1. Stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic

Budeme uvažovat rovnici

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{f}$ je zobrazení definované na neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$. Soustavy tvaru (1) se nazývají **autonomní**.

V dalším budeme předpokládat, že $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^n)$, tj. složky $f_1, \dots, f_n$ zobrazení $\boldsymbol{f}$ jsou třídy $\mathcal{C}^1$ na G.

Definice. Řekneme, že $\boldsymbol{a} \in G$ je **stacionární bod rovnice** (1), jestliže $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Definice. Řekneme, že stacionární bod $\boldsymbol{a} \in G$ rovnice (1) je

- **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (1) splňující $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{a}\| < \delta$ platí:
  (a) definiční obor řešení $\boldsymbol{x}$ obsahuje interval $\langle 0, +\infty)$;
  (b) $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$ pro $t \in \langle 0, +\infty)$;
- **nestabilní**, jestliže není stabilní,
- **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a navíc existuje $\Delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (1) splňující $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{a}\| < \Delta$ platí $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}$.

Věta 1. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

- Stacionární bod $\boldsymbol{o}$ rovnice $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ je asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$.
- Stacionární bod $\boldsymbol{o}$ rovnice $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ je stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ a pokud $\operatorname{Re}\lambda = 0$, pak násobnost λ je rovna $n - h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$.

Věta 2 (Ljapunovova věta). Nechť $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^n)$ a $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod rovnice (1). Označme

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right)_{i=1..n, j=1..n}.$$

Pak platí:

- Jestliže každé vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ má zápornou reálnou část, pak $\boldsymbol{a}$ je asymptoticky stabilní bod rovnice (1).
- Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ má kladnou reálnou část, pak je $\boldsymbol{a}$ nestabilní bod rovnice (1).