &= ((x-1)e^{\frac{x}{1+x}})' = e^{\frac{x}{1+x}} + (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} \left(\frac{x}{1+x} \right)' \\ &= e^{\frac{x}{1+x}} \left(1 + (x-1) \frac{1}{(x+1)^2} \right) = e^{\frac{x}{1+x}} \cdot \frac{x(x+3)}{(x+1)^2}, \quad x \in \mathcal{D}(f).\end{aligned}$$

Platí tedy $\mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Díky nezápornosti exponenciální funkce rozhodne o znaménku derivace člen $\frac{x(x+3)}{(x+1)^2}$. Vyšetřením jeho znaménka zjistíme: f je rostoucí na $(-\infty, -3)$ a na $(0, \infty)$, klesající na $(-3, -1)$ a na $(-1, 0)$. Funkce má tedy lokální maximum v -3 s hodnotou $-4e^{\frac{3}{2}}$, lokální minimum v 0 s hodnotou -1 . Tyto extrémy nejsou globální vzhledem k limitám funkce f v ∞ a $-\infty$.

Pro obor hodnot platí

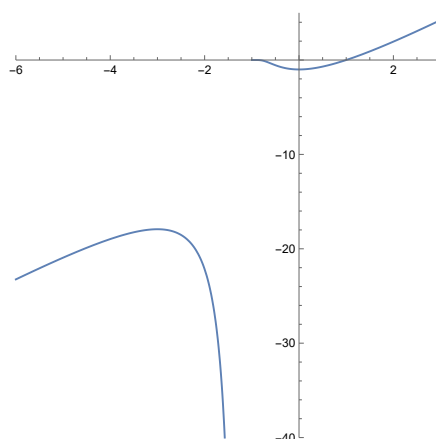
$$\mathcal{H}(f) = f((-\infty, -1)) \cup f((-1, \infty)) = (-\infty, -4e^{\frac{3}{2}}] \cup [-1, \infty).$$

(4) Vypočteme druhou derivaci:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{\frac{x}{1+x}} \frac{x(x+3)}{(x+1)^2} \right)' \\ &= e^{\frac{x}{1+x}} \frac{1}{(x+1)^2} \frac{x(x+3)}{(x+1)^2} + e^{\frac{x}{1+x}} \frac{(2x+3)(x+1)^2 - (x^2+3x)(2x+2)}{(x+1)^4} \\ &= e^{\frac{x}{1+x}} \frac{5x+3}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Znaménko druhé derivace snadno určíme podle znaménka výrazu $5x+3$. Funkce f je tedy konkávní na intervalu $(-\infty, -1)$, konkávní na intervalu $(-1, -\frac{3}{5})$ a konvexní na intervalu $(-\frac{3}{5}, \infty)$. V bodě $-\frac{3}{5}$ má f inflexní bod.

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 19.

♣

5.9.41. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log(4 + x^2) + 3 \operatorname{arccotg}\left(\frac{2}{x}\right).$$

Řešení. (1) Platí $\mathcal{D}(\log) = (0, \infty)$, $\mathcal{D}(\operatorname{arccotg}) = \mathbb{R}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $4 + x^2 > 0$. Definičním oborem funkce $x \mapsto \frac{2}{x}$ je množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Platí tedy $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(2) Podle věty o spojitosti složené funkce je funkce f spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Pro limity funkce f v krajních bodech jejího definičního oboru platí:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \log(4) + 3\pi, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \infty, & \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \log(4). \end{aligned}$$

Vypočteme asymptotu f v ∞ :

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \infty. \end{aligned}$$

Funkce f tedy nemá asymptotu v ∞ . Obdobně zjistíme, že f nemá asymptotu ani v $-\infty$.

(3) Vypočteme první derivaci funkce f .

$$f'(x) = \frac{2x}{4 + x^2} + \frac{-3}{1 + \frac{4}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{2x + 6}{x^2 + 4}, \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Pro znaménko derivace platí:

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{pro } x \in (-\infty, -3), \\ > 0 & \text{pro } x \in (-3, 0) \cup (0, \infty), \\ = 0 & \text{pro } x = -3. \end{cases}$$

Díky Větě 5.5.7 dostáváme, že f je klesající na $(-\infty, -3]$ a je rostoucí na $[-3, 0)$ a na $(0, \infty)$.

Z výše uvedeného vyplývá, že f má lokální minimum v bodě $x = -3$, přičemž hodnota tohoto minima je rovna $\log(13) + 3 \operatorname{arccotg}(-\frac{2}{3})$. Toto minimum není globální, protože $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) < f(-3)$, a tedy na pravém prstencovém okolí bodu 0 existuje bod y takový, že $f(y) < f(-3)$. Jiné extrémy funkce f nemá.

Z výše uvedeného vyplývá

$$f((-\infty, 0)) = (f(-3), \infty) \quad \text{a} \quad f((0, \infty)) = (\log(4), \infty).$$

Protože $f(-3) > \log(4)$, vyplývá odtud, že $\mathcal{H}(f) = (\log(4), \infty)$.

(4) Vypočteme druhou derivaci:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{x^2 + 6x - 4}{(x^2 + 4)^2}, \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Polynomu $x \mapsto x^2 + 6x - 4$ má kořeny $x_1 = -3 - \sqrt{13}$ a $x_2 = -3 + \sqrt{13}$. Platí $x_1 < 0 < x_2$. Pro znaménko f'' dostáváme

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{pro } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty), \\ > 0 & \text{pro } x \in (x_1, 0) \cup (0, x_2), \\ = 0 & \text{pro } x \in \{x_1, x_2\}. \end{cases} \quad (5.65)$$

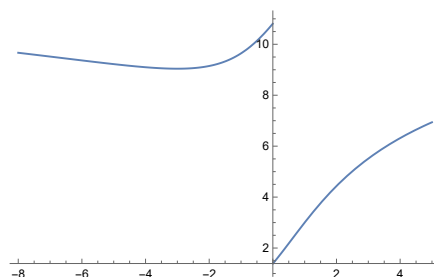
Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f ryze konkávní na $(-\infty, x_1]$, na $[x_1, 0)$ a na $(0, x_2]$; ryze konkávní je na $[x_2, \infty)$.

Z (5.65) a Věty 5.6.18 dostáváme, že x_1 a x_2 jsou jedinými inflexními body funkce f .

Závěrem ještě určíme jednostranné limity funkce f' v bodě 0. Tato informace se bude při náčrtu grafu funkce f hodit. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \frac{3}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \frac{3}{2}.$$

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 20.



5.9.42. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{6 \sin x}.$$

Řešení. (1) Funkce f je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $\sin x \neq 0$. Platí tedy $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (1+k)\pi)$. Vzhledem k tomu, že sinus je lichá funkce, je f též lichá. Navíc je periodická s periodou 2π . Omezíme se tedy při vyšetřování průběhu f na množinu $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

(2) Funkce f je zjevně spojitá v každém bodě $\mathcal{D}(f)$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow -\pi-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) = \infty. \quad (5.66)$$

(3) Vypočteme první derivaci funkce f .

$$f'(x) = \cos x - \frac{\cos x}{6 \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \left(\sin^2 x - \frac{1}{6} \right), \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Označme $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$, $x_1 = -\pi + \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \pi - \alpha$. Pro znaménko první derivace platí

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{pro } x \in (-\pi, x_1) \cup (-\frac{\pi}{2}, x_2) \cup (x_3, \frac{\pi}{2}) \cup (x_4, \pi), \\ < 0 & \text{pro } x \in (x_1, -\frac{\pi}{2}) \cup (x_2, 0) \cup (0, x_3) \cup (\frac{\pi}{2}, x_4), \\ = 0 & \text{pro } x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, x_1, x_2, x_3, x_4\}. \end{cases}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonicity (Věta 5.5.7) je tedy funkce f

- rostoucí na intervalech $(-\pi, x_1]$, $[-\frac{\pi}{2}, x_2]$, $[x_3, \frac{\pi}{2}]$, $[x_4, \pi)$ a
- klesající na $[x_1, -\frac{\pi}{2}]$, $[x_2, 0)$, $(0, x_3]$, $[\frac{\pi}{2}, x_4]$.

V bodech $-\frac{\pi}{2}$, x_3 , x_4 má lokální minima, přičemž

$$f(x_3) = f(x_4) = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{a} \quad f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{7}{6},$$

a v bodech x_1 , x_2 , $\frac{\pi}{2}$ má lokální maxima, přičemž

$$f(x_1) = f(x_2) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{a} \quad f(\frac{\pi}{2}) = \frac{7}{6}.$$

Z právě provedených úvah, Věty 4.3.6 a (5.66) plyne, že

$$\mathcal{H}(f) = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty \right).$$

(4) Vypočteme druhou derivaci funkce f .

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\cos x - \frac{\cos x}{6 \sin^2 x} \right)' \\ &= -\sin x + \frac{\sin x}{6 \sin^2 x} + \cos x \cdot \frac{-2}{6} (\sin x)^{-3} \cdot \cos x \\ &= \frac{-6 \sin^4 x \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{6 \sin^3 x} = \frac{-6 \sin^4 x - \sin^2 x + 2}{6 \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Funkce $y \mapsto -6y^2 - y + 2$ má kořeny $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, je kladná na intervalu $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ a záporná na množině $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$. Znaménko $f''(x)$ tedy závisí na tom, do které z uvedených množin náleží hodnota $\sin^2 x$. Vyřešením příslušné nerovnice obdržíme

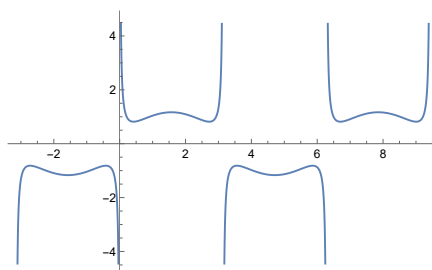
$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{pro } x \in (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}) \cup (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi), \\ < 0 & \text{pro } x \in (-\pi, -\frac{3\pi}{4}) \cup (-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), \\ = 0 & \text{pro } x \in \{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}. \end{cases}$$

Podle Věty 5.6.11 je funkce f

- ryze konvexní na intervalech $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$, $(0, \frac{\pi}{4}]$, $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$ a
- ryze konkávní na intervalech $(-\pi, -\frac{3\pi}{4}]$, $[-\frac{\pi}{4}, 0)$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Dle Věty 5.6.18 jsou body $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ inflexními body funkce f . Vzhledem ke znaménku druhé derivace žádné jiné inflexní body funkce f nemá, vizte Větu 5.6.16.

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 21.

♣

5.9.43. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3}}.$$

Řešení. (1) Jmenovatel funkce f je definován pro každé $x \in \mathbb{R}$ a je roven 0 právě když $x = 27$. Platí tedy $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{27\}$.

