

3.1 Globální extrémy

Definice

Nechť X je vektorový prostor a $V : X \rightarrow \mathbf{R}$ je funkcionál. Řekneme, že V je **konkávní** (resp. **konvexní**) na X , jestliže

$$\forall x, y \in X \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : V(tx + (1-t)y) \geq tV(x) + (1-t)V(y)$$

3.1 Globální extrémy

Definice

Nechť X je vektorový prostor a $V : X \rightarrow \mathbf{R}$ je funkcionál. Řekneme, že V je **konkávní** (resp. **konvexní**) na X , jestliže

$$\forall x, y \in X \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : V(tx + (1-t)y) \geq tV(x) + (1-t)V(y)$$

(resp.

$$\forall x, y \in X \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : V(tx + (1-t)y) \leq tV(x) + (1-t)V(y)).$$

3.1 Globální extrémy

Věta 8.

Nechť $V : X \rightarrow \mathbf{R}$ je konkávní. Jestliže $\delta V(x, h) = 0$ pro každé $h \in X$, pak V má v x maximum.

3.1 Globální extrémy

Věta 8.

Nechť $V : X \rightarrow \mathbf{R}$ je konkávní. Jestliže $\delta V(x, h) = 0$ pro každé $h \in X$, pak V má v x maximum.

Věta 9.

Nechť $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$.

(K) Nechť pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ je funkce $[y, y'] \mapsto F(t, y, y')$ konkávní.

3.1 Globální extrémy

Věta 8.

Nechť $V : X \rightarrow \mathbf{R}$ je konkávní. Jestliže $\delta V(x, h) = 0$ pro každé $h \in X$, pak V má v x maximum.

Věta 9.

Nechť $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$.

(K) Nechť pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ je funkce $[y, y'] \mapsto F(t, y, y')$ konkávní.

Pak je funkcionál $V : \mathcal{C}^1(\langle 0, T \rangle) \rightarrow \mathbf{R}$ definovaný předpisem

$$V : y \mapsto \int_0^T F(t, y, y') dt$$

konkávní.

3.1 Globální extrémy

Věta 10.

Nechť F v (P1) splňuje (K). Pak je (ER1) postačující podmínkou pro maximum.

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice

Normovaným lineárním prostorem rozumíme dvojici $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor (nad \mathbf{R}) a $\|\cdot\|$ je **norma na X** , tj. zobrazení $\|\cdot\| : X \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ splňující

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice

Normovaným lineárním prostorem rozumíme dvojici $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor (nad \mathbf{R}) a $\|\cdot\|$ je **norma na X** , tj. zobrazení $\|\cdot\| : X \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ splňující

▶ $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o,$

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice

Normovaným lineárním prostorem rozumíme dvojici $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor (nad \mathbf{R}) a $\|\cdot\|$ je **norma na X** , tj. zobrazení $\|\cdot\| : X \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ splňující

- ▶ $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$,
- ▶ $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbf{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice

Normovaným lineárním prostorem rozumíme dvojici $(X, \|\cdot\|)$, kde X je vektorový prostor (nad \mathbf{R}) a $\|\cdot\|$ je **norma na X** , tj. zobrazení $\|\cdot\| : X \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ splňující

- ▶ $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$,
- ▶ $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbf{R} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- ▶ $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ a $x_0 \in X$. Řekneme, že f má v bodě x_0

- ▶ **lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, \|x - x_0\| < r : f(x) \leq f(x_0);$$

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ a $x_0 \in X$. Řekneme, že f má v bodě x_0

- ▶ **lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, \|x - x_0\| < r : f(x) \leq f(x_0);$$

- ▶ **ostré lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, 0 < \|x - x_0\| < r : f(x) < f(x_0).$$

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ a $x_0 \in X$. Řekneme, že f má v bodě x_0

- ▶ **lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, \|x - x_0\| < r : f(x) \leq f(x_0);$$

- ▶ **ostré lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, 0 < \|x - x_0\| < r : f(x) < f(x_0).$$

Analogicky definujeme **lokální minimum** a **ostré lokální minimum**.

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Věta 11.

Nechť y řeší (ER1) v úloze (P1). Jestliže je matice

$$\begin{pmatrix} F_{yy}(t, y(t), y'(t)) & F_{yy'}(t, y(t), y'(t)) \\ F_{yy'}(t, y(t), y'(t)) & F_{y'y'}(t, y(t), y'(t)) \end{pmatrix}$$

negativně definitní pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$, pak y je bodem ostrého lokálního maxima.