2. Variační počet

2.1 Derivování funkcí na vektorových prostorech

Definice. Nechť X je reálný vektorový prostor, $M \subset X$, $a \in M$ a F je reálná funkce definovaná alespoň na M. Řekneme, že a je **bod minima** (resp. **bod maxima**) funkce F na množině M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $F(x) \geq F(a)$ (resp. $F(x) \leq F(a)$).

Věta 1. Nechť X je vektorový prostor, $F : X \to \mathbf{R}$ a $a \in X$. Jestliže má F v bodě a extrém (tj. minimum nebo maximum), pak pro každé $h \in X$ platí, že $\delta F(a,h)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá na** M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M, ||x-y|| < \delta : \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 2. Nechť $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní a $f : K \to \mathbf{R}$ je spojitá na K. Potom f je stejnoměrně spojitá na K.

Věta 3. Nechť $f : (a,b) \times (c,d) \to \mathbf{R}$ je spojitá a $\partial_1 f$ (= parciálni derivace podle první proměnné) je také spojitá na $(a,b) \times (c,d)$. Nechť $\varphi : (a,b) \to (c,d)$ je funkce, která má v každém bodě vlastní derivaci. Nechť $x_0 \in (c,d)$.

Položme

$$K(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} f(y,x)dx \qquad \text{pro } y \in (a,b).$$

Potom má funkce K v každém bodě intervalu (a,b) vlastní derivaci a platí

$$K'(y) = \int_{x_0}^{\varphi(y)} \partial_1 f(y,x)dx + f(y,\varphi(y))\varphi'(y), \qquad y \in (a,b).$$

Formulace základní úlohy variačního počtu (P1).
Dáno: $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A, Z \in \mathbf{R}$; $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0,T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$

Hledáme takové $y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,T\rangle)$, $y(0) = A$, $y(T) = Z$, že hodnota

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s))ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 4 (nutná podmínka pro extrém). Nechť y je bodem extrému pro (P1). Pak y je řešením rovnice

$$(ER1) \qquad F_y(t,y,y') = \frac{d}{dt} F_{y'}(t,y,y').$$

Lemma A. Nechť funkce $\varphi \in \mathcal{C}(\langle 0,T\rangle)$ je nezáporná a $\int_0^T \varphi(s)ds = 0$. Pak $\varphi = 0$ na $\langle 0,T\rangle$.

Lemma B (základní lemma variačního počtu). Nechť $a, b \in \mathcal{C}(\langle 0,T\rangle)$ a

$$\int_0^T (a(t)h(t) + b(t)h'(t))dt = 0$$

pro každou funkci $h \in \mathcal{C}^1(\langle 0,T\rangle)$ splňující $h(0) = h(T) = 0$. Pak funkce b má na $(0,T)$ derivaci a platí zde $b' = a$.

Lemma C. Nechť T a F jsou jako v (P1), $y, u \in \mathcal{C}^1(\langle 0,T\rangle)$. Nechť dále zobrazení $G : \mathcal{C}^1(\langle 0,T\rangle) \to \mathbf{R}$ je definováno takto:

$$G(u) = \int_0^T F(t, y(t) + u(t), y'(t) + u'(t))dt.$$

Potom

$$\delta G(\boldsymbol{o}, h) = \int_0^T \big(F_y(t, y(t), y'(t)) \cdot h(t) + F_{y'}(t, y(t), y'(t)) \cdot h'(t)\big)dt$$

pro libovolné $h \in \mathcal{C}^1(\langle 0,T\rangle)$.