(2) Funkce f je díky Větám 4.2.4 a 4.3.5 spojitá v každém bodě svého definičního oboru spojitá. Vypočteme limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 27^+} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 27^-} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Zkusíme určit asymptoty funkce f . Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x \cdot \sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sqrt[9]{x} - x \sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x \sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x \sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} \cdot \frac{x^2 + x^2 \sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} + x^2 \left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} \right)^2}{x^2 + x^2 \sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} + x^2 \left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} \right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 \left(1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} \cdot \frac{1}{x^2 + x^2 \sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} + x^2 \left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} \right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \sqrt[3]{x^8}}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} \cdot \frac{1}{x^2 + x^2 \sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} + x^2 \left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} \right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} + \left(\sqrt[3]{1 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}} \right)^2} \\
&= \frac{\infty}{1} \cdot \frac{1}{1 + 1 + 1} = \infty.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že f nemá v ∞ asymptotu. Obdobně obdržíme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \infty$. Tedy ani v $-\infty$ funkce f asymptotu nemá.

(3) Vypočteme první derivaci.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{\sqrt[9]{x^{10}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3}} \right)' = \frac{\frac{10}{9} \sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3} - \sqrt[9]{x^{10}} \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{x} - 3)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{(\sqrt[3]{x} - 3)^2}} \\
&= \frac{\sqrt[9]{x}}{3 \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x} - 3)^4}} \cdot (3 \sqrt[3]{x} - 10), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 27\}.
\end{aligned}$$

V bodě 0 dostaneme

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[9]{x}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3}} = 0.$$

Platí tedy

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1000}{27}, \infty\right), \\ < 0 & \text{pro } x \in (0, 27) \cup \left(27, \frac{1000}{27}\right), \\ = 0 & \text{pro } x \in \left\{0, \frac{1000}{27}\right\}. \end{cases}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonicity je tedy funkce f rostoucí na $(-\infty, 0]$ a na $[\frac{1000}{3}, \infty)$, klesající na $[0, 27]$ a na $(27, \frac{1000}{3}]$.

Vzhledem k limitám v ∞ a $-\infty$ nemá f globální extrémy. Z výše uvedených intervalů monotonicity vyplývá, že funkce f má lokální maximum v bodě 0, přičemž hodnota tohoto maxima je rovna 0, a má lokální minimum v bodě $\frac{1000}{27}$, přičemž hodnota tohoto minima je $\frac{1000}{27} \sqrt[3]{10}$.

Jelikož je f spojitá na $(-\infty, 27)$ i na $(27, \infty)$, dostáváme kombinací Věty 4.3.8, limit v krajních v bodech definičního oboru a znalosti lokálních extrémů f , že platí

$$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0] \cup [\frac{1000}{27} \sqrt[3]{10}, \infty).$$

(4) Druhou derivaci funkce f spočteme v bodech $\mathcal{D}(f) \setminus \{0\}$. Pro tyto body platí

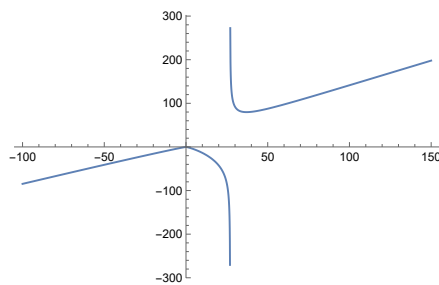
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{3 \sqrt[9]{x^4} - 10 \sqrt[9]{x}}{3 \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x} - 3)^4}} \right)' \\ &= \frac{\left(\frac{12}{9} \frac{1}{\sqrt[9]{x^5}} - \frac{10}{9} \frac{1}{\sqrt[9]{x^8}} \right) \cdot 3 \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x} - 3)^4} - (3 \sqrt[9]{x^4} - 10 \sqrt[9]{x}) 4 \sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{9 \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x} - 3)^8}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt[9]{x^8}}}{3 \sqrt[3]{(\sqrt[3]{x} - 3)^8}} \cdot \left(\left(\frac{4}{3} \sqrt[9]{x^3} - \frac{10}{3} \right) (\sqrt[3]{x} - 3) - \frac{4}{9} \sqrt[9]{x^2} (3 \sqrt[9]{x^4} - 10 \sqrt[9]{x}) \right) \\ &= \frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt[9]{x^8}}}{3 \sqrt[3]{(x^{\frac{1}{3}} - 3)^8}} (-2 \sqrt[3]{x} + 10). \end{aligned}$$

Tedy jest

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 27) \cup (125, \infty), \\ > 0 & \text{pro } x \in (27, 125), \\ = 0 & \text{pro } x = 125. \end{cases} \quad (5.67)$$

Podle Věty 5.6.11 je tedy funkce f ryze konkávní na $(-\infty, 0]$, na $[0, 27]$, na $[125, \infty)$ a ryze konvexní na $(27, 125]$. Jelikož je $f'(0) = 0$, je podle Příkladu 5.8.16 f ryze konkávní na $(-\infty, 27)$. Dále z Věty 5.6.18 plyne, že bod 125 je inflexním bodem funkce f . Vzhledem k (5.67) funkce f jiné inflexní body nemá.

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 22.

♣

5.9.44. Příklad. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{\log^2 x}}, & \text{pro } x \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ 0, & \text{pro } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Řešení. (1) Zřejmě platí $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$.

(2) Vzhledem k tomu, že $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ je f spojitá v bodech 0 a 1. Zřejmě je též spojitá v bodech množiny $(0, 1) \cup (1, \infty)$, a tedy je spojitá na $\mathcal{D}(f)$. Limita v bodě ∞ je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = \infty \cdot 1 = \infty.$$

Zjistíme nyní, zdali má funkce f v ∞ asymptotu. Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{e^{-\log^{-2} x} - 1}{-\log^{-2} x} \cdot (-\log^{-2} x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\log^{-2} x} - 1}{-\log^{-2} x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\log^2 x} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Funkce f nemá v ∞ asymptotu. Při výpočtu jsme užili Příklad 5.9.17.

(3) Vypočteme první derivaci.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} + x e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \cdot 2(\log x)^{-3} \cdot \frac{1}{x} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} (1 + 2 \log^{-3} x), \quad x \in (0, 1) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Přímo z definice spočítáme

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} = 1.$$

Konečně díky Větě 5.2.9 dostáváme

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{\log^2 x}} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\log^{-2} x)^2}{e^{\log^{-2} x}} \cdot 2 \log x \\ &= 0 + 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili Větu 4.2.22 a fakt $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$, vizte Příklad 5.9.17.

Platí tedy

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{pro } x \in (0, e^{-\sqrt[3]{2}}) \cup (1, \infty), \\ < 0 & \text{pro } x \in (e^{-\sqrt[3]{2}}, 1), \\ = 0 & \text{pro } x \in \{1, e^{-\sqrt[3]{2}}\}. \end{cases}$$

Podle věty o vztahu derivace a monotonie je tedy funkce f rostoucí na $[0, e^{-\sqrt[3]{2}}]$ a na $[1, \infty)$, klesající na $[e^{-\sqrt[3]{2}}, 1]$. V bodech 0 a 1 má tedy funkce f globální minimum o hodnotě 0, v bodě $e^{-\sqrt[3]{2}}$ má lokální maximum. Vzhledem k tomu, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, funkce f nemá globální maximum.

Z těchto úvah a Věty 4.3.6 plyne, že $\mathcal{H}(f) = [0, \infty)$.

(4) Pro $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ spočteme

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} (2 \log^{-3} x \cdot \frac{1}{x}) \cdot (1 + 2 \log^{-3} x) + e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \cdot (-6) \log^{-4} x \cdot \frac{1}{x} \\ &= e^{-\frac{1}{\log^2 x}} \cdot \frac{2}{x} \log^{-6} x \cdot (\log^3 x - 3 \log^2 x + 2). \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

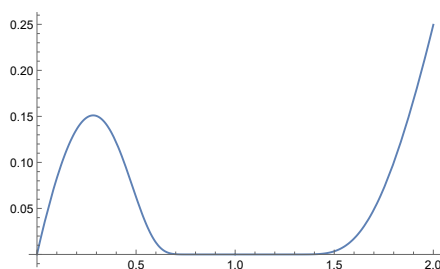
$$\begin{aligned} y^3 - 3y^2 + 2 &= (y - 1)(y^2 - 2y + 2) \\ &= (y - 1) \cdot (y - (1 + \sqrt{3})) \cdot (y - (1 - \sqrt{3})), \end{aligned}$$

máme

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{pro } x \in (0, e^{1-\sqrt{3}}) \cup (e, e^{1+\sqrt{3}}), \\ > 0 & \text{pro } x \in (e^{1-\sqrt{3}}, 1) \cup (1, e) \cup (e^{1+\sqrt{3}}, \infty), \\ = 0 & \text{pro } x \in \{e^{1-\sqrt{3}}, e, e^{1+\sqrt{3}}\}. \end{cases} \quad (5.68)$$

Podle věty o vztahu druhé derivace a konvexity je tedy funkce f ryze konkávní na $[0, e^{1-\sqrt{3}}]$ a na $[e, e^{1+\sqrt{3}}]$, ryze konvexní na $[1, e]$, na $[e^{1-\sqrt{3}}, 1]$ a na $[e^{1+\sqrt{3}}, \infty)$. Díky Příkladu 5.8.16 je funkce f ryze konvexní na $[e^{1-\sqrt{3}}, e]$. V bodě 1 tedy f nemá inflexní bod. Z Věty 5.6.18 plyne, že $e^{1-\sqrt{3}}, e, e^{1+\sqrt{3}}$ jsou inflexní body funkce f . Konečně můžeme z (5.68) usoudit, že jiné než výše uvedené inflexní body funkce f nemá.

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 23.

5.9.45. Příklad. Vyšetřete průběh funkce $f: x \mapsto y$ zadané parametricky rovnicemi

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Řešení. (1) Definičním oborem funkce f je množina těch $x \in \mathbb{R}$, pro které existuje právě jedno $t \in \mathbb{R}$ splňující $x = t - \sin t$. Hodnota $f(x)$ je pak rovna $1 - \cos t$. Položme

$$\varphi(t) = t - \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = -\infty.$$

Dále pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\varphi'(t) = 1 - \cos t.$$

Máme tedy $\varphi' > 0$ na intervalech $(2k\pi, 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, přičemž v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má derivaci rovnou 0. Funkce φ je proto rostoucí na $\mathbb{R}$ a díky Větě 4.3.6 je $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Máme tedy $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Dále máme zaručenu existenci inverzní funkce $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Při označení

$$\psi(t) = 1 - \cos t, \quad t \in \mathbb{R},$$

máme $f = \psi \circ \varphi^{-1}$.

