

Matematika 4

FSV UK, LS 2024-25

Miroslav Zelený

- 11. Diferenční rovnice ▶
- 12. Diferenciální rovnice se separovanými prom. ▶
- 13. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu ▶
- 14. Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu ▶
- 15. Soustavy diferenciálních rovnic ▶
- 16. Miscelanea ▶

11. Diferenční rovnice

Leonardo Fibonacci (asi 1180–1250)



Definice

Nechť $k \in \mathbf{N}$. **Lineární diferenční rovnici k -tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (11.1)$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$ jsou dána, stejně jako posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice

Nechť $k \in \mathbf{N}$. **Lineární diferenční rovnici k -tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (11.1)$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$ jsou dána, stejně jako posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešením rovnice (11.1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbf{N}$. Pokud chceme, aby řešení rovnice (11.1) splňovalo podmínky

$$y(1) = y_1, \dots, y(k) = y_k, \quad (11.2)$$

kde $y_1, \dots, y_k$ jsou dána (tzv. **počáteční podmínky**), pak hovoříme o **počáteční úloze**.

Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, pak (11.1) má tvar

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (11.3)$$

Tato rovnice se nazývá **homogenní**.

Věta 11.1

Počáteční úloha (11.1), (11.2) má právě jedno řešení.

Věta 11.1

Počáteční úloha (11.1), (11.2) má právě jedno řešení.

Věta 11.2

Množina řešení rovnice (11.3) tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.

Věta 11.1

Počáteční úloha (11.1), (11.2) má právě jedno řešení.

Věta 11.2

Množina řešení rovnice (11.3) tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.

Definice

Charakteristickým polynomem rovnice (11.1) budeme rozumět polynom

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1} \lambda + p_k.$$

Věta 11.3

*Nechť posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\dots$, $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří fundamentální systém řešení (11.3).
Nechť posloupnost $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ je řešením (11.1). Potom
posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ řeší (11.1), právě když existují
konstanty $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \dots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Věta 11.4

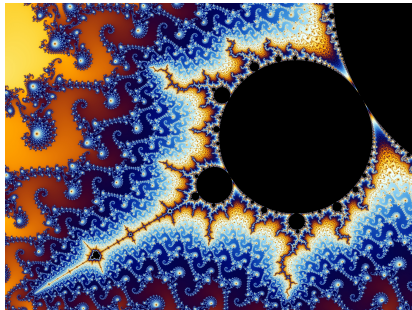
Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v rovnici (11.1) splňuje

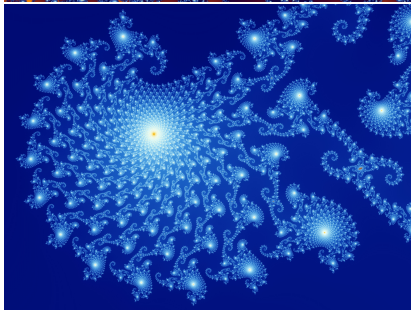
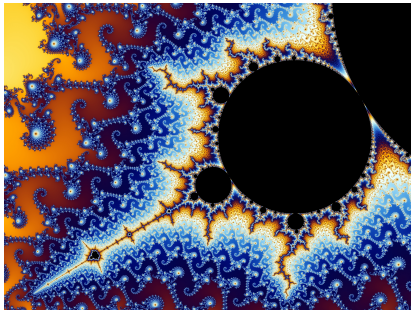
$$a_n = \alpha^n (P(n) \cos(\nu n) + Q(n) \sin(\nu n)),$$

kde $\alpha > 0$, P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení (11.1) ve tvaru

$$y(n) = \alpha^n n^m (R(n) \cos(\nu n) + S(n) \sin(\nu n)),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{stupeň } P, \text{stupeň } Q\}$ a $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ udává jakou násobnost má číslo $\alpha(\cos \nu + i \sin \nu)$ jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice (11.1).





Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0,$$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c,$$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c,$$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26, \dots$

$c = -1$: $z_{n+1} = z_n^2 - 1,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26, \dots$

$c = -1$: $z_{n+1} = z_n^2 - 1, \quad 0,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26, \dots$

$c = -1$: $z_{n+1} = z_n^2 - 1, \quad 0, -1,$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26, \dots$

$c = -1$: $z_{n+1} = z_n^2 - 1, \quad 0, -1, 0, \dots$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26, \dots$

$c = -1$: $z_{n+1} = z_n^2 - 1, \quad 0, -1, 0, -1, \dots$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26, \dots$

$c = -1$: $z_{n+1} = z_n^2 - 1, \quad 0, -1, 0, -1, 0, \dots$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26, \dots$

$c = -1$: $z_{n+1} = z_n^2 - 1, \quad 0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$

Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

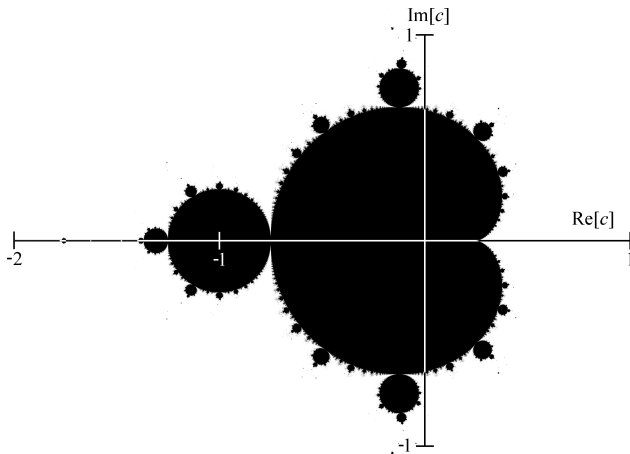
$$z_0 = 0, \quad z_1 = c, \quad z_2 = c^2 + c, \dots$$

Mandelbrotova množina = množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro které je posloupnost $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ omezená.

