4. Taylorův polynom

1. Najděte hlavní část rozvoje k-tého řádu v bodě a pro funkce $f+g$, $f-g$, fg, f/g, g/f (pokud existují), jsou-li zadány hlavní části rozvoje funkcí f a g:

(1) $k=1$, $a=0$, f: x, g: $1+x$;
(2) $k=1$, $a=1$, f: $1-2(x-1)$, g: $1+(x-1)$;
(3) $k=2$, $a=3$, f: $7+(x-3)+\frac{1}{2}(x-3)^2$, g: $6(x-3)$;
(4) $k=3$, $a=-2$, f: $1+(x+2)^3$, g: $(x+2)-\frac{1}{2}(x+2)^2$.

2. Najděte hlavní část rozvoje k-tého řádu funkce $f\circ g$ v bodě a, je-li zadána hlavní část rozvoje funkce g v bodě a a funkce f v bodě $g(a)$:

(1) $k=1$, $a=1$, f: $1+(y-1)$, g: $1+(x-1)$;
(2) $k=1$, $a=1$, f: $2+(y-7)$, g: $7+(x-1)$;
(3) $k=2$, $a=0$, f: $(y-6)+3(x-6)^2$, g: $6+x+x^2$;
(4) $k=3$, $a=3$, f: $(y-2)$, g: $2+(x-3)^2+(x-3)^3$.

3. Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce:

- $\operatorname{tg} x$, $k=4$;
- $\cos(\sin x)$, $k=5$;
- $\sin(\sin x)$, $k=6$;
- $\sin(1-\cos x)$, $k=3$;
- $\operatorname{arctg} x$, $k\in\mathbf{N}$;
- $\arcsin x$, $k\in\mathbf{N}$.

4. Spočtěte limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3},\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}\ (a>0),\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right),\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right).$$

5. Pro každou z následujících limit najděte $n\in\mathbb{N}$ takové, aby limita byla konečná a různá od nuly.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)}{x^n},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^n},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\operatorname{tg} x)}{x^n},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}.$$

6.1. Najděte $a,b\in\mathbf{R}$, aby

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^4}=0.$$

6.2. Najděte $a,b\in\mathbf{R}$, aby

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg} x}{x^4}=0$$

a spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg} x}{x^5}.$$

7. Pomocí Taylorových polynomů řešte následující úlohy.

a) Spočtěte e^2 s chybou menší než 10^{-4}.
b) Spočtěte $\log 1.1$ s chybou menší než 10^{-4}.
c) Spočtěte $\sqrt{5}$ s chybou menší než 10^{-3}.
d) Spočtěte $\sqrt[3]{1.01}$ s chybou menší než 10^{-8}.
e) Kolik členů Taylorova polynomu funkce cos v 0 stačí vzít, aby pro každé $x \in (-0.5, 0.5)$ byla chyba menší než 10^{-3}?

Výsledky

3.1 $x + \frac{1}{3}x^3$ **3.2** $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$ **3.3** $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$ **3.4** $\frac{1}{2}x^2$ **3.5** $T^0_{2k-1}(x) = T^0_{2k}(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}x^{2j-1}$ **3.6** $T^0_{2k-1}(x) = T^0_{2k}(x) = \sum_{j=1}^{k} \binom{-1/2}{j-1}\frac{x^{2j-1}}{2j-1}$ **4.1** $-\frac{1}{12}$ **4.2** $\frac{1}{3}$ **4.3** $\frac{1}{3}$ **4.4** $-\frac{1}{4}$ **4.5** $\log^2 a$ **4.6** 0 **4.7** $\frac{1}{2}$ **4.8** $\frac{1}{3}$ **4.9** $\frac{1}{6}$

5. $n = 7$, limita je $\frac{1}{30}$; $n = 2$, limita je 1; $n = 4$, limita je $\frac{1}{3}$; $n = 1$, limita je $\frac{e}{2}$.

6.1 $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ **6.2** $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, limita vyjde $-\frac{1}{20}$