Ukážeme, že f je 2π -periodická. Necht' $x \in \mathbb{R}$ je libovolné a $t \in \mathbb{R}$ splňuje $\varphi(t) = x$. Pak též

$$\varphi(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin(t + 2\pi) = (t + 2\pi) - \sin t = x + 2\pi.$$

Tedy

$$f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = \psi(t) = \psi(t + 2\pi) = \psi(\varphi^{-1}(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi).$$

Stačí tedy vyšetřit průběh funkce na intervalu $[0, 2\pi]$.

(2) Funkce φ^{-1} je spojitá díky Větě 4.3.15. Funkce f je složením spojitých funkcí, a proto je spojitá.

(3) Funkce φ je spojitá, rostoucí a splňuje $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi) = \pi$, $\varphi(2\pi) = 2\pi$. Odtud plyne

$$\varphi((0, \pi)) = (0, \pi), \quad \varphi((\pi, 2\pi)) = (\pi, 2\pi). \quad (5.69)$$

Podle Věty 5.1.27 spočteme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\psi(\varphi^{-1}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \\ &= \sin(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

Platí

$$\frac{\sin t}{1 - \cos t} \begin{cases} > 0 & \text{pro } t \in (0, \pi), \\ < 0 & \text{pro } t \in (\pi, 2\pi), \\ = 0 & \text{pro } t = \pi. \end{cases}$$

Odtud a z (5.69) plyne

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{pro } x \in (0, \pi), \\ < 0 & \text{pro } x \in (\pi, 2\pi), \\ = 0 & \text{pro } x = \pi. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá a díky Větě 4.2.26 platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(\varphi^{-1}(x))}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{1 - \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t^2}{1 - \cos t} \cdot \frac{1}{t} = 1 \cdot 2 \cdot \infty = \infty. \end{aligned}$$

Podle Věty 5.2.9 dostáváme $f'_+(0) = \infty$. Obdobně odvodíme $f'_-(2\pi) = -\infty$.

Funkce f je tedy rostoucí na intervalu $[0, \pi]$ a klesající na intervalu $[\pi, 2\pi]$. Dále má v bodě π globální maximum o hodnotě 2. Vzhledem k tomu, že f je kladná na intervalu $(0, 2\pi)$, má f v bodech 0 a 2π globální minima splňující $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Díky spojitosti f dostáváme z Věty 4.3.6, že platí $\mathcal{H}(f) = [0, 2]$.

(4) Položme

$$\omega(t) = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Pak platí

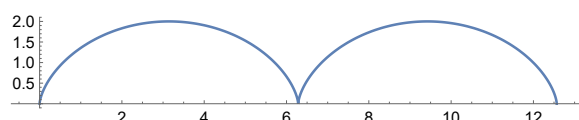
$$\omega'(t) = \frac{-1}{1 - \cos t}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

Díky Větě 5.1.27 obdržíme

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\sin(\varphi^{-1}(x))}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \right)' = (\omega(\varphi^{-1}(x)))' \\ &= \omega'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' = \frac{-1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \cdot \frac{1}{1 - \cos(\varphi^{-1}(x))} \\ &= \frac{-1}{(1 - \cos(\varphi^{-1}(x)))^2}, \quad x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

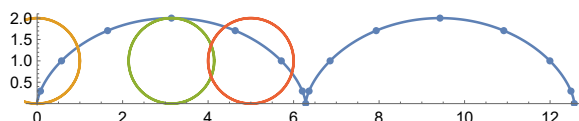
Tedy f'' je záporná na $(0, 2\pi)$, a proto je f ryze konkávní na $[0, 2\pi]$ (vizte Větu 5.6.11).

Zde je graf funkce f .



OBRÁZEK 24.

5.9.46. Poznámka. Graf funkce z předchozího příkladu se nazývá *cykloida*. Cykloida vzniká složením rotačního pohybu s translačním. V uvedeném případě je graf trajektorii bodu, který je na kružnici o poloměru 1 kutálející se po ose x , vizte obrázek.



OBRÁZEK 25.

5.9.5. Použití derivace při vyšetřování konvergence řad.

5.9.47. Příklad. Necht $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log^{\beta} n}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, označme

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha} \log^{\beta} n}.$$

Při vyšetřování konvergence rozlišíme případy podle znaménka parametru α .

Případ $\alpha < 0$. Podle Příkladu 5.9.17 a Věty 4.2.16 platí $\lim a_n = \infty$. Není tedy splněna nutná podmínka konvergence řady, a proto $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ diverguje.

Případ $\alpha = 0$. Uvažovaná řada má tedy tvar

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^{\beta} n}.$$

Pokud $\beta \leq 0$, pak je $\lim a_n$ rovna ∞ (pro $\beta < 0$) nebo 1 (pro $\beta = 0$), takže není splněna nutná podmínka konvergence a řada diverguje. Pokud $\beta > 0$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ klesající. Konvergence uvažované řady je pak podle kondenzačního kritéria (Věta 3.2.17) ekvivalentní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n^{\beta} \log^{\beta} 2}.$$

Posledně uvedená řada opět nesplňuje nutnou podmínku konvergence, takže naše řada opět diverguje.

Případ $\alpha > 0$. Položíme

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha} \log^{\beta} x}, \quad x \in (1, \infty).$$

Pro každé $x \in (1, \infty)$ platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^{2\alpha} \log^{2\beta} x} \cdot (-\alpha x^{\alpha-1} \log^{\beta} x - \beta x^{\alpha} (\log^{\beta-1} x) x^{-1}) \\ &= \frac{x^{\alpha-1} \log^{\beta} x}{x^{2\alpha} \log^{2\beta} x} \cdot (-\alpha - \beta (\log x)^{-1}). \end{aligned}$$

Jelikož

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-\alpha - \beta (\log x)^{-1}) = -\alpha < 0,$$

je funkce f na jistém okolí ∞ klesající. K vyšetření konvergence dané řady lze tedy použít kondenzační kritérium (Věta 3.2.17). Máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n n^{\beta} \log^{\beta} 2}.$$

Je-li $\alpha > 1$, platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} a_{2^{n+1}}}{2^n a_{2^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^{\alpha-1})^n n^{\beta} (\log 2)^{\beta}}{(2^{\alpha-1})^{n+1} (n+1)^{\beta} (\log 2)^{\beta}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\beta} 2^{1-\alpha} = 2^{1-\alpha} < 1, \end{aligned}$$

a tedy řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje podle d'Alembertova kritéria (Věta 3.2.11). Je-li $\alpha = 1$, řada $\sum 2^n a_{2^n}$ konverguje právě tehdy, když $\beta > 1$ (vizte Větu 3.2.18). Je-li

$\alpha \in (0, 1)$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_{2^n} = \infty$ díky Příkladu 5.9.17 a Větě 4.2.16, a proto řada $\sum 2^n a_{2^n}$ diverguje. Diverguje tedy i řada $\sum a_n$.

Žávěr. Z výše uvedených úvah tedy vyplývá, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ a $\beta \in \mathbb{R}$, nebo $\alpha = 1$ a $\beta > 1$. ♣

5.9.48. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}.$$

Podle l'Hospitalova pravidla (Věta 5.4.1(a)) platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{1+4x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{1+4x^2} = \frac{1}{2}.$$

Z Heineovy věty (Věta 4.2.16) tedy dostáváme rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Dále platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+4}} = 1.$$

Odtud a z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.1) plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}}{\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Zadaná řada má zřejmě všechny členy kladné a platí $\frac{1}{2} \in (0, \infty)$. Z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5) tedy vyplývá, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Tato řada ale konverguje podle Věty 3.2.18, neboť $\frac{4}{3} > 1$. Tedy zadaná řada také konverguje. ♣

5.9.49. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right).$$

Řešení. Pro $n \geq 2$ označme

$$a_n = \log\left(\frac{n^2 + 4}{n(n-1)}\right).$$

Podle věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.22(P)) máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{x^2+4}{x(x-1)}\right)}{\frac{x+4}{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{x+4}{x^2-x}\right)}{\frac{x+4}{x^2-x}} = 1.$$

Podle Heineovy věty (Věta 4.2.16) tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{n+4}{n^2-n}} = 1.$$

Pro každé $n \geq 2$ platí $a_n > 0$. Můžeme tedy použít limitní srovnávací kritérium (Věta 3.2.5(a)), podle kterého řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-n}. \quad (5.70)$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+4}{n^2-n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+4n}{n^2-n} = 1$$

a řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje podle Příkladu 3.1.15, diverguje podle limitního srovnávacího kritéria řada (5.70). Tedy i zadaná řada je divergentní. ♣

5.9.50. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \cdot \arccos\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Zadanou řadu tedy můžeme přepsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arccos\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e - \frac{1}{x}\right) = e$, přičemž pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $e - \frac{1}{x} \neq e$. Z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.22(P)) tedy dostáváme, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(e - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Podle (AC2) a (AC3) platí $\lim_{y \rightarrow 1^-} \arccos(y) = 0$ a navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\log\left(e - \frac{1}{n}\right) \neq 1$. Z Věty 4.2.18 tedy vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arccos\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right) = 0.$$

Posloupnost $\{e - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je zřejmě rostoucí. Funkce $\log$ je na $(0, \infty)$ rostoucí podle (L3) a funkce $\arccos$ je na $[-1, 1]$ klesající podle (AC2). Posloupnost

$$\left\{\arccos\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

je tudíž klesající. Zadaná řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). ♣

5.9.51. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccotg}(n) \cdot \left(-1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení. Řadu přepíšeme ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \operatorname{arccotg}(n) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Posloupnost $\{\operatorname{arccotg}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg}(n) = 0$. Z Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1) tedy plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arccotg}(n)$$

konverguje. Podle Příkladu 2.4.5 je posloupnost $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená a rostoucí. Z Abelova kritéria (Věta 3.3.5(A)) plyne, že i zadaná řada konverguje. ♣

5.9.52. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cos(5n) \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{n+3}.$$

Řešení. Podle Příkladu 3.3.8(b) má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n)$ omezené částečné součty. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}, \quad b_n = \operatorname{tg}(a_n) \quad \text{a} \quad c_n = \frac{n}{n+3}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

Odtud plyne, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost kladných reálných čísel splňující $\lim a_n = 0$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < a_n \leq a_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} < 1 < \frac{\pi}{2},$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$. Protože funkce tangens je rostoucí na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ (vizte (G20)), je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající. Podle (G16) je

funkce tangens spojitá v bodě 0, takže podle Heineovy věty (Věta 4.2.19) platí $\lim b_n = \lim \operatorname{tg}(a_n) = 0$. Dle Dirichletova kritéria (Věta 3.3.5(D)) je tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(5n) \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

konvergentní. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n = 1 - \frac{3}{n+3}$, takže je posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a omezená. Podle Abelova kritéria (Věta 3.3.5(A)) je tedy zadaná řada konvergentní. ♣