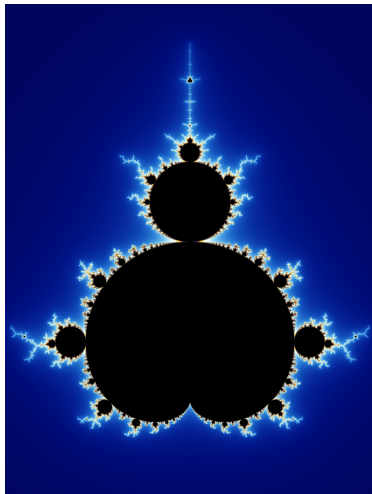
$c = 1$: $z_{n+1} = z_n^2 + 1, \quad 0, 1, 2, 5, 26, \dots$

$c = -1$: $z_{n+1} = z_n^2 - 1, \quad 0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$

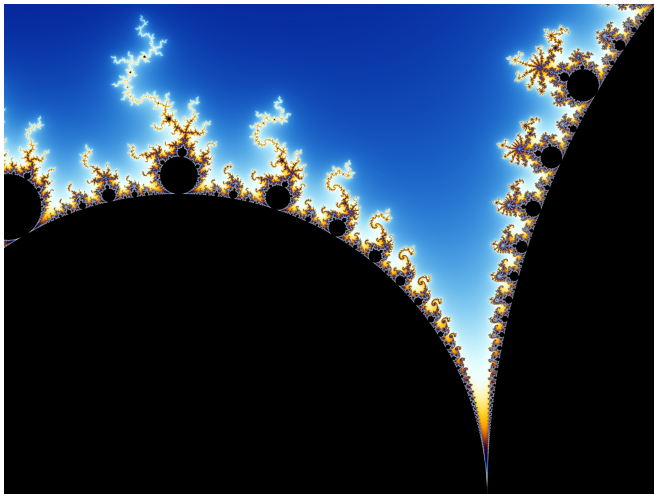
Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)



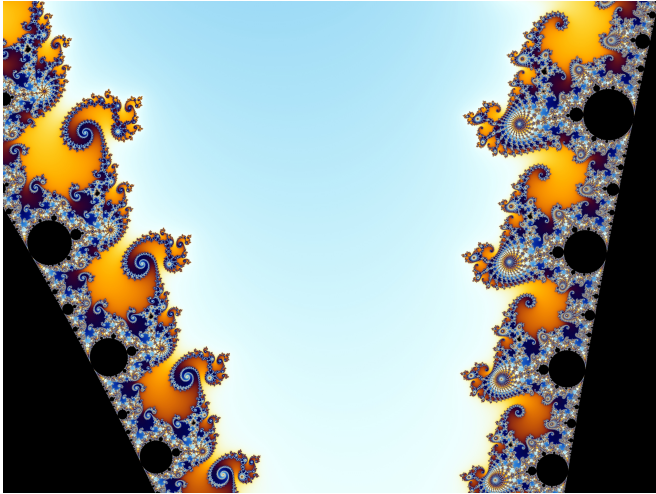
Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)



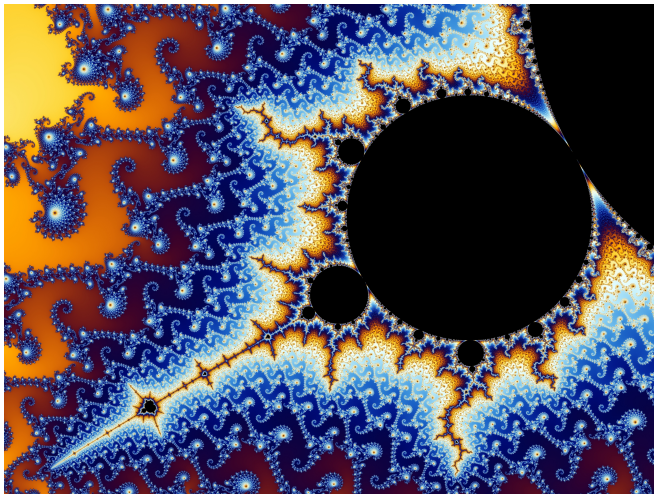
Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)



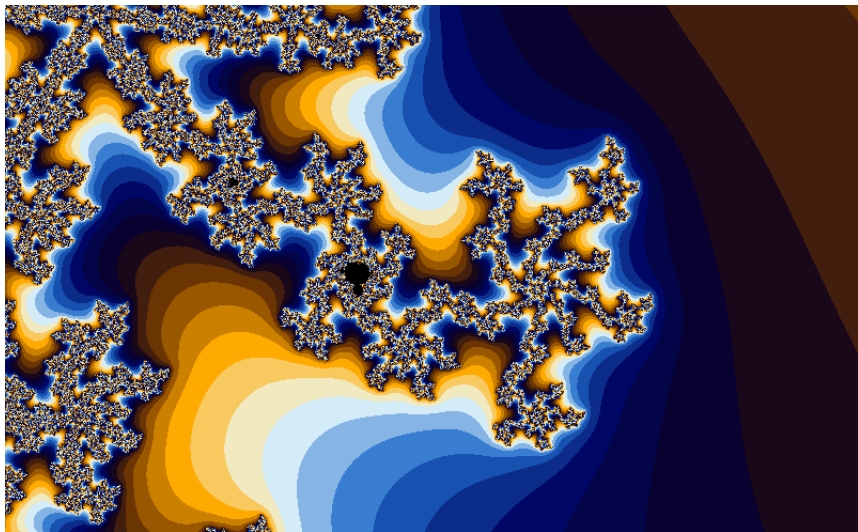
Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)



Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)



Mandelbrotova množina (jablečný mužíček)



12. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$

$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

$$mv' = mg - bv$$

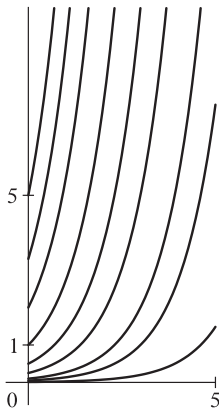
$$mv' = mg - bv^2$$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

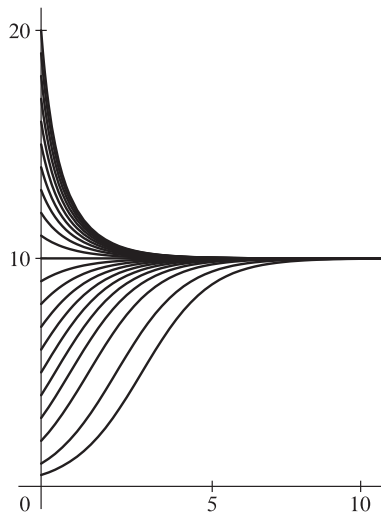
Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$



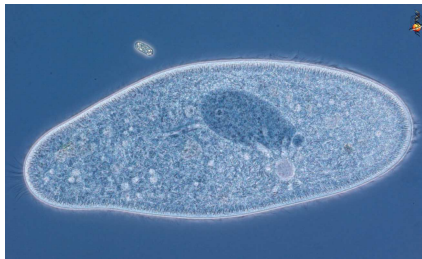
Logistický populační model $p' = ap - bp^2$

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$



Biologie





Trepka velká (paramecium caudatum)



Trepka velká (*paramecium caudatum*)
prvoci – nálevníci – chudoblanní



Trepka velká (paramecium caudatum)

prvoci – nálevníci – chudoblanní

$$p' = ap - bp^2, \quad a = 2.309, \quad b = a/375$$

Q_d ... poptávka

Q_d ... poptávka

Q_s ... nabídka

Ekonomie

Q_d ... poptávka

Q_s ... nabídka

P ... cena

Q_d ... poptávka

Q_s ... nabídka

P ... cena

$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$$

Q_d ... poptávka

Q_s ... nabídka

P ... cena

$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$$

$$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$$

Q_d ... poptávka

Q_s ... nabídka

P ... cena

$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$$

$$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$$

$$Q_d = Q_s$$

Definice

Diferenciální rovnici rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \quad (12.1)$$

kde F je reálná funkce $n + 2$ proměnných.

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice (12.1)** rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I , která má v každém bodě intervalu I vlastní n -tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (12.1) v každém bodě intervalu I , tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice (12.1)** rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I , která má v každém bodě intervalu I vlastní n -tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (12.1) v každém bodě intervalu I , tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (12.1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z , pro které $D_y \subsetneq D_z$ a které se na D_y shoduje s y .

Definice

Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \quad (12.2)$$

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h .

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h .
2. Najdeme všechny nulové body funkce g . Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (12.2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h .
2. Najdeme všechny nulové body funkce g . Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (12.2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.
3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku.
Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J .

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku.
Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J .
Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J .

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J . Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J . Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J .

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J . Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J . Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J . Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y , který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G . Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení. Necht' y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (12.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c) , přičemž $b \in D_h$.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení. Necht' y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (12.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c) , přičemž $b \in D_h$.

Předpokládejme, že

$$\lim_{x \rightarrow b-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení. Necht' y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (12.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c) , přičemž $b \in D_h$.

Předpokládejme, že

$$\lim_{x \rightarrow b-} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (12.2) na intervalu (a, c) .

Malthusiánský populační model

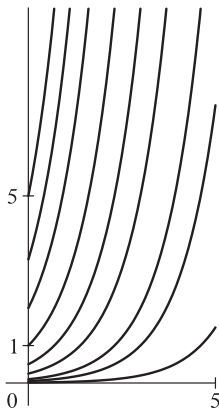
$$p' = a \cdot p,$$

Malthusiánský populační model

$$p' = a \cdot p, \quad p(t) = p(0) \cdot e^{at}$$

Malthusiánský populační model

$$p' = a \cdot p, \quad p(t) = p(0) \cdot e^{at}$$



Logistický populační model

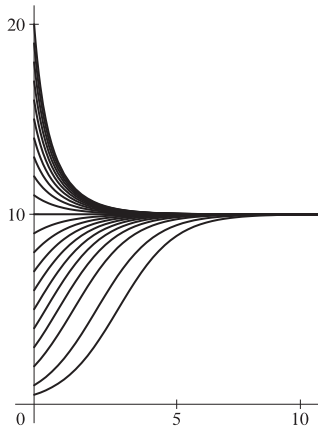
$$p' = ap - bp^2, \quad a, b \in (0, +\infty),$$

Logistický populační model

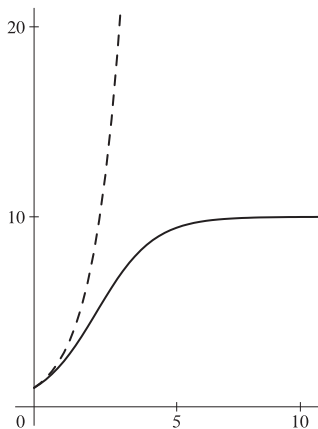
$$p' = ap - bp^2, \quad a, b \in (0, +\infty), \quad p(t) = \frac{ake^{at}}{bke^{at} + 1}$$

Logistický populační model

$$p' = ap - bp^2, \quad a, b \in (0, +\infty), \quad p(t) = \frac{ake^{at}}{bke^{at} + 1}$$



Malthusiánský vs. logistický model



13. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (13.1)$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b) ,
 $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (13.1)$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**). **Homogenní diferenciální rovnici** budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0. \quad (13.2)$$

Věta 13.1

Maximální řešení rovnice (13.1) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$, má tvar

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^x q(t) e^{P(t)} dt \right) \cdot e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P je primitivní funkce k p na (a, b) splňující $P(x_0) = 0$.

14. Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t), \quad (14.1)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b)

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t), \quad (14.1)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty**).

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t), \quad (14.1)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice n -tého řádu s konstantními koeficienty**).

Homogenní rovnici k rovnici (14.1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (14.2)$$

Věta 14.1

Nechť $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (14.1), které splňuje podmínky

$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b) .

Věta 14.2

- (i) *Maximální řešení rovnice (14.2) jsou definována na celém $\mathbf{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ dimenze n .*

Věta 14.2

- (i) *Maximální řešení rovnice (14.2) jsou definována na celém $\mathbf{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ dimenze n .*
- (ii) *Nechť y_p je maximální řešení rovnice (14.1). Pak funkce y je maximálním řešením (14.1), právě když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice (14.2).*

Definice

Bázi prostoru řešení rovnice (14.2) nazýváme **fundamentální systém**.

Definice

Charakteristickým polynomem rovnice (14.2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Lemma 14.3

Nechť $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (14.2). Potom matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.

Věta 14.4

Necht'

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t),$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (14.1) ve tvaru

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{stupeň } P, \text{stupeň } Q\}$ a $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu.

15. Soustavy diferenciálních rovnic

15.1 Základní pojmy

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\&\vdots \\x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{15.1}$$

kde f_i , $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Vektorový tvar:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

kde máme $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $\mathbf{x}'(t) = [x'_1(t), \dots, x'_n(t)]$
a dále $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]$.

Definice

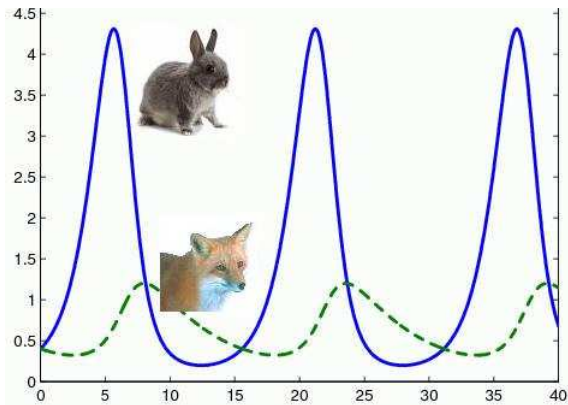
- **Řešením soustavy** (15.1) rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x'_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (15.1).

Definice

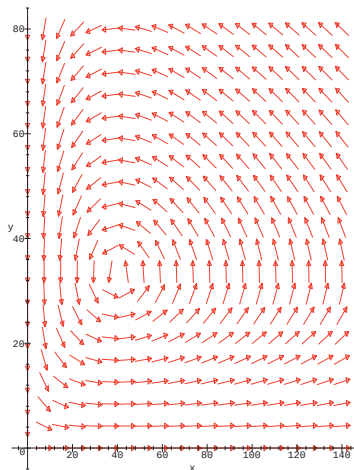
- **Řešením soustavy** (15.1) rozumíme vektorovou funkci $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x'_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (15.1).
- **Počáteční úlohou** pro (15.1) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\mathbf{x}$ soustavy (15.1) splňující navíc předem zadanou podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$, kde $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ (tzv. počáteční podmínka).

- Maximální řešení soustavy (15.1) je takové řešení $\mathbf{x}$ definované na intervalu J , které již nelze prodloužit, tj. je-li $\mathbf{y}$ řešení definované na intervalu I , $J \subset I$ a $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

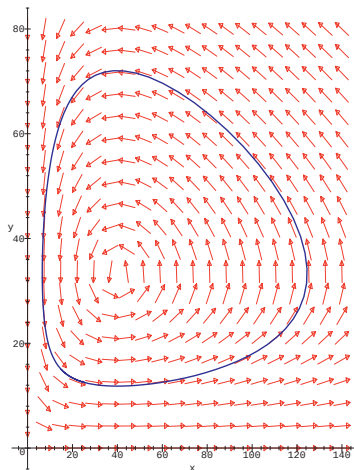
Model dravec-kořist



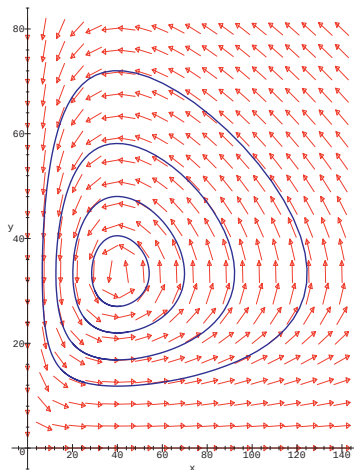
Model dravec-kořist



Model dravec-kořist



Model dravec-kořist



Věta 15.1 (Peano)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\mathbf{f}: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitá na G . Pak pro každé $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (15.1) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

Věta 15.2 (Picard)

Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\mathbf{f}: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ splňuje podmínku:

(P) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že f_i je spojitá na G a její parciální derivace podle druhé, třetí, $\dots$, $(n+1)$ -ní proměnné jsou spojitě na G .

Jestliže $[t_0, \mathbf{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice (15.1) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$.

15.2 Vlastnosti maximálních řešení

Věta 15.3 (opouštění kompaktu)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená, $K \subset G$ je kompaktní, zobrazení $\mathbf{f}$ je spojitě na G , $\mathbf{x}$ je maximální řešení rovnice (15.1) definované na intervalu (α, β) , $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \mathbf{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_i, \mathbf{x}(\tau_i)] \notin K$, $i = 1, 2$.

Věta 15.4 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\mathbf{f}$ splňuje podmínku (P) na G .

