

URČITÝ INTEGRÁL

Spočtěte následující určité integrály.

- | | |
|---|--|
| <p>1. $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx$</p> <p>3. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$</p> <p>5. $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx$</p> <p>7. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x-2}$</p> | <p>2. $\int_0^\pi (x \sin x)^2 dx$</p> <p>4. $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x}$</p> <p>6. $\int_0^2 1-x dx$</p> <p>8. $\int_0^{8\pi} \frac{dx}{1+\alpha \cos x}, \quad 0 < \alpha < 1$</p> |
|---|--|

9. Pomocí poznatků o Riemannově integrálu dokažte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

10. Spočtěte objem koule a kužele.
11. Spočtěte povrch koule a kužele.
12. Vyjádřete parametricky asteroidu, tj. množinu všech bodů $[x, y] \in \mathbf{R}^2$ splňujících $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$, a vypočtěte její délku.
13. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = \frac{2}{1+x^2}$, $y = x^2$.
14. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2 - 6x + 8$, $y = -4x + 7$, $y = 2x - 8$.
15. Vypočítejte délku křivky, která je grafem funkce $f(x) = \log(\cos x)$ pro $x \in \langle 0, \pi/6 \rangle$.
16. Vypočítejte délku křivky dané parametrickým vyjádřením $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$.
17. Vypočítejte obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = x^2/2$, $x \in \langle 0, 3/4 \rangle$ kolem osy x .
18. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ležícího v rovině x, y kolem osy x . Obrazec je ohraničen křivkami, jejichž rovnice jsou $x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1$ a $y^2 - x^2 = 1$.

VÝSLEDKY A NÁVODY

Výsledky k úlohám na primitivní funkce jsou uváděny bez aditivních konstant.

- | | | | | |
|---|---|-----------------------------|--|---------------------------------------|
| 1. $1 - \frac{9}{5} \log 3 + \frac{17}{10} \log 2 + \pi/10$ | 2. $\pi^3/6 - \pi/4$ | 3. $\pi/2\sqrt{2}$ | 4. $\pi/\sqrt{2}$ | 5. $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$ |
| 6. 1 | 7. $-\frac{2}{3} \log 2 + \frac{1}{3} \log 5$ | 8. $8\pi/\sqrt{1-\alpha^2}$ | 12. $6a$ | 13. $\pi - \frac{2}{3}$ |
| 14. $9/4$ | 15. $\frac{1}{2} \log 3$ | 16. $2a\pi^2$ | 17. $\frac{\pi}{16} (\frac{255}{64} - 2 \log 2)$ | 18. $\frac{4}{3} \pi (3\sqrt{3} - 2)$ |