5.9.53. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2+1} \log(n)}{\sqrt[4]{n^3+n} + \sqrt{n}}.$$

Řešení. Pro $x \in (0, \infty)$ položme

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \log(x), \quad h(x) = \sqrt[4]{x^3+x} + \sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Dále označme $a_n = f(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že existuje $x_0 > 0$ takové, že funkce f je klesající na intervalu (x_0, ∞) . Podle věty o derivaci podílu je znaménko derivace funkce f v bodě $x \in (0, \infty)$ stejné jako znaménko výrazu $g'(x)h(x) - g(x)h'(x)$. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí

$$g'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \cdot \log(x) + \sqrt[3]{x^2+1} \cdot \frac{1}{x},$$

$$h'(x) = \frac{3x^2+1}{4\sqrt[4]{(x^3+x)^3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pro funkce g a h platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\sqrt[3]{x^2} \log(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{\sqrt[4]{x^3}} = 1.$$

Podobně jako pro g a h odhadneme asymptotické chování g' a h' :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \log(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h'(x)}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} = 1.$$

Odtud dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)h(x)}{\sqrt[12]{x^5} \log(x)} = \frac{2}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)h'(x)}{\sqrt[12]{x^5} \log(x)} = \frac{3}{4}.$$

Platí tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{\sqrt[12]{x^5} \log(x)} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{12} < 0.$$

Existuje tedy $x_0 > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0, \infty)$ platí $f'(x) < 0$. Funkce f je tedy klesající na intervalu (x_0, ∞) . Dále máme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\sqrt[3]{x^2} \log(x)} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}}{h(x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} \log(x)}{\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}} = 1 \cdot 1 \cdot 0,\end{aligned}$$

přičemž jsme použili Příklad 5.4.4.

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > x_0$. Pak posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^\infty$ konverguje k 0 a je klesající. Dle Věty 3.3.1 tedy zadaná řada konverguje. ♣

5.9.54. Příklad (Gauss⁷). Necht $\sum a_n$ je řada s kladnými členy, $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$, $\{b_n\}$ je omezená posloupnost a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Dokažte, že $\sum a_n$ konverguje, právě když $a > 1$.

Řešení. Rozlišíme dva případy podle hodnoty a .

Případ $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Použijeme Příklad 3.8.1. Díky předpokladu máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{b_n}{n^\varepsilon} \right) = a,$$

a tedy řada $\sum a_n$ konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a < 1$.

Případ $a = 1$. Podle Příkladu 5.9.17 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n \log n}{n^\varepsilon} = 0.$$

Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \leq 1.$$

Z Příkladu 5.9.55 nyní plyne divergence dané řady. ♣

5.9.55. Příklad (de Morgan–Bertrand⁸). Necht $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

(a) Necht $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (1, \infty)$ splňují

$$\forall n \geq n_0 : n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \geq q.$$

Dokažte, že $\sum a_n$ konverguje.

⁷Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

⁸Joseph Louis François Bertrand (1822–1900)

(b) Necht' $n_0 \in \mathbb{N}$ splňuje

$$\forall n \geq n_0: n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \leq 1.$$

Dokažte, že $\sum a_n$ diverguje.

Řešení. (a) Zvolme $p \in (1, q)$ a pro $n > 1$ položme $b_n = \frac{1}{n(\log n)^p}$. Pak pro každé $n > 1$ platí

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(n+1) \log^p(n+1)}{n \log^p n} \\ &= 1 + \frac{(n+1) \log^p(n+1) - n \log^p n}{n \log^p n}. \end{aligned}$$

Pro každé $n > 1$ použijeme Větu 6.1.15 pro funkci $f(x) = x \log^p x$, $x \in (0, \infty)$, a interval $[n, n+1]$ a nalezneme bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{1}{2} f''(c_n).$$

Obdržíme tedy

$$\begin{aligned} (n+1) \log^p(n+1) - n \log^p n \\ = \log^p n + p \log^{p-1} n + \frac{p \log^{p-1} c_n + p(p-1) \log^{p-2} c_n}{2c_n}. \end{aligned}$$

Pro $n > 1$ označme

$$\beta_n = \frac{p \log^{p-1} c_n + p(p-1) \log^{p-2} c_n}{2c_n}.$$

Podle Příkladu 5.9.17 a Věty 4.2.16 pak platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. Existuje tedy $n_1 > 1$ takové, že

$$\forall n \geq n_1: \beta_n < (q-p) \log^{p-1} n.$$

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Pak pro každé $n \geq n_2$ platí

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= 1 + \frac{\log^p n + p \log^{p-1} n + \beta_n}{n \log^p n} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{q \log^{p-1} n}{n \log^p n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{q}{n \log n}. \end{aligned}$$

Pro $n \geq n_2$ pak dostáváme

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{1}{n} + \frac{q}{n \log n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Díky Příkladu 3.8.2 dostáváme konvergenci řady $\sum a_n$, neboť řada $\sum b_n$ konverguje podle Příkladu 5.9.47.

(b) Pro $n > 1$ položíme $b_n = \frac{1}{n \log n}$. Podobně jako výše nalezneme pro každé $n > 1$ bod $c_n \in (n, n+1)$ splňující

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{(n+1) \log(n+1) - n \log n}{n \log n} = 1 + \frac{1}{n \log n} \left(1 + \log n + \frac{1}{2c_n} \right).$$

Dostaneme tedy pro $n > n_0$, odhad

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \log n} + \frac{1}{2c_n n \log n} > \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Pro každé $n > n_0$ pak platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Vzhledem k tomu, že řada $\sum \frac{1}{n \log n}$ diverguje (vizte Příklad 5.9.47), dostáváme díky Příkladu 3.8.2 divergenci řady $\sum a_n$. ♣

Taylorův polynom

V této kapitole budeme studovat otázku aproximace obecné funkce polynomm. K dané funkci f a danému bodu $a \in \mathbb{R}$ budeme hledat vhodný polynom, jehož hodnoty v blízkosti a v jistém dobře definovaném smyslu aproximují hodnoty funkce f . Budeme se přitom snažit, aby odchylka funkce od polynomu byla dostatečně malá. Ukážeme si také několik způsobů jak odchylku shora odhadnout.

6.1. Základní vlastnosti

6.1.1. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a $f'(a)$ existuje vlastní. Potom existuje tečna ke grafu funkce f v bodě a ve smyslu Definice 5.1.5. Označme funkci, která definuje tuto tečnu, symbolem t , tedy položíme

$$t(x) = f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \in \mathbb{R}.$$

O této funkci můžeme říci, že v jistém smyslu *aproximuje* chování f v blízkosti bodu a , neboť platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - t(x)|}{|x - a|} = 0. \quad (6.1)$$

To plyne z výpočtu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0 \end{aligned}$$

a z Věty 4.1.19. Neformálně řečeno, pro hodnoty x dostatečně blízké k bodu a je výraz $|f(x) - t(x)|$ podstatně menší než $|x - a|$.

Pokud místo afinní funkce, což je polynom stupně nejvýše 1, použijeme vhodný polynom P obecně vyššího stupně, můžeme doufat v lepší aproximaci, např.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - P(x)|}{|x - a|^n} = 0 \quad (6.2)$$

pro jisté $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Takový polynom P by skutečně aproximoval f s větší přesností, neboť výraz $|x - a|^n$ je pro x dostatečně blízké bodu a podstatně menší

než $|x - a|$, přesněji řečeno, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x - a|^n}{|x - a|} = 0.$$

Při hledání vhodného polynomu bude užitečné si povšimnout, že funkce t splňuje $f(a) = t(a)$ a $f'(a) = t'(a)$. Budeme hledat polynom P tak, aby pro každé $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ platilo $f^{(j)}(a) = P^{(j)}(a)$. Ukážeme, že polynom, který je zaveden následující definicí, splňuje tento požadavek i (6.2).

6.1.2. Definice. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom $T_n^{f,a}$, definovaný pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x - a)^n,$$

nazýváme **Taylorovým¹ polynomem funkce f v bodě a řádu n** .

6.1.3. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom pro každé $j \in \{0, \dots, n-1\}$ existuje vlastní $f^{(j)}(x)$ na nějakém okolí bodu a . Speciálně odtud vyplývá, že Taylorův polynom $T_n^{f,a}$ je dobře definován.

6.1.4. Úmluva. V dalším textu budeme symbol tvaru $(x - a)^0$ chápat jako 1, a to i tehdy, jestliže $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ (tedy „nultou derivací“ funkce f) budeme rozumět samotnou funkci f .

6.1.5. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Z definice Taylorova polynomu je zřejmé, že platí $\text{st}(T_n^{f,a}) \leq n$. Tato nerovnost ovšem může být ostrá. To nastává právě tehdy, když platí $f^{(n)}(a) = 0$. Položíme-li například $f = \sin$, $a = 0$ a $n = 2$, dostaneme

$$T_2^{\sin,0}(x) = \sin(0) + \sin'(0) \cdot x + \frac{1}{2} \sin''(0) \cdot x^2 = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

takže $\text{st}(T_2^{\sin,0}) = 1$.

6.1.6. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Označme $T = T_n^{f,a}$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} T'(x) &= f'(a) + f''(a)(x - a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x - a)^{n-1}, \\ T''(x) &= f''(a) + f'''(a)(x - a) + \dots + \frac{1}{(n-2)!} f^{(n)}(a)(x - a)^{n-2}, \\ &\vdots \\ T^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x - a), \\ T^{(n)}(x) &= f^{(n)}(a). \end{aligned}$$

¹Brook Taylor (1685–1731)

Dosadíme-li $x = a$, dostaneme vztahy

$$T(a) = f(a), \quad T'(a) = f'(a), \quad T''(a) = f''(a), \quad \dots, \quad T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Pokud tedy $n \geq 2$, potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $(T_n^{f,a})'(x) = T_{n-1}^{f',a}(x)$.

