Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (A)
LS 2003-2004, 19.5. 2004

Příklad A1: Najděte všechna maximální řešení rovnice.

$$y' = (1 + y^2)\,\mathrm{tg}\,x \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + xy = e^{-\frac{1}{2}x^2}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = x\cos x + \sin x. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A4: Najděte všechna maximální řešení rovnice, která jsou kladná na $\mathbf{R}$.

$$2y' = -3y + 6x^2y^{1/3} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A5: Najděte maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

vyhovující počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (10 bodů)

Výsledky

Příklad A1: $y(x) = \mathrm{tg}\left(\log\left(|\cos x|^{-1}\right) + c\right)$, $x \in (-\arccos e^{-\frac{\pi}{2}+c}, \arccos e^{-\frac{\pi}{2}+c}) + k\pi$ pro $c \in (-\pi/2, \pi/2)$; $x \in (-\arccos e^{-\frac{\pi}{2}+c}, -\arccos e^{\frac{\pi}{2}+c}) + k\pi$ a $x \in (\arccos e^{\frac{\pi}{2}+c}, \arccos e^{-\frac{\pi}{2}+c}) + k\pi$ pro $c \in (-\infty, -\pi/2\rangle$, kde $k \in \mathbf{Z}$

Příklad A2: $y(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2} + ke^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{R}$

Příklad A3: $y(x) = (-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})\cos x + (\frac{1}{4}x - \frac{1}{4})\sin x + c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Příklad A4: $y(x) = (2x^2 - 4x + 4 + ke^{-x})^{3/2}$, $x \in \mathbf{R}$, $k \geq 0$

Příklad A5: $\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} 4e^x - 3e^{2x} \\ 2e^x - 3e^{2x} \\ 2e^x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (B)
LS 2003-2004, 26.5. 2004

Příklad B1: Najděte všechna maximální řešení rovnice.

$$y' = y^3x^2 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + 3x^2y = e^{-x^3+x}\sin x. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 2y' + 2y = e^x\cos x + e^x\sin x. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B4: Najděte všechna maximální řešení rovnice.

$$2e^yx + y'e^y(x^2+1) = -1 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B5: Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y},$$

která jsou omezená na $\mathbf{R}$. (10 bodů)

Výsledky

Příklad B1: $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3-2c}}$, $x \in (-\infty, \sqrt[3]{-3c})$, $c \in \mathbf{R}$; $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x^3-2c}}$, $x \in (-\infty, \sqrt[3]{-3c})$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad B2: $y(x) = \frac{1}{2}e^{x-x^3}(\sin x - \cos x) + ke^{-x^3}$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{R}$

Příklad B3: $y(x) = \frac{1}{2}xe^x(\sin x - \cos x) + c_1e^x\sin x + c_2e^x\cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

Příklad B4: $y(x) = \log\frac{c-x}{x^2+1}$, $x \in (-\infty, c)$

Příklad B5: $\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} (b-c)\sin x + (b+c)\cos x \\ (-b+c)\sin x + (-b-c)\cos x \\ b\sin x + c\cos x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$, $b, c \in \mathbf{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (C)
LS 2003-2004, 9.6. 2004

Příklad C1: Najděte všechna maximální řešení rovnice.

$$y' = \frac{e^y}{x(1+x^2)} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{x^2}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' - 2y' + 2y = e^x + xe^{2x}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C4: Najděte všechna řešení rovnice definovaná na $(0, +\infty)$.

$$x^2y'' + 3xy' + y = x^2 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C5: Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y},$$

která jsou omezená na $\mathbf{R}$. (10 bodů)

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (D)
LS 2003-2004, 16.6. 2004

Příklad D1: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = y \log x. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$xy' - 2y = 2x^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D4: Najděte maximální řešení rovnice

$$y' + 2xy = 2x^3y^3 \qquad \text{(10 bodů)}$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$.

Příklad D5: Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky

Příklad D1: $y(x) = ce^{x \log x - x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad D2: $y(x) = \begin{cases} x^4 + k_1x^2, & x \in (-\infty, 0), \\ x^4 + k_2x^2, & x \in \langle 0, \infty), \end{cases}$ $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$

Příklad D3: $y(x) = \sin x \log|\sin x| - x\cos x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$, $x \in (0, \pi) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

Příklad D4: $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x^2}}}$, $x \in \mathbf{R}$

Příklad D5: $\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} c_2e^x + 2c_3xe^x \\ (-c_1 - 2c_3)e^x - c_2xe^x - c_3x^2e^x \\ c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (E)
LS 2003-2004, 23.6. 2004

Příklad E1: Najděte všechna maximální řešení rovnice.

$$y' = \sin y \cdot \cos x \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$(\sin x) \cdot y' + 2y = \sin^2 x \qquad \text{(10 bodů)}$$

na intervalu $(0, \pi)$.

Příklad E3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y^{(4)} - 5y''' + 6y'' = 1. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E4: Najděte řešení následující rovnice definované na $(-\pi/2, \pi/2)$ a splňující $y(0) = 1$.

$$-y^2 \sin x + e^x + (2y \cos x) \cdot y' = 0 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E5: Uvažujte soustavu (S)

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Určete všechny prvky $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^3$ takové, že maximální řešení soustavy (S) splňující $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$ je periodické. (10 bodů) (10 bodů)

Výsledky

Příklad E1: $y(x) = k\pi$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$; $y(x) = \arccos\left(\frac{1-e^{2\sin x+2c}}{1+e^{2\sin x+2c}}\right) + 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$; $y(x) = (2k+2)\pi - \arccos\left(\frac{1-e^{2\sin x+2c}}{1+e^{2\sin x+2c}}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$;

Příklad E2: $y(x) = (\cos x - 2\log(\cos x + 1))\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + k\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x \in (0, \pi)$

Příklad E3: $y(x) = \frac{1}{12}x^2 + c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$

Příklad E4: $y(x) = \sqrt{\frac{2-e^x}{\cos x}}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

Příklad E5: $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (F)
LS 2003-2004, 17.9. 2004

Příklad F1: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = x\sqrt{y} \qquad (10 \text{ bodů}).$$

Příklad F2: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 1. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + y' = x \sin x. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' = e^{x+y} - 1. \qquad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F5: Najděte všechna $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^3$ taková, že maximální řešení $\boldsymbol{y}$ počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$$

splňuje $\lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{y}(t)}{t} e^{-t} = \boldsymbol{o}$. (10 bodů)

Výsledky

Příklad F1: $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2$, $x \in \mathbf{R}$, $c > 0$;

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \sqrt{-2c}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (\sqrt{-2c}, +\infty), \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c}, \infty) \end{cases} \quad c \le 0;$$

$$y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_1)^2, & x \in (-\infty, -\sqrt{-2c_1}), \\ 0, & x \in \langle -\sqrt{-2c_1}, \sqrt{-2c_2}\rangle, \\ (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c_2)^2, & x \in (\sqrt{-2c_2}, \infty), \end{cases} \quad c_1 \le 0,\ c_2 \le 0;$$

Příklad F2: $y(x) = \left(\frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2} - x) - \frac{1}{8}(\sqrt{1+x^2} - x)^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F3: $y(x) = -\frac{3}{4}x\cos x - \frac{1}{4}x^2 \sin x + c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$

Příklad F4: $y(x) = -\log(-x-c) - x$, $x \in (-\infty, -c)$, $c \in \mathbf{R}$

Příklad F5: $\left\{ k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; k \in \mathbf{R} \right\}$