

2. METODY DŮKAZŮ

1. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.
2. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbf{R}$ platí $|a + b| \leq |a| + |b|$ a $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
3. Necht' $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. Pak platí $|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.
4. Dokažte následující vztahy:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

5. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ dokažte, že platí $n \leq 2^n$.
6. Pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 3$, dokažte, že platí $n^2 \leq 2^n$.
7. (binomická věta) Pro každé $n \in \mathbf{N}$ a pro každá $a, b \in \mathbf{R}$ platí

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

8. (Bernoulli) Necht' $x \in \mathbf{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbf{N}$. Pak platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
9. (AG nerovnost) Necht' $a_1, \dots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

Ukažte, že rovnost v AG nerovnosti platí právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.