6.1.7. Příklad. Spočítejte Taylorův polynom třetího řádu v bodě 0 pro funkce sinus a kosinus.

Řešení. Protože platí $\sin(0) = 0$, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, $\sin''(0) = -\sin(0) = 0$, $\sin'''(0) = -\cos(0) = -1$, dostáváme

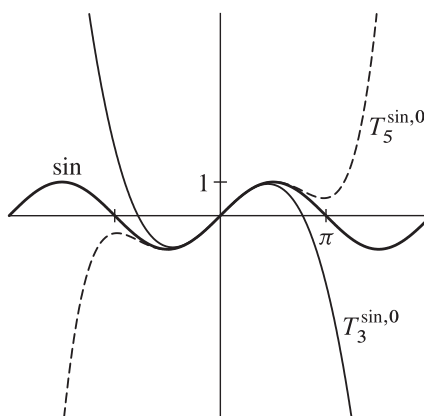
$$T_3^{\sin,0}(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Podobně lze odvodit vztah

$$T_3^{\cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

♣

6.1.8. Na následujícím obrázku jsou zachyceny grafy funkce sinus a Taylorových polynomů $T_3^{\sin,0}$ a $T_5^{\sin,0}$.



OBRÁZEK 1. Taylorovy polynomy funkce sinus

Nyní nás bude zajímat nakolik se liší Taylorův polynom od aproximované funkce, neboli jak velký je rozdíl $f(x) - T_n^{f,a}(x)$, který budeme nazývat *zbytkem*. Zde je první výsledek tohoto typu.

6.1.9. Věta (Peanův tvar zbytku). Necht' f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle n .

Případ $n = 1$. Tvrzení platí podle 6.1.1.

Indukční krok. Necht $n > 1$. Předpokládáme, že pro každou funkci g takovou, že existuje vlastní $g^{(n-1)}(a)$, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Mějme funkci f , která má vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak má funkce f' v bodě a vlastní $(n-1)$ -ní derivaci, neboť $(f')^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Podle indukčního předpokladu tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \quad (6.3)$$

Funkce f je spojitá v bodě a , neboť existuje vlastní $f'(a)$. Funkce $T_n^{f,a}$ je polynom, a tedy je také spojitá v bodě a . Z toho plyne, že můžeme využít L'Hospitalova pravidla (vizte Větu 5.4.1(a)). Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - T_n^{f,a}(x))'}{((x-a)^n)'}$$

Podle 6.1.6 platí $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$. Tudíž z (6.3) vyplývá, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ■

6.1.10. Lemma. Necht $n \in \mathbb{N}$, Q je polynom, st $Q \leq n$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Polynom Q má zřejmě v bodě a kořen. Pak podle 1.7.9 existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R takový, že $Q(x) = (x-a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Potom platí

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n-k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n-k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$). Ve všech těchto případech dostáváme spor. Tím je tvrzení lemmatu dokázáno. ■

6.1.11. Věta. Necht $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, f je funkce mající vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom stupně nejvýše n splňující

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 6.1.9 víme, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit (Věta 4.2.1) tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0.$$

Dále platí $\text{st}(T_n^{f,a} - P) \leq n$, a tedy podle Lemmatu 6.1.10 je $T_n^{f,a} - P$ nulový polynom. To znamená, že $P = T_n^{f,a}$. ■

Věta 6.1.9 popisuje asymptotické chování zbytku Taylorova polynomu. V následující větě pro něj odvodíme přesnější formuli, ovšem za silnějších předpokladů na funkci f .

6.1.12. Věta (obecný tvar zbytku). Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Nechť φ je spojitá funkce na $[a, x]$ mající v každém bodě intervalu (a, x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Důkaz. Definujme funkci $F: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) = f(x) - (f(t) + f'(t)(x-t) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n).$$

Funkce F je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, x) , neboť všechny funkce vystupující v definici F mají vlastní derivaci v každém bodě intervalu $[a, x]$. Podle Cauchyovy věty (Věta 5.2.11) tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad (6.4)$$

Nechť $t \in (a, x)$. Potom

$$\begin{aligned} F'(t) &= -(f'(t) + f'(t) \cdot (-1) + f''(t)(x-t) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n) \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n. \end{aligned}$$

Pro $t = \xi$ dostaneme

$$F'(\xi) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Zřejmě platí $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$. Odtud a z (6.4) dostáváme

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Tvrzení je tak dokázáno. ■

6.1.13. Věta 6.1.12 platí i v případě $x < a$. Důkaz je stejný.

6.1.14. Předpoklady Věty 6.1.12 lze mírně zeslabit. Stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a, x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a, x) . I za tohoto předpokladu lze použít postup z uvedeného důkazu.

Větu 6.1.12 nyní využijeme k odvození dvou konkrétních tvarů zbytku Taylova polynomu. Dosáhneme toho v obou případech vhodnou volbou funkce φ .

6.1.15. Věta (Lagrangeův tvar zbytku). Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \quad (6.5)$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 6.1.12 tedy existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\begin{aligned} f(x) - T_n^{f,a}(x) &= \frac{1}{n!} \frac{0 - (x-a)^{n+1}}{(-n+1)(x-\xi)^n} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

■

6.1.16. Věta. Nechť f je funkce, I je interval, $n \in \mathbb{N}$ a f má v každém bodě intervalu I vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Nechť $M \in \mathbb{R}$ a pro každé $x \in I$ platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Potom pro každé $x \in I$ platí

$$|f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}.$$

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z Věty 6.1.15. ■

6.1.17. Věta (Cauchyův tvar zbytku). Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a). \quad (6.6)$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = t$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 6.1.12 existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{x-a}{1} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

■

6.2. Symbol malé o

6.2.1. Z Věty 6.1.9 vyplývá, že za uvedených předpokladů můžeme funkci f na jistém okolí bodu a zapsat ve tvaru $f = T_n^{f,a} + \omega$, kde *chybová funkce* ω splňuje

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\omega(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

6.2.2. Taylorovy polynomy lze mimo jiné použít k počítání limit funkcí a posloupností a k vyšetřování konvergence číselných řad s nezápornými členy. Ve všech těchto případech většinou počítáme limitu nějaké komplikované funkce. Pro výpočet limity posloupnosti pak obvykle využijeme Heineovu větu a pro vyšetření konvergence řady srovnávací kritérium.

Základní myšlenka výpočtu limity funkce je následující. Funkce, které se objevují ve výrazu, jehož limitu počítáme, vyjádříme jako součet polynomu a chybové funkce. Pak mohou být další výpočty velmi jednoduché, protože při počítání s chybovými funkcemi nemusíme brát v úvahu jejich přesný tvar, ale pouze odhady velikosti chyby. Hlavní problém výpočtu pak spočívá v tom jak nalézt k daným funkcím odpovídající polynomy vhodného stupně a chybové funkce. Takové postupy ukážeme v následujícím výkladu.

6.2.3. Definice. Necht f a g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a **malé o od funkce g** (píšeme $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$), jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

6.2.4. Výraz „ $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ “ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi a nelze s ním pracovat samostatně.

6.2.5. (a) Tvrzení Věty 6.1.9 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n), x \rightarrow a,$$

proto bude v roli funkce g často vystupovat funkce $x \mapsto (x-a)^n$, nebo jen $x \mapsto x^n$ v případě $a = 0$.

(b) Symbol $f(x) = o(1), x \rightarrow a$ podle definice znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

(c) Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme symbol $x \rightarrow a$ vynechávat.

6.2.6. Věta (aritmetika malého o). Necht $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže $f_1(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$, potom

$$f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)), x \rightarrow a.$$

(b) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x)), x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g_2(x)), x \rightarrow a$, potom

$$f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)), x \rightarrow a.$$

- (c) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a , potom

$$f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)f_2(x)), \quad x \rightarrow a.$$

- (d) Jestliže $f(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom

$$f(x) = o(g_2(x)), \quad x \rightarrow a.$$

- (e) Jestliže $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a , potom

$$h(x)f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow a.$$

- (f) Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$, potom

$$f(x) = o((x-a)^m), \quad x \rightarrow a.$$

Důkaz. Všechna tvrzení bezprostředně plynou z věty o aritmetice limit (Věta 4.2.1) a Věty 4.2.15. ■

6.2.7. Věta. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, f, g, φ jsou funkce splňující $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow b$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ a existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ platí $\varphi(x) \neq b$. Potom

$$f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))), \quad x \rightarrow a.$$

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z věty o limitě složené funkce (Věta 4.2.22(P)). ■

6.2.8. Příklad. Určete Taylorův polynom řádu 3 funkce tangens v bodě 0.

Řešení. Mohli bychom spočítat derivace funkce tangens až do třetího řádu v bodě 0 a pak sestavit příslušný Taylorův polynom podle definice, jako jsme to učinili v Příkladu 6.1.7. Ukážeme však ještě jiný postup.

Protože má funkce tangens na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ derivace všech řádů, stačí nalézt polynom P takový, že $\text{st}(P) \leq 3$ a $\text{tg } x - P(x) = o(x^3)$, $x \rightarrow 0$. Pak totiž podle Věty 6.1.11 již musí platit $P = T_3^{\text{tg}, 0}$. Označme $P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$. Potom

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) = o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

neboli

$$\frac{\sin x}{\cos x} - (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) = \omega(x),$$

kde funkce ω je definována na prstencovém okolí bodu 0 a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\omega(x)}{x^3} = 0.$$

Potom pro každé x z tohoto prstencového okolí platí

$$\sin x = (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x)) \cos x. \quad (6.7)$$

Funkce sinus a kosinus můžeme vyjádřit podle Příkladu 6.1.7 ve formě

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x),\end{aligned}$$

kde funkce η a ζ splňují

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\zeta(x)}{x^3} = 0.$$

Uvedená vyjádření funkcí sinus a kosinus nyní dosadíme do (6.7), pravou stranu roznásobíme a po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{6}x^3 + \eta(x) &= (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x)) \cdot (1 - \frac{1}{2}x^2 + \zeta(x)) \\ &= A_0 + A_1x + (A_2 - \frac{1}{2}A_0)x^2 + (A_3 - \frac{1}{2}A_1)x^3 + \tau(x),\end{aligned}\tag{6.8}$$

přičemž

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \omega(x) - \frac{1}{2}A_2x^4 - \frac{1}{2}A_3x^5 - \frac{1}{2}\omega(x)x^2 \\ &\quad + (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \omega(x))\zeta(x).\end{aligned}$$

Z tvaru funkce τ snadno odvodíme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tau(x)}{x^3} = 0.$$

Úpravou (6.8) obdržíme

$$A_0 + (A_1 - 1)x + (A_2 - \frac{1}{2}A_0)x^2 + (A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6})x^3 = \eta(x) - \tau(x).$$

Označme symbolem Q polynom na levé straně předchozího vztahu. Potom st $Q \leq 3$ a z tvaru pravé strany plyne, že $Q(x) = o(x^3)$, $x \rightarrow 0$. Podle Lemmatu 6.1.10 musí být polynom Q nulový, a tedy musí mít nulové koeficienty, tj.

$$A_0 = 0, \quad A_1 - 1 = 0, \quad A_2 - \frac{1}{2}A_0 = 0, \quad A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6} = 0.$$

Odtud dostaneme $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{1}{3}$, neboli

$$T_3^{\text{tg},0}(x) = x + \frac{1}{3}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