Věta 15.4 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\mathbf{f}$ splňuje podmínku (P) na G . Necht' $\mathbf{x}$ je maximální řešení soustavy (15.1) definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

Věta 15.4 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\mathbf{f}$ splňuje podmínku (P) na G . Necht' $\mathbf{x}$ je maximální řešení soustavy (15.1) definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každé $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{y}$, které splňuje podmínku $\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, platí:

Věta 15.4 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

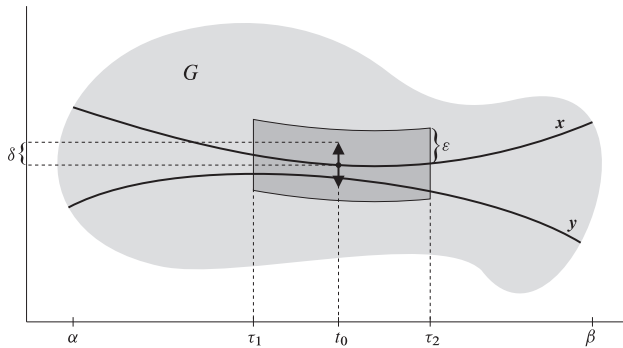
Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\mathbf{f}$ splňuje podmínku (P) na G . Nechť $\mathbf{x}$ je maximální řešení soustavy (15.1) definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každé $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{y}$, které splňuje podmínku $\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, platí:

- *$\mathbf{y}$ je definováno v každém bodě intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$,*

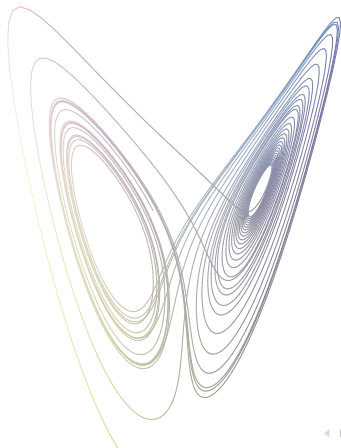
Věta 15.4 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Necht' $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\mathbf{f}$ splňuje podmínku (P) na G . Necht' $\mathbf{x}$ je maximální řešení soustavy (15.1) definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každé $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{y}$, které splňuje podmínku $\|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| < \delta$, platí:

- *$\mathbf{y}$ je definováno v každém bodě intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$,*
- *$\forall t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle: \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$.*



Lorenzův model



15.3 Soustavy lineárních dif. rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\&\vdots \\x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),\end{aligned}\tag{15.2}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$, $b_i: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar:

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 15.5 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$. Nechť $\mathbb{A}: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\mathbf{x}$ soustavy (15.2) splňující $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β) .*

Definice

Homogenní soustavou k (15.2) rozumíme soustavu

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}(t)\mathbf{x}. \quad (15.3)$$

Věta 15.6

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^$, $\alpha < \beta$, a $\mathbb{A}: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$ je spojitě zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (15.3) tvoří vektorový podprostor prostoru $C^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n .*

Věta 15.7

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^$, $\alpha < \beta$. Nechť $\mathbb{A}: (\alpha, \beta) \rightarrow M(n \times n)$, $\mathbf{b}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $\mathbf{y}$ je řešení (15.2) na intervalu (α, β) . Potom každé řešení $\mathbf{x}$ soustavy (15.2) na intervalu (α, β) má tvar $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, kde $\mathbf{z}$ je jisté řešení (15.3).*

Definice

Nechť vektorové funkce $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (15.3) na (α, β) . Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální systém** rovnice (15.3).

Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (15.3).

Lemma 15.8

Nechť Φ je fundamentální matice soustavy (15.3). Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Lemma 15.8

Nechť Φ je fundamentální matice soustavy (15.3). Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.

Věta 15.9 (variace konstant)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{y}^0 \in \mathbf{R}^n$. Pak maximální řešení $\mathbf{y}$ rovnice (15.2) s počáteční podmínkou $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$ má tvar*

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{y}^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s) ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (15.3).

15.4 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

Věta 15.10

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ a vektorová funkce $\mathbf{y}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ je řešením soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y}$. Pak $\mathbf{y}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ a pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\mathbf{y}^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k \mathbf{y}(x)$ pro $x \in \mathbf{R}$.

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme λ -**maticí**.

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme λ -**maticí**. **Řádkovými úpravami λ -matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme λ -**maticí**. **Řádkovými úpravami λ -matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme λ -**maticí**. **Řádkovými úpravami λ -matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ .

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ , nazýváme **λ -maticí**. **Řádkovými úpravami λ -matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$ -násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ .

Lemma 15.11

Nechť $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ je λ -matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ -matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.

Věta 15.12

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak lze λ -matici $\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A}$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ -matici. Výsledná λ -matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n .

Důkaz Věty 15.12

Označení

- Necht' $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n -tého řádu na $\mathbf{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$

Označení

- Necht' $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ -matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$P_{11}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{1n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n = 0,$$

$$P_{21}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{2n}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n = 0,$$

$$\vdots$$

$$P_{n1}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1 + \cdots + P_{nn}\left(\frac{d}{dx}\right)y_n = 0.$$

Věta 15.13

*Nechť λ -matice $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností
řádkových úprav z λ -matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce
 $\mathbf{y}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ třídy C^∞ je řešením soustavy odpovídající
matici $\mathbb{P}$, právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.*

Důkaz Věty 15.13

Příklad 1

$$y_1' = 4y_1 + 5y_2$$

$$y_2' = -2y_1 - 2y_2$$

Příklad 1

$$\begin{aligned}y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2\end{aligned}$$

$$\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 1

$$\begin{aligned}y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2\end{aligned}$$

$$\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 1

$$\begin{aligned}y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2\end{aligned}$$

$$\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 &= 0 \\ y_2'' - 2y_2' + 2y_2 &= 0\end{aligned}$$

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$

$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 \right) e^t \cos t$$

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$

$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2 \right) e^t \cos t$$

Příklad 2

$$u' = -u + 2v + \sin t$$

$$v' = -2u + 3v + \cos t$$

Příklad 2

$$u' = -u + 2v + \sin t$$

$$v' = -2u + 3v + \cos t$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}$$

