Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (A)
ZS 2002-2003

Příklad A1: Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -6 \\ -4 & -6 & -7 & -8 \\ -5 & -7 & -9 & -10 \\ -6 & -8 & -10 & -12 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad A2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(12 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Příklad A3: Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

(12 bodů)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x \log(1 + x^2)}$$

Příklad A4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(12 bodů)
$$f(x, y) = x^3 + y^3 - xy^2 + x^2, \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad A5: Najděte řešení diferenční rovnice s počáteční podmínkou

(12 bodů)
$$y(n + 2) + y(n + 1) + y(n) = 2n - 7, \qquad y(1) = y(2) = 0.$$

Test A – výsledky

Příklad A1: NSD, nikoli ND, -54

Příklad A2: Vlastní číslo -2 násobnosti 1, vlastní vektory $t \cdot [1, 0, 3]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, vlastní číslo -1 násobosti 2, vlastní vektory $t \cdot [1, 1, 2]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; NE.

Příklad A3: $-1/6$

Příklad A4: Ostré lokální maximum v bodě $[-\frac{18}{23}, -\frac{12}{23}]$. (Sedlové body $[0, 0]$ a $[-\frac{2}{3}, 0]$.

Příklad A5: $y(n) = \frac{2}{3}n - 3 - 4\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\sin\frac{2n\pi}{3}$

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (B)
ZS 2002-2003

Příklad B1: Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 9 \\ 6 & 10 & 9 & 14 \\ 6 & 9 & 10 & 13 \\ 9 & 14 & 13 & 21 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad B2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(12 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 3 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad B3: Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

(12 bodů)
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - x \sin x - 1}{e^{x^4} - 1}$$

Příklad B4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(12 bodů)
$$f(x, y) = e^x (x^2 - y^2 + xy), \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad B5: Najděte řešení diferenční rovnice s počáteční podmínkou

(12 bodů)
$$y(n+3) - 8y(n) = n, \qquad y(1) = y(2) = y(3) = 0.$$

Test B – výsledky

Příklad B1: PD, 190

Příklad B2: Vlastní číslo -1 násobnosti 1, vlastní vektory $t \cdot [1,1,1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, vlastní číslo 2 násobosti 1, vlastní vektory $t \cdot [1,1,2]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, vlastní číslo -2 násobosti 1, vlastní vektory $t \cdot [1,2,1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; ANO.

Příklad B3: 2/3

Příklad B4: Ostré lokální maximum v bodě $[-2,-1]$. (Sedlový bod $[0,0]$).

Příklad B5: $y(n) = -\frac{1}{7}n - \frac{3}{49} + \frac{1}{49} \cdot 2^n \left(\frac{49}{12} - \frac{13}{12} \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \frac{2n\pi}{3}\right)$

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (C)
ZS 2002-2003

Příklad C1: Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 10 & 12 \\ 8 & 6 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad C2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(12 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 9 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Příklad C3: Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

(12 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos x + e^{-x} - 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}{\sin^3 x}.$$

Příklad C4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(12 bodů)
$$f(x,y) = x^2 + \sin(x-y) - \cos(x-y), \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad C5: Najděte řešení diferenční rovnice s počáteční podmínkou

(12 bodů)
$$y(n+2) + y(n+1) - y(n) = 1, \qquad y(1) = y(2) = 0.$$

Test C – výsledky

Příklad C1: ID, 0.

Příklad C2: Vlastní číslo -1 násobnosti 1, vlastní vektory $t \cdot [1, 3/2, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, vlastní číslo -2 násobosti 2, vlastní vektory $t \cdot [0,-1,1] + s \cdot [1,3,0]$, $[s,t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0,0]\}$; ANO.

Příklad C3: $-5/6$

Příklad C4: Ostré lokální minimum v bodech $[0, \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$ pro $k \in \mathbf{Z}$. (Sedlové body $[0, \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi]$ pro $k \in \mathbf{Z}$.

Příklad C5: $y(n) = 1 - \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (D)
ZS 2002-2003

Příklad D1: Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 10 \\ 5 & 4 & 7 & 11 \\ 9 & 10 & 11 & 21 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad D2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(12 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad D3: Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

(12 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+\sin x) + 2\log\cos x}{x^3}$$

Příklad D4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(12 bodů)
$$f(x,y) = 9\log(x^2+y^2+1) - 2xy, \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad D5: Najděte řešení diferenční rovnice s počáteční podmínkou

(12 bodů)
$$y(n+2) + 6y(n+1) - 7y(n) = 16, \qquad y(1) = y(2) = 0.$$

Test D – výsledky

Příklad D1: ID, -1.

Příklad D2: Vlastní číslo 1 násobnosti 3, vlastní vektory $t \cdot [1,1,1]$; NE.

Příklad D3: $-1/2$

Příklad D4: Ostré lokální minimum v bodě $[0,0]$. (Sedlové body $[-2,-2]$ a $[2,2]$.

Příklad D5: $y(n) = 2n - \frac{1}{28}\cdot(-7)^n - \frac{9}{4}$

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (E)
ZS 2002-2003

Příklad E1: Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -12 & -10 & -14 \\ 3 & -10 & -9 & -11 \\ 1 & -14 & -11 & -17 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad E2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(12 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ -10 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad E3: Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

(12 bodů)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{\cos x - 1} + \frac{2}{x}$$

Příklad E4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(12 bodů)
$$f(x,y) = 4 \operatorname{arctg}(x - y^2) - x^2, \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad E5: Najděte řešení diferenční rovnice s počáteční podmínkou

(12 bodů)
$$y(n+2) - \frac{1}{2}y(n+1) - \frac{1}{2}y(n) = -1, \qquad y(1) = y(2) = 0.$$

Test E – výsledky

Příklad E1: NSD, nikoli ND, -2

Příklad E2: Vlastní číslo -2 násobnosti 1, vlastní vektory $t \cdot [1, 4, -1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, vlastní číslo 1 násobosti 2, vlastní vektory $t \cdot [1, 1, 2]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; NE.

Příklad E3: 1

Příklad E4: Ostré lokální maximum v bodě $[1, 0]$.

Příklad E5: $y(n) = -\frac{2}{3}n + \frac{10}{9} + \frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (VZOR)
ZS 2002-2003

Příklad V1: Nechť B je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad V2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(12 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 4 \\ -11 & 5 & 5 \\ -10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad V3: Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

(12 bodů)
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{e^{\sin^3 x} - 1}$$

Příklad V4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(12 bodů)
$$f(x, y) = e^x(\sin(x+y) + \cos(x-y)), \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad V5: Najděte řešení diferenční rovnice s počáteční podmínkou

(12 bodů)
$$y(n+2) + 3y(n+1) + 9y(n) = 13n^2 + 3, \qquad y(1) = y(2) = 0.$$

Test V – výsledky

Příklad V1: Indefinitní, 24.

Příklad V2: Vlastní číslo -1 násobnosti 1, vlastní vektory $t \cdot [1, 1, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, vlastní číslo 2 násobosti 2, vlastní vektory $t \cdot [1, 2, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; NE.

Příklad V3: $-1/3$

Příklad V4: Ostrá lokální maxima v bodech $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2l\pi]$, $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2l\pi]$, ostrá lokální minima v bodech $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2l\pi]$, $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2l\pi]$, $k, l \in \mathbf{Z}$. Dále nekonečně mnoho sedlových bodů.

Příklad V5: $y(n) = n^2 - \frac{10}{13}n - \frac{2}{169} + 3^n\left(\frac{175}{507}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{101}{1521}\sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$