6.2.9. Při počítání úloh podobného typu, jaký jsme viděli v Příkladu 6.2.8, se často užívá následující konvence. Místo abychom pracovali s jednotlivými chybovými funkcemi - v našem příkladu to byly funkce ω , η , ζ , τ - budeme je značit vždy stejným symbolem, který bude obsahovat pouze informaci o přesnosti našeho odhadu. Místo abychom psali například $f(x) = g(x) + \omega(x)$, kde $\omega(x) = o(x^3)$, $x \rightarrow 0$, budeme psát rovnou $f(x) = g(x) + o(x^3)$, $x \rightarrow 0$. Tento způsob zápisu činí výpočet přehlednější, nicméně je třeba dát pozor na jistá jeho úskalí. Nebudeme se zde snažit dát tomuto zápisu přesný matematický význam. Budeme jej chápat pouze jako zkrácenou verzi zápisu s chybovými funkcemi, který již přesný matematický význam má. Korektnost našeho výpočtu bude dána tím, že jej můžeme zapsat vždy

naprosto přesně s použitím chybových funkcí. Výpočet z Příkladu 6.2.8 pak lze zapsat následovně:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) &= (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)) \cdot (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) \\ &= A_0 + A_1x + (A_2 - \frac{1}{2}A_0)x^2 + (A_3 - \frac{1}{2}A_1)x^3 \\ &\quad + o(x^3) - \frac{1}{2}A_2x^4 - \frac{1}{2}A_3x^5 - \frac{1}{2}x^2o(x^3) \\ &\quad + (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)) \cdot o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}A_2x^4 &= o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{z definice}), \\ -\frac{1}{2}A_3x^5 &= o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{z definice}), \\ -\frac{1}{2}x^2o(x^3) &= o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{Věta 6.2.6(e)}), \\ (A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + o(x^3)) \cdot o(x^3) &= o(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{Věta 6.2.6(e)}). \end{aligned}$$

Odtud plyne podle Věty 6.2.6(a)

$$A_0 + (A_1 - 1)x + (A_2 - \frac{1}{2}A_0)x^2 + (A_3 - \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{6})x^3 = o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Závěr výpočtu již nyní proběhne stejně jako v předchozí variantě.

Při zvládnutí této metody lze k výsledku často dospět rychleji než postupným derivováním dané funkce, neboť s odhady chyb lze pracovat velmi efektivně.

6.3. Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí

Ve Větě 6.1.9 jsme viděli, že s rostoucím řádem Taylorova polynomu dostáváme přesnější aproximaci dané funkce f . Bylo by tedy možné očekávat, že bychom danou funkci mohli jistým způsobem vyjádřit pomocí limity Taylorových polynomů, tedy ve tvaru nekonečné řady. Tato úvaha motivuje následující definici.

6.3.1. Definice. Necht f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a** . Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**².

6.3.2. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad (6.9)$$

²Colin Maclaurin (1698–1746)

pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (6.9) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0 (vizte Příklad 5.8.15), takže součet její Taylorovy řady je nulová funkce, ačkoliv pro každé $x \neq 0$ platí $f(x) \neq 0$.

V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

6.3.3. Nyní postupně spočteme Taylorovy polynomy a řady některých elementárních funkcí. Budeme se zároveň zabývat otázkou, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou tyto řady konvergentní a zda je jejich součtem původně zadaná funkce. Místo symbolu $T_k^{f,a}$ budeme psát pro přehlednost pouze T_k , neboť z kontextu bude vždy zřejmé, s jakou funkcí f pracujeme. Bod a bude roven vždy 0. Dále budeme značit $R_k = f - T_k$. Platnost rovnosti (6.9) v daném bodě $x \in \mathbb{R}$ je pak ekvivalentní výroku $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(x) = 0$. Připomínáme, že i zde budeme využívat úmluvu $f^{(0)} = f$.

6.3.4 (exponenciála). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $l \geq 0$ platí $\exp^{(l)}(x) = \exp(x)$. Je tedy $\exp^{(l)}(0) = 1$ pro každé $l \geq 0$. Taylorův polynom T_k má pak tvar

$$T_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k.$$

Taylorova řada se středem v bodě 0 má potom tvar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

podle definice exponenciální funkce (5.14).

6.3.5 (sinus). Pro derivace funkce sinus platí podle Příkladu 5.1.35

$$\sin' x = \cos x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \sin^{(3)} x = -\cos x, \quad \sin^{(4)} x = \sin x$$

a dále se funkce periodicky opakují, tj. $\sin^{(k+4)} x = \sin^{(k)} x$. Tedy

$$\sin 0 = 0, \quad \sin' 0 = 1, \quad \sin'' 0 = 0, \quad \sin^{(3)} 0 = -1, \quad \sin^{(4)} 0 = 0, \dots$$

Taylorovy polynomy v bodě 0 mají tudíž tvar $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = T_2(x) = x$, $T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{1}{3!}x^3$. Obecně pak máme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k-1}(x) = T_{2k}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}.$$

Pro funkci sinus je Taylorův polynom řádu $2k$ v bodě 0 polynomem stupně $2k - 1$. Podle (5.17) pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

6.3.6 (kosinus). Podobně jako v předchozím případě dostaneme pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$T_{2k}(x) = T_{2k+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}.$$

Z (5.18) pak plyne pro každé $x \in \mathbb{R}$ vztah

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

6.3.7 ($x \mapsto \log(1+x)$). Funkce $f(x) = \log(1+x)$ má na svém definičním oboru $(-1, \infty)$ derivace všech řádů. Snadno lze matematickou indukci dokázat, že pro každé $l \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$f^{(l)}(x) = (-1)^{l-1} \frac{(l-1)!}{(1+x)^l}.$$

Odtud dostáváme

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0!, \quad f''(0) = -1!, \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!,$$

a tudíž pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j.$$

Zvolme $x \in (0, 1]$. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku (Věta 6.1.15). Podle této věty pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje číslo $\xi_n \in (0, x)$ takové, že

$$\log(1+x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Odhadneme

$$|\log(1+x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi_n} \right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Odtud plyne

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \quad (6.10)$$

Uvažujme nyní $x \in (-1, 0)$. Pro tyto hodnoty proměnné x využijeme Cauchyův tvar zbytku (Věta 6.1.17). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme podle této věty číslo

$\xi_n \in (x, 0)$ takové, že

$$\begin{aligned}\log(1+x) - T_k(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n) x(x - \xi_n)^n \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{n!}{(1 + \xi_n)^{n+1}} \cdot x \cdot (x - \xi_n)^n.\end{aligned}$$

Zřejmě platí nerovnosti

$$0 < 1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \leq -x,$$

a tedy můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}|\log(1+x) - T_k(x)| &\leq \frac{(\xi_n - x)^n}{(1 + \xi_n)^{n+1}} |x| = \left(\frac{\xi_n - x}{1 + \xi_n}\right)^n \frac{|x|}{1 + \xi_n} \\ &= \left(1 - \frac{1+x}{1 + \xi_n}\right)^n \frac{|x|}{1 + \xi_n} \leq (-x)^n \frac{|x|}{1 + x} \\ &= \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|}.\end{aligned}$$

Protože dále platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|} = 0$, dostáváme

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Pro každé $x \in (-1, 1]$ tedy platí

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \quad (6.11)$$

6.3.8. Ze vztahu (6.11) dostaneme dosazením $x = 1$ zajímavou rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$ řada v (6.11) diverguje, a pro takové x vztah (6.11) neplatí.

6.3.9. Příklad. Napište Maclaurinovu řadu pro funkci $x \mapsto \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení. Z 6.3.7 plyne, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2}(\log(1+x) - \log(1-x)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}.\end{aligned}$$



6.3.10 ($x \mapsto (1+x)^\alpha$). Poslední funkcí, pro kterou Taylorův polynom v bodě 0 odvodíme z definice, bude funkce $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1, \infty)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Na svém definičním oboru má funkce f derivace všech řádů. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in (-1, \infty)$ platí

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

a tedy

$$f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1).$$

Taylorův polynom k -tého řádu pro funkci f v bodě 0 má proto tvar

$$T_k(x) = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definujme pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ **zobecněné kombinační číslo** $\binom{\alpha}{j}$ předpisem

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-j+1)}{j!}.$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $j \leq \alpha$ tento předpis dává obvyklé kombinační číslo. Nyní můžeme $T_k(x)$ přepsat ve tvaru

$$T_k(x) = \sum_{n=1}^k \binom{\alpha}{n} x^n. \quad (6.12)$$

Ukážeme, že pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n. \quad (6.13)$$

Pro $x = 0$ je tvrzení zřejmé. Zvolme tedy $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$, pevně. Podle Cauchyova tvaru zbytku (Věta 6.1.17) nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ číslo ξ_n ležící mezi 0 a x takové, že

$$(1+x)^\alpha - T_k(x) = \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)(1+\xi_n)^{\alpha-n-1} (x-\xi_n)^n x.$$

Funkce $z \mapsto z^{\alpha-1}$ je na intervalu $(0, \infty)$ monotónní, a tedy

$$(1+\xi_n)^{\alpha-1} \leq \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}.$$

Můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} & |(1+x)^\alpha - T_k(x)| \\ & \leq \frac{1}{n!} |\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)| \cdot \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\} \cdot \left| \frac{x-\xi_n}{1+\xi_n} \right|^n \cdot |x|, \end{aligned} \quad (6.14)$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\left| \frac{x - \xi_n}{1 + \xi_n} \right| \leq |x|,$$

můžeme dále odhadnout

$$|(1+x)^\alpha - T_k(x)| \leq \frac{1}{n!} |\alpha \cdots (\alpha - n)| C \cdot |x|^{n+1}, \quad (6.15)$$

kde $C = \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}$. Označme $a_n = \frac{1}{n!} |\alpha \cdots (\alpha - n)| C \cdot |x|^{n+1}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n - 1}{n + 1} \right| \cdot |x| = |x| < 1.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy konvergentní podle d'Alembertova kritéria (Věta 3.2.11), a proto podle Věty 3.1.11 nutně platí $\lim a_n = 0$. Odtud a z (6.15) vyplývá platnost (6.13).

Nyní uvedeme několik příkladů na výpočet a použití Taylorova polynomu. Na následujícím příkladu ilustrujeme způsob, jak vypočítat Taylorův polynom bez derivování.

6.3.11. Příklad. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x}$ nalezněte Taylorovy polynomy všech řádů v bodě 0.