Příklad 2

$$u' = -u + 2v + \sin t$$

$$v' = -2u + 3v + \cos t$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ \lambda + 1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}$$

Příklad 2

$$u' = -u + 2v + \sin t$$

$$v' = -2u + 3v + \cos t$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ \lambda + 1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & \sin t - \frac{1}{2}\lambda \cos t - \frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix}$$

Příklad 2

$$u' = -u + 2v + \sin t$$

$$v' = -2u + 3v + \cos t$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ \lambda + 1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & \sin t - \frac{1}{2}\lambda \cos t - \frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix}$$

$$2u + v' - 3v = \cos t$$

Příklad 2

$$u' = -u + 2v + \sin t$$

$$v' = -2u + 3v + \cos t$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ \lambda + 1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & \sin t - \frac{1}{2}\lambda \cos t - \frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix}$$

$$2u + v' - 3v = \cos t$$

$$-\frac{1}{2}v'' + v' - \frac{1}{2}v = \sin t - \frac{1}{2}(\cos t)' - \frac{1}{2}\cos t$$

Příklad 2

$$u' = -u + 2v + \sin t$$

$$v' = -2u + 3v + \cos t$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ \lambda + 1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & \sin t - \frac{1}{2}\lambda \cos t - \frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix}$$

$$2u + v' - 3v = \cos t$$

$$v'' - 2v' + v = \cos t - 3 \sin t$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a \cos t + b \sin t$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a \cos t + b \sin t$

$v_p'(t) = b \cos t - a \sin t, v_p''(t) = -a \cos t - b \sin t$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a \cos t + b \sin t$

$v_p'(t) = b \cos t - a \sin t, v_p''(t) = -a \cos t - b \sin t$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a \cos t + b \sin t$

$v_p'(t) = b \cos t - a \sin t, v_p''(t) = -a \cos t - b \sin t$

$$-2b \cos t + 2a \sin t = \cos t - 3 \sin t$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a \cos t + b \sin t$

$v_p'(t) = b \cos t - a \sin t, v_p''(t) = -a \cos t - b \sin t$

$$-2b \cos t + 2a \sin t = \cos t - 3 \sin t$$

$$b = -1/2, a = -3/2$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a \cos t + b \sin t$

$v_p'(t) = b \cos t - a \sin t, v_p''(t) = -a \cos t - b \sin t$

$$-2b \cos t + 2a \sin t = \cos t - 3 \sin t$$

$b = -1/2, a = -3/2$

obecné řešení:

$$v(t) = -\frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t + (ct + d)e^t.$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a \cos t + b \sin t$

$$v_p'(t) = b \cos t - a \sin t, v_p''(t) = -a \cos t - b \sin t$$

$$-2b \cos t + 2a \sin t = \cos t - 3 \sin t$$

$$b = -1/2, a = -3/2$$

obecné řešení:

$$v(t) = -\frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t + (ct + d)e^t.$$

$$u(t) = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} v'(t) + \frac{3}{2} v(t)$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

fundamentální systém: e^t, te^t

partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a \cos t + b \sin t$

$$v_p'(t) = b \cos t - a \sin t, v_p''(t) = -a \cos t - b \sin t$$

$$-2b \cos t + 2a \sin t = \cos t - 3 \sin t$$

$$b = -1/2, a = -3/2$$

obecné řešení:

$$v(t) = -\frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t + (ct + d)e^t.$$

$$u(t) = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} v'(t) + \frac{3}{2} v(t)$$

$$u(t) = -\frac{3}{2} \cos t - \frac{3}{2} \sin t + \left(ct - \frac{1}{2}c + d \right) e^t.$$

15.5 Stabilita řešení soustav dif. rovnic

Budeme uvažovat rovnici

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (15.4)$$

kde $\mathbf{f}$ je zobrazení definované na neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$. Soustavy tvaru (15.4) se nazývají **autonomní**.

15.5 Stabilita řešení soustav dif. rovnic

Budeme uvažovat rovnici

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (15.4)$$

kde $\mathbf{f}$ je zobrazení definované na neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$. Soustavy tvaru (15.4) se nazývají **autonomní**.

V dalším budeme předpokládat, že $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^n)$, tj. složky $f_1, \dots, f_n$ zobrazení $\mathbf{f}$ jsou třídy $\mathcal{C}^1$ na G .

15.5 Stabilita řešení soustav dif. rovnic

Budeme uvažovat rovnici

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (15.4)$$

kde $\mathbf{f}$ je zobrazení definované na neprázdnej otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$. Soustavy tvaru (15.4) se nazývají **autonomní**.

V dalším budeme předpokládat, že $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^n)$, tj. složky $f_1, \dots, f_n$ zobrazení $\mathbf{f}$ jsou třídy $\mathcal{C}^1$ na G .

Definice

Řekneme, že $\mathbf{a} \in G$ je **stacionární bod rovnice** (15.4), jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$.

Definice

Řekneme, že stacionární bod $\mathbf{a} \in G$ rovnice (15.4) je

Definice

Řekneme, že stacionární bod $\mathbf{a} \in G$ rovnice (15.4) je

- **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{x}$ rovnice (15.4) splňující $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \delta$ platí:

Definice

Řekneme, že stacionární bod $\mathbf{a} \in G$ rovnice (15.4) je

- **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{x}$ rovnice (15.4) splňující $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \delta$ platí:

- (a) definiční obor řešení $\mathbf{x}$ obsahuje interval $\langle 0, +\infty \rangle$;
- (b) $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ pro $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;

Definice

Řekneme, že stacionární bod $\mathbf{a} \in G$ rovnice (15.4) je

- **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{x}$ rovnice (15.4) splňující $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \delta$ platí:
 - (a) definiční obor řešení $\mathbf{x}$ obsahuje interval $\langle 0, +\infty \rangle$;
 - (b) $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ pro $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
- **nestabilní**, jestliže není stabilní,

Definice

Řekneme, že stacionární bod $\mathbf{a} \in G$ rovnice (15.4) je

- **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{x}$ rovnice (15.4) splňující $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \delta$ platí:
 - (a) definiční obor řešení $\mathbf{x}$ obsahuje interval $\langle 0, +\infty \rangle$;
 - (b) $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ pro $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
- **nestabilní**, jestliže není stabilní,
- **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a navíc existuje $\Delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\mathbf{x}$ rovnice (15.4) splňující $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{a}\| < \Delta$ platí $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}$.

