Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (A)
LS 2006-2007, 28. 5. 2007

Příklad A1: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 4^n$$

splňující počáteční podmínky $y(1) = 1$ a $y(2) = 1$.

Příklad A2: Najděte všechna maximální řešení rovnice.

$$y' = x^2 \sin(2y) \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad A3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + x^2 y = x^2. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad A4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + y'' - 2y' = \sin x + \cos x. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad A5: Najděte maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

vyhovující počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. (12 bodů)

Výsledky

Příklad A1: $y(n) = -\dfrac{4}{15}(-2)^n - \dfrac{1}{15}3^n + \dfrac{1}{6}4^n,\ n \in \mathbf{N}$

Příklad A2: $y(x) = k\pi$, $y(x) = \operatorname{arctg}(\exp(\frac{2}{3}x^3 + a)) + k\pi$, $y(x) = \operatorname{arctg}(-\exp(\frac{2}{3}x^3 + a)) + k\pi$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{R}$

Příklad A3: $y(x) = 1 + ae^{-\frac{1}{3}x^3}$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$

Příklad A4: $y(x) = \dfrac{1}{5}\cos x - \dfrac{2}{5}\sin x + a + be^x + ce^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$

Příklad A5: $y_1(t) = -te^t + e^t,\ y_2(t) = -te^t + e^t,\ y_3(t) = e^t$, $t \in \mathbf{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (B)
LS 2006-2007, 6. 6. 2007

Příklad B1: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+2) + 4y(n+1) + 3y(n) = n$$

splňující počáteční podmínky $y(1) = 1$ a $y(2) = -1$.

Příklad B2: Najděte všechna maximální řešení rovnice splňující podmínku $y(0) = 0$.

$$y' = \pi \frac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2}(1 + y^2). \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad B3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + y = 1 + 3x + x^2. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad B4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = xe^x. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad B5: Najděte maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

vyhovující počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (12 bodů)

Výsledky

Příklad B1: $y(n) = \frac{1}{8}n - \frac{3}{32} - \frac{7}{8}(-1)^n - \frac{1}{32}(-3)^n,\ n \in \mathbf{N}$

Příklad B2: $y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{-\pi x}{1+x^2}\right)$, $x \in (-1, 1)$

Příklad B3: $y(x) = x + x^2 + ke^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{R}$

Příklad B4: $y(x) = \frac{1}{6}xe^x - \frac{2}{9}e^x + a\sin x + b\cos x + ce^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$

Příklad B5: $y_1(t) = -t^2e^{2t} + te^{2t} + e^{2t},\ y_2(t) = -t^2e^{2t} + te^{2t} - e^{2t},\ y_3(t) = 2te^{2t} - e^{2t}$, $t \in \mathbf{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (C)
LS 2006-2007, 13. 6. 2007

Příklad C1: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+2) + 2y(n+1) + y(n) = 2^n,$$

splňující počáteční podmínky $y(1) = 1$ a $y(2) = 0$.

Příklad C2: Nalezněte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \sin x \sqrt[3]{y^2}, \qquad (12 \text{ bodů})$$

která jsou definována na intervalu $(0, 2\pi)$ splňující $y(\pi) = (2/3)^3$.

Příklad C3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{1}{x} y = 2e^{-x} - xe^{-x}. \qquad (12 \text{ bodů})$$

Příklad C4: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + 4y'' + y' - 6y = 10x \sin x. \qquad (12 \text{ bodů})$$

Příklad C5: Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

vyhovující počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. $\qquad$ (12 bodů)

Výsledky

Příklad C1: $y(n) = \frac{1}{9} 2^n - \frac{10}{9}(-1)^n + \frac{1}{3} n(-1)^n,\ n \in \mathbf{N}$

Příklad C2: $y(x) = \frac{1}{27}(1 - \cos x)^3$, $x \in (0, 2\pi)$

Příklad C3: $y(x) = xe^{-x} + k\frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$ nebo $x \in (-\infty, 0)$, $k \in \mathbf{R}$

Příklad C4: $y(x) = -\frac{4}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x - x \sin x + ae^x + be^{-2x} + ce^{-3x}$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$

Příklad C5: $y_1(t) = e^{-t},\ y_2(t) = -4e^{3t} - e^{-t} + 5e^t,\ y_3(t) = 2e^{3t} - e^{-t}$, $t \in \mathbf{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (D)
LS 2006-2007, 20. 6. 2007

Příklad D1: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+3) + y(n+2) - y(n+1) - y(n) = n2^n,$$

splňující počáteční podmínky $y(1) = 1$, $y(2) = 0$ a $y(3) = 1$.

Příklad D2: Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = x\sin(2y), \qquad \text{(12 bodů)}$$

splňující $y(0) = \pi/4$.

Příklad D3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + (\sin x)\cdot y = \sin x. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad D4: Nalezněte všechna $a, b, c \in \mathbf{R}$ taková, že maximální řešení rovnice

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = 0 \qquad \text{(12 bodů)}$$

s počáteční podmínkou $y(0) = a$, $y'(0) = b$ a $y''(0) = c$ je periodické.

Příklad D5: Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

vyhovující počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. (12 bodů)

Výsledky

Příklad D1: $y(n) = \frac{1}{9}n2^n - \frac{10}{27}2^n + 1 - \frac{17}{27}(-1)^n + \frac{1}{9}n(-1)^n,\ n \in \mathbf{N}$

Příklad D2: $y(x) = \operatorname{arctg} e^{x^2}$, $x \in \mathbf{R}$

Příklad D3: $y(x) = 1 + ke^{\cos x}$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{R}$

Příklad D4: $a = -c$

Příklad D5: $y_1(t) = -2e^t + 3,\ y_2(t) = -2e^t + 3,\ y_3(t) = e^t$, $t \in \mathbf{R}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (E)
LS 2006-2007, 5. 9. 2007

Příklad E1: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+3) + 2y(n+2) - y(n+1) - 2y(n) = 3^n$$

splňující počáteční podmínky $y(1) = 1$, $y(2) = 0$ a $y(3) = 1$. (12 bodů)

Příklad E2: Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = y^2 \operatorname{tg} x, \qquad (12 \text{ bodů})$$

splňující $y(0) = 1$.

Příklad E3: Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + x^3 \cdot y = 2x + x^5. \qquad (12 \text{ bodů})$$

Příklad E4: Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

$$y^{(4)} - y = x^2. \qquad (12 \text{ bodů})$$

Příklad E5: Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

vyhovující počáteční podmínce $\boldsymbol{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. (12 bodů)

Výsledky

Příklad E1: $y(n) = \frac{1}{4} - \frac{7}{8}(-1)^n + \frac{1}{10}(-2)^n + \frac{1}{40}3^n,\ n \in \mathbf{N}$

Příklad E2: $y(x) = \frac{1}{\log(\cos(x))+1}$, $x \in (-\arccos(1/e), \arccos(1/e))$

Příklad E3: $y(x) = x^2 + ke^{-\frac{1}{4}x^4}$, $x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{R}$

Příklad E4: $y(x) = -x^2 + c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$, $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$

Příklad E5: $y_1(x) = 2 - 3e^{2x},\ y_2(x) = 2 - e^{2x},\ y_3(x) = 6e^x - 4e^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$.