Řešení. Podle Příkladu 3.1.7 pro každé $x \in (-1, 1)$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^k (-1)^n x^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^k (-1)^n x^n + (-1)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{1+x}. \end{aligned}$$

Dále

$$(-1)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{1+x} = o(x^k), \quad x \rightarrow 0,$$

a tedy $T_k^{f,0}(x) = \sum_{n=0}^k (-1)^n x^n$ podle Věty 6.1.11. Tento výsledek, který jsme odvodili bez počítání derivací, je ve shodě se vztahem (6.12) pro případ $\alpha = -1$. ♣

6.3.12. Příklad. Necht $f(x) = \sin(\sin x)$. Spočtěte $T_5^{f,0}$.

Řešení. Podle Věty 6.1.11 platí

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5), \quad y \rightarrow 0.$$

Podle Věty 6.2.7, kde $g(y) = y^5$ a $\varphi(x) = \sin x$, dostáváme

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + \frac{1}{120} \sin^5 x + o(\sin^5 x), \quad x \rightarrow 0. \quad (6.16)$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, je tedy podle Věty 6.2.6(d)

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + \frac{1}{120} \sin^5 x + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \quad (6.17)$$

Spočítejme rozvoje pro funkce $\sin^3$ a $\sin^5$. S využitím vztahu $-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = o(x^2)$, $x \rightarrow 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 \\&= x^3 + 3x^2\left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + 3x\left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\&\quad + \left(-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 \\&= x^3 + \left(-\frac{1}{2}x^5 + 3x^2o(x^3)\right) + 3x(o(x^2))^2 + (o(x^2))^3 \\&= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Při odvození posledních dvou rovností jsme využili Větu 6.2.6(a)–(c), (f). Podobně platí

$$\sin^5 x = (x + o(x))^5 = x^5 + \sum_{j=1}^5 \binom{5}{j} x^{5-j} (o(x))^j = x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Všimněme si, že při umocňování Taylorova rozvoje je vhodné stanovit jeho řád pokud možno co nejnižší, abychom si výpočet zbytečně nekomplikovali, ale tak aby výsledný odhad chyby byl požadovaného řádu. Pro rozvoj $\sin^3$ s chybou $o(x^5)$ stačilo pracovat s Taylorovým polynomem funkce sinus třetího řádu a pro rozvoj $\sin^5$ s chybou $o(x^5)$ jsme vystačili dokonce s Taylorovým polynomem funkce sinus prvního řádu.

Po dosazení do (6.17) a (6.16) dostaneme

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

takže $T_5^{f,0}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$. ♣

6.3.13. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\sin x) - \sin(2x) \sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}.$$

Řešení. Podle předchozího příkladu platí

$$\sin(\sin x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

a dále podle Věty 6.2.7, Věty 6.2.6(d), (6.17) a (6.12) platí

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= (2x) - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + o((2x)^5) \\&= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0, \\ \sqrt[3]{1+x^2} &= 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}(x^2)^2 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Nyní vyjádříme

$$\begin{aligned}\sin(2x) \sqrt[3]{1+x^2} &= \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^5)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right) \\&= 2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Nakonec spočteme zadanou limitu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\sin x) - \sin(2x) \sqrt[3]{1+x^2}}{x^5} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)) - (2x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + o(x^5))}{x^5} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{5}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5} \right) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

♣

6.3.14. Příklad. Nalezněte $k \in \mathbb{N}$ takové, aby pro Taylorův polynom T_k k -tého řádu funkce $\exp$ v bodě 0 platil odhad $|\exp(x) - T_k(x)| < 0,001$ pro každé $x \in [0, 1]$.

Řešení. Necht $x \in [0, 1]$ a $k \in \mathbb{N}$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku (Věta 6.1.15) existuje $\xi_k \in (0, 1)$ takové, že

$$|\exp(x) - T_k(x)| = e^{\xi_k} \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{e}{(k+1)!} < \frac{3}{(k+1)!}. \quad (6.18)$$

Pro $k = 6$ platí $\frac{3}{(k+1)!} = \frac{1}{1680} < 0,001$. Zadané přesnosti tedy podle odhadu (6.18) dosáhneme na celém intervalu $[0, 1]$ pro $k = 6$. ♣

6.3.15. Poznámka. Teorie aproximací, ve které funkce aproximujeme i jinými objekty než polynomy.

6.4. Teoretické příklady k Taylorovu polynomu

6.4.1. Příklad. Necht $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má derivace všech řádů v každém bodě intervalu $[a, b]$ a $M \in \mathbb{R}$ splňuje

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall x \in [a, b]: |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Pak pro každé $x, x_0 \in [a, b]$ platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Řešení. Zvolme $x, x_0 \in [a, b]$. Z Věty 6.1.15 (Lagrangeův tvar zbytku) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje ξ_n ležící mezi x_0 a x splňující

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + r_n,$$

kde

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n)(x - x_0)^{n+1}.$$

Odtud ihned vyplývá odhad

$$|r_n| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proto $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ a platí

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

♣

Následující příklad obsahuje pomocné technické tvrzení, které využijeme v dalším výkladu.

6.4.2. Příklad. Necht $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a φ je omezená funkce na $\mathbb{R}$ taková, že φ' je omezená na $\mathbb{R}$. Dokažte, že funkce

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x),$$

je definovaná na $\mathbb{R}$, má pro každé $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci a platí

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x).$$

Řešení. Nalezneme $C \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in \mathbb{R}: |\varphi(x)| \leq C \wedge |\varphi'(x)| \leq C. \quad (6.19)$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k C$ konverguje, plyne ze srovnávacího kritéria (Věta 3.2.2), že řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \varphi(n^2 x)$ konverguje absolutně. Podle Věty 3.4.3 tedy tato řada konverguje, takže funkce g je dobře definovaná na $\mathbb{R}$.

Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2}$ konverguje. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} < \varepsilon. \quad (6.20)$$

Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě (Věta 5.2.4) aplikované na funkci $y \mapsto \varphi(n^2 y)$ vyplývá, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ existuje $\xi \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b) = n^2 \varphi'(n^2 \xi)(a - b).$$

Odtud plyne, že

$$|\varphi(n^2 a) - \varphi(n^2 b)| \leq C n^2 |a - b|. \quad (6.21)$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $h \in P(0, \delta)$ a $n < n_0$ platí

$$\left| \frac{1}{h} (\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| < \frac{\varepsilon}{n^k}. \quad (6.22)$$

Pak pro $h \in P(0, \delta)$ máme

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\frac{1}{h} (\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} n^k \left| \frac{1}{h} (\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) - n^2 \varphi'(n^2 x) \right| \\ &\quad + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k \left(\left| \frac{1}{h} (\varphi(n^2(x+h)) - \varphi(n^2 x)) \right| + |n^2 \varphi'(n^2 x)| \right). \end{aligned}$$

Odhadneme-li první sumu pomocí (6.22) a druhou pomocí (6.19), (6.20) a (6.21), dostaneme

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \varphi'(n^2 x) \right| &< \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} n^k \frac{\varepsilon}{n^k} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^k 2C n^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0-1} 2^{-n} \varepsilon + 2C \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} n^{k+2} \\ &\leq (1 + 2C) \varepsilon. \end{aligned}$$

♣

6.4.3. Příklad. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(n^2 x)$$

je definována na $\mathbb{R}$, má derivace všech řádů, avšak její Taylorova řada se středem v bodě 0 diverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Řešení. Funkce kosinus i všechny její derivace jsou omezené funkce. Podle Příkladu 6.4.2 je funkce f dobře definovaná a pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{2k} \cos^{(k)}(n^2 x). \quad (6.23)$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $y \in \mathbb{R}$ máme $\cos^{(4k)}(y) = \cos y$, a tedy

$$f^{(4k)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k}.$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dokážeme závěrečné tvrzení. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $(4k)! \leq (4k)^{4k}$. Odtud pro každé $k, m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0) x^{4k} \right| &= \frac{1}{(4k)!} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{8k} |x|^{4k} \\ &\geq \frac{1}{(4k)!} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} \geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Vezměme libovolné $k \in \mathbb{N}$ splňující $k^2|x|^2 > 2$ a položíme $m = 2k$. Potom z (6.24) dostaneme

$$\left| \frac{1}{(4k)!} f^{(4k)}(0) x^{4k} \right| \geq \frac{1}{(4k)^{4k}} 2^{-m} m^{8k} |x|^{4k} = \left(\frac{k^2|x|^2}{2} \right)^{2k} > 1.$$

Taylorova řada funkce f v bodě x se středem v bodě 0 tedy nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady, a tudíž podle Věty 3.1.11 diverguje. ♣

6.4.4 (symbol malé o pro posloupnosti). Necht $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou posloupnosti. Řekneme, že $\{a_n\}$ je malé o od $\{b_n\}$ (v nekonečnu) píšeme $a_n = o(b_n), n \rightarrow \infty$, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

6.5. Početní příklady k Taylorovu polynomu

6.5.1. Příklad. S přesností 10^{-4} vypočítejte $\cos(0,1)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $|f^{(k)}(x)| \leq 1$. Podle Věty 6.1.16 pro $a = 0$, $x = 0,1$ a $M = 1$ platí

$$|f(0,1) - T_n^{f,0}(0,1)| \leq \frac{1}{(n+1)!} (0,1)^{n+1}.$$

Pro $n = 3$ tedy platí

$$|f(0,1) - T_3^{f,0}(0,1)| < 10^{-4}.$$

Přibližnou hodnotu $\cos(0,1)$ s požadovanou přesností obdržíme jako

$$T_3^{f,0}(0,1) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (0,1)^2 = 0,995.$$

♣

Jak jsme již uvedli výše, Taylorův polynom lze v určitých případech použít k výpočtu limit funkcí či posloupností nebo k vyšetřování konvergence číselných řad. Tyto postupy nyní ilustrujeme na několika příkladech.