Věta 15.14

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

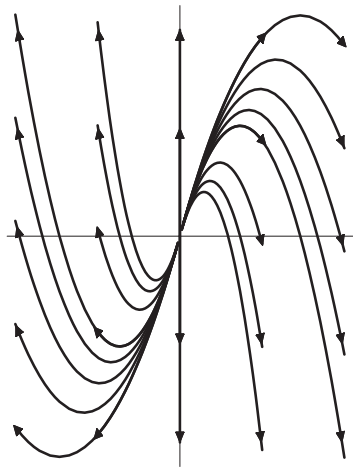
- *Stacionární bod o rovnice $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$ je asymptoticky stabilní, právě když $\Re \lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$.*

Věta 15.14

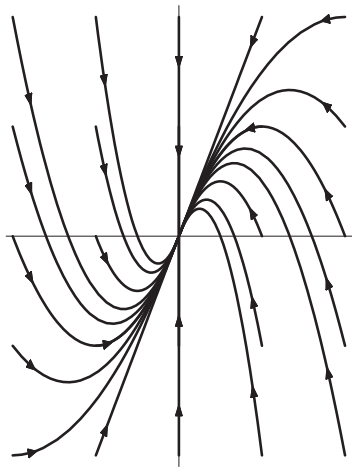
Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

- *Stacionární bod o rovnice $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$ je asymptoticky stabilní, právě když $\Re\lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$.*
- *Stacionární bod o rovnice $\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}$ je stabilní, právě když $\Re\lambda \leq 0$ pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ a pokud $\Re\lambda = 0$, pak násobnost λ je rovna $n - h(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$.*

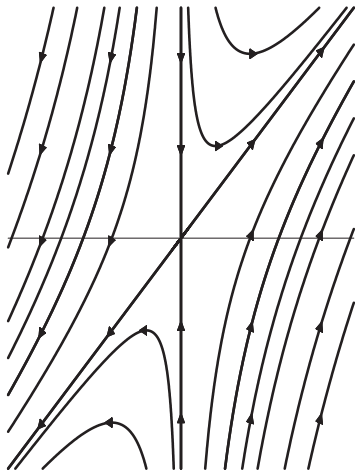
$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$$



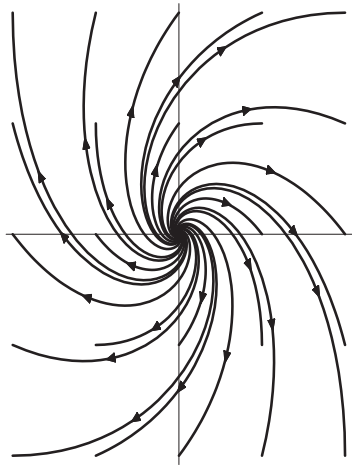
$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$$



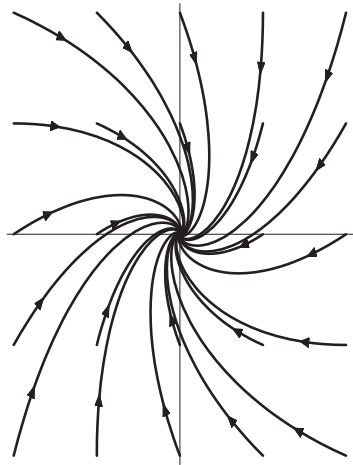
$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$



$$\lambda_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \Re \lambda_1 > 0$$



$$\lambda_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \Re \lambda_1 < 0$$



Věta 15.15 (Ljapunov)

*Nechť $\mathbf{f} \in C^1(G, \mathbf{R}^n)$ a $\mathbf{a}$ je stacionární bod rovnice (15.4).
Označme*

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{i=1..n, j=1..n}.$$

Pak platí:

- *Jestliže každé vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ má zápornou reálnou část, pak $\mathbf{a}$ je asymptoticky stabilní bod rovnice (15.4).*

Věta 15.15 (Ljapunov)

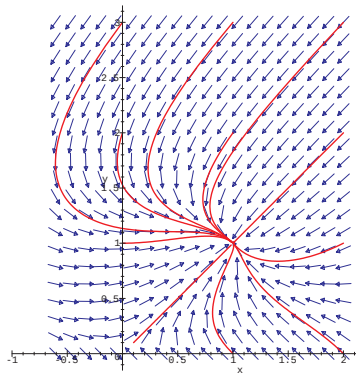
Nechť $\mathbf{f} \in C^1(G, \mathbf{R}^n)$ a $\mathbf{a}$ je stacionární bod rovnice (15.4).
Označme

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{i=1..n, j=1..n}.$$

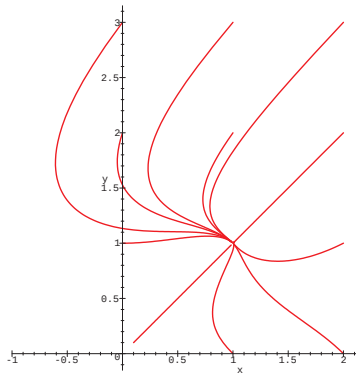
Pak platí:

- Jestliže každé vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ má zápornou reálnou část, pak $\mathbf{a}$ je asymptoticky stabilní bod rovnice (15.4).
- Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ má kladnou reálnou část, pak je $\mathbf{a}$ nestabilní bod rovnice (15.4).

