3. Bilineární formy

1. K následujícím bilineárním formám napište odpovídající reprezentující matice.

(i) $B : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $B(u,v) = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 - u_2v_2$

(ii) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(u,v) = u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 - u_2v_2$

(iii) $B : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $B(u,v) = u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_1 - u_2v_2 + u_3v_2 - u_3v_3$

2. Převeďte následující matice na diagonální a určete, zda jsou PD, ND, PSD, NSD nebo ID.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 & -3 \\ -4 & -6 & 5 & -6 \\ 4 & 5 & -6 & 2 \\ -3 & -6 & 2 & -11 \end{pmatrix}$$

Výsledky

2. ID, ID, PSD, PD, PD, ID, ND, NSD

Vlastní čísla

Najděte vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory pro matice

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} -23 & 21 & 3 & -17 \\ -40 & 35 & 4 & -31 \\ 58 & -50 & -5 & 47 \\ -8 & 6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Výsledky

Výsledky jsou uvedeny ve formátu: (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů))

1. $(1, 1, \{t \cdot [1,2] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(2, 1, \{t \cdot [1,1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$.

2. $(6, 1, \{t \cdot [2,1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(-5, 1, \{t \cdot [3,-4] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$.

3. $(1+i, 1, \{t \cdot [1,i] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(1-i, 1, \{t \cdot [1,-i] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$.

4. $(3, 2, \{t \cdot [1,1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$,

5. $(1, 1, \{t \cdot [1,1,1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(2, 1, \{t \cdot [1,2,1] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(3, 1, \{t \cdot [1,1,2] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$.

6. $(1, 1, \{t \cdot [1,1,2] : t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\})$, $(3, 2, \{t \cdot [1,0,1] + s \cdot [0,1,0] : [s,t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0,0]\}\})$.

7. $(1,1,\{t\cdot[1,1,2] : t\in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(3,2,\{t\cdot[1,2,1] : t\in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$.

8. $(0,3,\{t\cdot[1,3,0]+s\cdot[0,-1,1] : [s,t]\in \mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$.

9. $(0,3,\{t\cdot[1,1,2] : t\in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$.

10. $(1,3,\{t\cdot[1,1,1] : t\in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$.

11. $(i,2,\{t\cdot[3,4,-5+i,0]+s\cdot[-7-i,0,-8-10i,8] : [s,t]\in \mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$, $(-i,2,\{t\cdot[3,4,-5-i,0]+s\cdot[-7+i,0,-8+10i,8] : [s,t]\in \mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$.