6.5.2. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

Řešení. Podle 6.3.6 platí

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right) = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

♣

6.5.3. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x}.$$

Řešení. Díky 6.3.4 a 6.3.5 dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^3 + o(x^3) - 1}{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1 + 0}{-\frac{1}{6} + 0} = -6.\end{aligned}$$

♣

6.5.4. Příklad. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}} \right).$$

Řešení. Z Heineovy věty (Věta 4.2.16) vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - e^{-\frac{1}{2n^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

pokud limita vpravo existuje. Stačí tedy spočítat tuto limitu. Z 6.3.6 a 6.3.4 dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - \left(1 + (-\frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2!}(-\frac{1}{2}x^2)^2 + o(x^4)\right)}{x^4} \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

♣

6.5.5. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right).$$

Řešení. Výraz, jehož limitu počítáme, přepíšeme na jeho definiční oboru do tvaru

$$\frac{1}{x^2} - \cot^2 x = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4}.$$

Z Příkladu 5.9.2 a věty o aritmetice limit plyne, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$. Pro druhý zlomek využijeme Taylorových rozvoju příslušných funkcí, tedy 6.3.5 a 6.3.6. Dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^4} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Z věty o aritmetice limit tedy vyplývá, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

♣

6.5.6. Příklad. Spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{1}{6}x^2}{\sin x - x}.$$

Řešení. Podle 6.3.5 platí

$$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Dále máme z 6.3.10

$$\begin{aligned} (1+y)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), \quad y \rightarrow 0, \\ (1+y)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \frac{5}{81}y^3 + o(y^3), \quad y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

V následujícím výpočtu bude symbol $o(x^3)$ uvažován pro $x \rightarrow 0$. Podle Vět 6.2.6 a 6.2.7 platí

$$\begin{aligned} (1 + (x^3 - 2x))^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(x^3 - 2x)^2 + \frac{1}{16}(x^3 - 2x)^3 + o((x^3 - 2x)^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x^3 - 2x) - \frac{1}{8}(4x^2) + \frac{1}{16}(-8x^3) + o(x^3). \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} (1 + (x^2 - 3x))^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x) - \frac{1}{9}(x^2 - 3x)^2 + \frac{5}{81}(x^2 - 3x)^3 + o((x^2 - 3x)^3) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(x^2 - 3x) - \frac{1}{9}(9x^2 - 6x^3) + \frac{5}{81}(-27x^3) + o(x^3). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{1}{6}x^2 &= \left(-2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3}\right)x + \left(-\frac{4}{8} - \frac{1}{3} + \frac{9}{9} - \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{8}{16} - \frac{6}{9} + 27 \cdot \frac{5}{81}\right)x^3 \\ &= x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{1}{6}x^2}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = -6.$$

♣

6.5.7. Příklad. Necht

$$f(x) = \frac{1}{e} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, \infty).$$

Nalezněte polynom P třetího stupně, který splňuje

$$f(x) - P(x) = o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Řešení. V následujícím výpočtu budeme uvažovat symbol o pro $x \rightarrow 0$. Platí

$$f(x) = e^{\frac{\log(1+x)}{x} - 1} = e^{\frac{\log(1+x) - x}{x}}, \quad x \in \mathcal{D}(f).$$

Označme $g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x}$, $x \in \mathcal{D}(f)$. Podle 6.3.7 platí

$$\log(1+x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4),$$

a tedy

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3).$$

Protože

$$g(x) = x\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right),$$

platí $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ a existuje $\delta > 0$ takové, že g nenabývá na prstencovém okolí $P(0, \delta)$ hodnoty 0. Jelikož dle 6.3.4 platí

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3),$$

dostáváme díky Věť 4.2.22

$$\begin{aligned} e^{g(x)} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{8}x^3\right) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Požadovaný polynom P je tedy tvaru

$$P(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

♣

6.5.8. Příklad. Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3}.$$

Řešení. Symbol o opět uvažujeme pro $x \rightarrow 0$. Díky Příkladu 6.5.7 máme

$$\begin{aligned} &(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex \\ &= e\left(\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{e}(1-x)^{-\frac{1}{x}} + x\right) \\ &= e\left(\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)\right) + x\right) \\ &= e\left(-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)\right). \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{7}{8}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{7}{8}.$$

♣

6.5.9. Příklad. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\log\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^3} \right) \cdot \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}.$$

Řešení. Podle 6.3.5, 6.3.7 a Příkladu 6.3.9 platí

$$\begin{aligned} \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - \sin(x) - \frac{1}{3}x^3 \\ = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^5) \\ = x^5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right) + o(x^5) = \frac{23}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Pro $n \geq 2$ označme

$$a_n = \left(\log\left(\sqrt{\frac{1+n^{-1}}{1-n^{-1}}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^3} \right) \cdot \frac{n^\alpha}{\log^2(n)}$$

a

$$b_n = \frac{n^{\alpha-5}}{\log^2 n}.$$

Potom díky (6.25) platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(\frac{23}{120}n^{-5} + o(n^{-5}) \right) = \frac{23}{120}. \quad (6.26)$$

Jelikož jsou členy řady $\sum b_n$ kladné, z (6.26) plyne, že řada $\sum a_n$ má od jistého indexu $n_0 \in \mathbb{N}$ kladné členy. Dále z limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.2.5(a)) plyne, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když je konvergentní řada $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$. Podle Příkladu 5.9.47 řada $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. Zadaná řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-\infty, 4]$. ♣

6.5.10. Příklad. Pro $p \in (0, \infty)$ vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$, kde

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}.$$

Řešení. Podle 6.3.10 máme

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Odtud odvodíme

$$\begin{aligned}\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p} &= \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^p \\ &= 1 + \binom{p}{1} \frac{1}{2n+1} + \binom{p}{2} \frac{1}{(2n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Odtud s pomocí vhodné úpravy dostáváme

$$\frac{a_n^p}{a_{n+1}^p} = 1 + \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} b_n,$$

kde

$$b_n = n^2 \frac{p}{2n+1} - n^2 \frac{p}{2n} + n^2 \binom{p}{2} \frac{1}{(2n+1)^2} + o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Přímočarým výpočtem obdržíme $\lim b_n = -\frac{1}{4}p + \frac{1}{4}\binom{p}{2}$. Posloupnost $\{b_n\}$ je tedy konvergentní, a proto je omezená. Podle Gaussova kritéria (Příklad 5.9.54) zadaná řada konverguje právě tehdy, když $p > 2$. ♣

6.5.11. Příklad. Necht' $\alpha \in (0, \infty)$. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Řešení. Podle 6.3.7 platí

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $b_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Pak můžeme pro $n > 1$ psát $a_n = b_n + c_n$, kde

$$\begin{aligned}c_n &= -\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2\right) \\ &= -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right), \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ konverguje pro každé $\alpha \in (0, \infty)$ podle Leibnizova kritéria (Věta 3.3.1). Dále platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-c_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \frac{1}{2}.$$

Tedy dle Věty 3.2.5 $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$, což nastává právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$ (vizte Větu 3.2.18).

Platí tedy $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} (b_n + c_n)$, přičež $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ vždy konverguje a $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. Řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ tedy konverguje právě tehdy, když $\alpha > \frac{1}{2}$. ♣

6.5.12. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n})$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}$. Díky 6.3.4 máme

$$e^x - 1 - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

a tedy

$$a_n = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Odtud plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \in (0, \infty).$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy zadaná řada konverguje, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje. ♣

6.5.13. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{tg}(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n}))n^2$.

Řešení. Podle Příkladu 6.2.8 a 6.3.5 platí

$$\operatorname{tg}(x) - \sin(x) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Položme

$$a_n = (\operatorname{tg}(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n}))n^2.$$

Pak dostáváme

$$a_n = \left(\frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)n^2 = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy zadaná řada diverguje, neboť diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ♣

6.5.14. Příklad. Zjistěte pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce

$$f(x) = \cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} + Cx^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

lokální maximum v bodě 0.

Řešení. Symbol o uvažujeme pro $x \rightarrow 0$. Díky 6.3.6 a 6.3.4 máme

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) \quad \text{a}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + o(x^6).$$

Tedy

$$f(x) = \frac{12C - 1}{12}x^4 + \frac{14}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Označme $c = \frac{12C - 1}{12}$. Rozlišíme následující případy

Případ $C > \frac{1}{12}$. Zde platí $c > 0$ a máme

$$f(x) = x^4\left(c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)\right).$$

Protože $\lim_{x \rightarrow 0} (c + \frac{14}{6!}x^2 + o(x^2)) = c$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P(0, \delta)$ platí $f(x) > \frac{c}{2}x^4$. Tedy $f(x) > 0$ pro $x \in P(0, \delta)$. Jelikož $f(0) = 0$, má v tomto případě funkce f v bodě 0 lokální minimum.

Případ $C < \frac{1}{12}$. Podobně jako v předchozím případě odvodíme, že f má v 0 lokální maximum.

Případ $C = \frac{1}{12}$. Zde dostáváme

$$f(x) = \frac{14}{6!}x^6 + o(x^6) = x^6\left(\frac{14}{6!} + o(1)\right).$$

Obdobnou úvahou jako výše obdržíme, že f má v 0 lokální minimum.

Funkce f má tedy v 0 lokální maximum, právě když platí $C < \frac{1}{12}$. ♣

6.5.15. Příklad. Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce

$$f(x) = \sin x + \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Díky 6.3.4 a 6.3.5 dostáváme vztahy

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!}x^n + o(x^5) - \left(\sum_{n=0}^5 \frac{1}{n!}(-x)^n\right) - o(x^5)\right) \\ &= x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$f(x) = 2x + \frac{2}{5!}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Z tohoto vztahu dostáváme $f'(0) = 2$. Dále odtud plyne existence $\delta > 0$ takového, že $f(x) > 2x$ pro $x \in (0, \delta)$ a $f(x) < 2x$ pro $x \in (-\delta, 0)$. Odtud plyne podle definice, že 0 je inflexním bodem funkce f . ♣

Literatura

1. A. Anzenbacher, *Úvod do filozofie*, SPN, Praha 1990.
2. Archimédés, *O měření kruhu*, přibližně 250 př. n. l.
3. B. Balcar, P. Štěpánek, *Téorie množin*, Academia, 2005.
4. J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress 2010.
5. K. M. Ball, *Strange curves, counting rabbits, and other mathematical explorations*, Princeton University Press, 2003.
6. J. H. Conway, *The weird and wonderful chemistry of audioactive decay*, Open Problems in Communication and Computation, T.M. Cover and B. Gopinath, eds., Springer, 1987, pp. 173--188.
7. J. H. Conway a R.K. Guy, *The book of numbers*, New York: Copernicus 1996.
8. B. P. Děmidovič, *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, Fragment, 2003.
9. A. Gelfond, *Sur le septieme Probleme de Hilbert*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. **7** (1934), 623--630.
10. P. Hájek, P. Habala, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces*, Matfyzpress 1996.
11. A. M. Gleason, *Fundamentals of abstract analysis*, Addison-Wesley 1966.
12. P. R. Halmos, *Measure theory*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York 1950.
13. P. R. Halmos, *Naive set theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg 1974.
14. V. Jarník, *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
15. V. Jarník, *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1956.
16. V. Jarník, *Integrální počet (I)*, Academia, Praha 1974.
17. T. Jech, *Set theory*, Springer 2002.
18. A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Springer 1995.
19. J. Lukeš, J. Malý, *Measure and integral*, Matfyzpress.
20. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1964.
21. T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I.*, J. Reine Angew. Math. **172** (1934), 65--69.
22. A. Sochor, *Klasická matematická logika*, Karolinum, Praha 2001.
23. R. Smullyan, *Jak se jmenuje tahle knížka?*, Mladá Fronta, 1986.
24. A. Tarski, *Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd*, Academia, Praha 1969.
25. B. L. van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z. **32** (1930), 474--475.
26. L. Zajíček, *Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, Matfyzpress, 2000.
27. L. Zajíček, *Vybrané partie z matematické analýzy pro 2. ročník*, Matfyzpress, 2007.