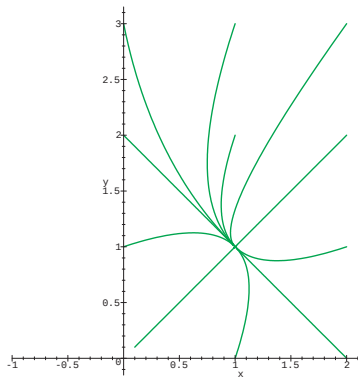
Použití Ljapunovovy věty



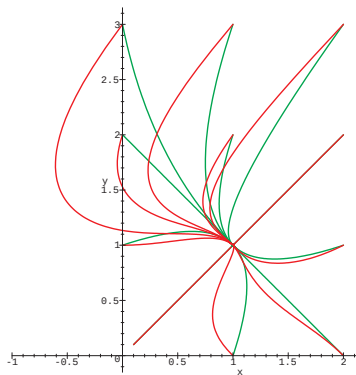
Použití Ljapunovovy věty



Použití Ljapunovovy věty



Použití Ljapunovovy věty



16. Miscelanea

16.1 Poznámka o variačním počtu

Definice

Nechť X je množina, $M \subset X$, $a \in M$ a F je reálná funkce definovaná alespoň na M . Řekneme, že a je **bod minima** (resp. **bod maxima**) funkce F na množině M , jestliže pro každé $x \in M$ platí $F(x) \geq F(a)$ (resp. $F(x) \leq F(a)$).

16.1 Poznámka o variačním počtu

Definice

Nechť X je množina, $M \subset X$, $a \in M$ a F je reálná funkce definovaná alespoň na M . Řekneme, že a je **bod minima** (resp. **bod maxima**) funkce F na množině M , jestliže pro každé $x \in M$ platí $F(x) \geq F(a)$ (resp. $F(x) \leq F(a)$).

Formulace základní úlohy variačního počtu (P1)

Dáno: $T \in \mathbf{R}$, $T > 0$; $A, Z \in \mathbf{R}$; $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$

16.1 Poznámka o variačním počtu

Definice

Nechť X je množina, $M \subset X$, $a \in M$ a F je reálná funkce definovaná alespoň na M . Řekneme, že a je **bod minima** (resp. **bod maxima**) funkce F na množině M , jestliže pro každé $x \in M$ platí $F(x) \geq F(a)$ (resp. $F(x) \leq F(a)$).

Formulace základní úlohy variačního počtu (P1)

Dáno: $T \in \mathbf{R}$, $T > 0$; $A, Z \in \mathbf{R}$; $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$

Hledáme takové $y \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T \rangle)$, $y(0) = A$, $y(T) = Z$, že hodnota

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s)) ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 16.1 (nutná podmínka pro extrém)

Nechť y je bodem extrému pro (P1). Pak y je řešením rovnice

$$(ER1) \quad F_y(t, y, y') = \frac{d}{dt} F_{y'}(t, y, y').$$

Isoperimetrická úloha

Formulace isoperimetrické úlohy (P2)

Dáno: $T \in \mathbf{R}, T > 0; A, Z \in \mathbf{R}; B \in \mathbf{R};$
 $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$

Isoperimetrická úloha

Formulace isoperimetrické úlohy (P2)

Dáno: $T \in \mathbf{R}$, $T > 0$; $A, Z \in \mathbf{R}$; $B \in \mathbf{R}$;
 $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$

Hledáme takové $y \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T \rangle)$ splňující $y(0) = A$,
 $y(T) = Z$,

$$\int_0^T G(t, y, y') = B,$$

že hodnota

$$V(y) = \int_0^T F(s, y(s), y'(s)) ds$$

je minimální (resp. maximální).

Věta 16.2

Nechť y je bodem extrému pro (P2). Pak y splňuje buď

$$G_y(t, y, y') = \frac{d}{dt} G_{y'}(t, y, y'), \quad (\text{I})$$

nebo existuje $\lambda \in \mathbf{R}$, že y splňuje

$$F_y(T, y(T), y'(T)) - \lambda G_y(T, y(T), y'(T)) = \frac{d}{dt} (F_{y'}(t, y, y') - \lambda G_{y'}(t, y, y')). \quad (\text{II})$$

Definice

Nechť X je vektorový prostor a $V: X \rightarrow \mathbf{R}$ je funkcionál.
Řekneme, že V je **konkávní** (resp. **konvexní**) na X ,
jestliže

$$\forall x, y \in X \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : V(tx + (1-t)y) \geq tV(x) + (1-t)V(y)$$

Definice

Nechť X je vektorový prostor a $V: X \rightarrow \mathbf{R}$ je funkcionál.
Řekneme, že V je **konkávní** (resp. **konvexní**) na X ,
jestliže

$$\forall x, y \in X \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : V(tx + (1-t)y) \geq tV(x) + (1-t)V(y)$$

(resp.

$$\forall x, y \in X \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : V(tx + (1-t)y) \leq tV(x) + (1-t)V(y)).$$

Věta 16.3

Necht' $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$.

(K) Necht' pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ je funkce $[y, y'] \mapsto F(t, y, y')$ konkávní.

Věta 16.3

Nechť $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$.

(K) Nechť pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ je funkce $[y, y'] \mapsto F(t, y, y')$ konkávní.

Pak je funkcionál $V: \mathcal{C}^1(\langle 0, T \rangle) \rightarrow \mathbf{R}$ definovaný předpisem

$$V: y \mapsto \int_0^T F(t, y, y') dt$$

konkávní.

Věta 16.4

Nechť F v $(P1)$ splňuje (K) . Pak je $(ER1)$ postačující podmínkou pro maximum.