Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (A)
ZS 2000-2001

Příklad A1: Uvažujme úlohu hledání extrémů funkcionálu $V(y) = \int_0^{28} t^k + y^l + (y')^m dt$, kde $k, l, m \in \mathbb{N}$.

1. Závisí extrémy na k? Zdůvodněte.
2. Napište (a upravte) Eulerovu rovnici.
3. Položte $l = 1$ a $m = 4$ a najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
4. Najděte podezřelé body z extrémů V s okrajovými podmínkami $y(0) = 3$, $y(28) = 48$.
5. Najděte podezřelé body z extrémů V s okrajovými podmínkami $y(0) = 3$, $y(28)$ volné.
6. Jsou nalezená řešení body maxima či minima? Zdůvodněte.

Příklad A2: Najděte podezřelé body z maxima pro úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^{10} 5u + y$ za podmínek $\dot{y} = y + u$, $y(0) = 0$, $y(10) \geq 3$, $u(t) \in [-1, 2]$.

Příklad A3: Nakreslete fázový diagram (pro K a μ) příslušný Ramseyovu modelu s produkční funkcí $Q(K) = rK^\alpha$ ($r > 0$, $0 < \alpha < 1$) a užitkovou funkcí $U = aC - bC^2$ ($a, b > 0$). Zejména popište počet, polohu a povahu stacionárních řešení (případně závislost těchto věcí na parametrech) a charakter optimální dráhy.

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (B)
ZS 2000-2001

Příklad B1: Uvažujme úlohu hledání extrémů funkcionálu $V(y) = \int_1^{10} a(y')^2 + b\frac{y^2}{t^2} dt$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Napište (a upravte) Eulerovu rovnici.
2. Položte $a = 1$ a $b = 2$ a najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
3. Najděte podezřelé body z extrémů V s okrajovými podmínkami $y(1) = 11$, $y(10) = 101$.
4. Najděte podezřelé body z extrémů V s okrajovými podmínkami $y(1) = 11$, $y(10) \leq 101$.
5. Jsou nalezená řešení body maxima či minima? Zdůvodněte.

Příklad B2: Najděte podezřelé body z maxima pro úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^T -1$ za podmínek $\dot{y} = u$, $y(0) = 0$, $y(T) = T^2 - T + 1$, $u(t) \in [0, 3]$.

Příklad B3: Nakreslete fázový diagram (pro K a μ) příslušný Ramseyovu modelu s produkční funkcí $Q(K) = aK^2 - bK$ ($a, b > 0$) a užitkovou funkcí $U = \hat{U} - \frac{1}{d}C^{-d}$ ($\hat{U}, d > 0$). Zejména popište počet, polohu a povahu stacionárních řešení (případně závislost těchto věcí na parametrech) a charakter optimální dráhy.

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (C)
ZS 2000-2001

Příklad C1: Uvažujme úlohu hledání extrémů funkcionálu $V(y) = \int_1^8 t^k \cdot y^l \cdot (y')^m dt$, kde $k, l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1. Napište (a upravte) Eulerovu rovnici.
2. Položte $k = 9$, $l = 0$ a $m = 4$ a najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
3. Najděte podezřelé body z extrémů V s okrajovými podmínkami $y(1) = 60$, $y(8) = -3$.
4. Najděte podezřelé body z extrémů V s okrajovými podmínkami $y(1) = 60$, $y(8) \geq -3$.
5. Jsou nalezená řešení body maxima či minima? Zdůvodněte.

Příklad C2: Najděte podezřelé body z maxima pro úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^T -3t - 2u^2$ za podmínek $\dot{y} = -u$, $y(0) = 1$, $y(T) = 0$, T volné.

Příklad C3: Nakreslete fázový diagram (pro K a μ) příslušný Ramseyovu modelu s produkční funkcí $Q(K) = \hat{Q} - \frac{1}{d} K^{-d}$ ($\hat{Q}, d > 0$) a užitkovou funkcí $U = aC - bC^2$ ($a, b > 0$). Zejména popište počet, polohu a povahu stacionárních řešení (případně závislost těchto věcí na parametrech) a charakter optimální dráhy.

Písemná zkouška z Matematiky V pro FSV (D)
ZS 2000-2001

Příklad D1: Uvažujme úlohu hledání extrémů funkcionálu $V(y) = \int_0^2 e^t \cdot \left(y^l + (y')^m\right) dt$, kde $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1. Napište (a upravte) Eulerovu rovnici.
2. Položte $l = 1$ a $m = 2$ a najděte obecné řešení Eulerovy rovnice.
3. Najděte podezřelé body z extrémů V s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$, $y(2) = -e^{-2}$.
4. Najděte podezřelé body z extrémů V s okrajovými podmínkami $y(0) = -2$, $y(2) \leq -e^{-2}$.
5. Jsou nalezená řešení body maxima či minima? Zdůvodněte.

Příklad D2: Najděte podezřelé body z maxima pro úlohu optimálního řízení:

Maximalizovat $\int_0^5 y - u$ za podmínek $\dot{y} = y + u$, $y(0) = 1$, $u(t) \in [-1, 1]$

Příklad D3: Nakreslete fázový diagram (pro K a μ) příslušný Ramseyovu modelu s produkční funkcí $Q(K) = aK - bK^2$ ($a, b > 0$) a užitkovou funkcí $U = pC - qC^2$ ($p, q > 0$). Zejména popište počet, polohu a povahu stacionárních řešení (případně závislost těchto věcí na parametrech) a charakter optimální dráhy.