# Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)
## LS 2006-07, 24.1. 2007

**Příklad A1:** Spočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{x+7}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

**Příklad A2:** Nechť $B$ je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici $\mathbb{A}$ na diagonální tvar a určete, zda forma $B$ je PD, ND, PSD, NSD či ID. Spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

**Příklad A3:** Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z $\mathbf{R}^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice $\mathbb{B}$?

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(12 bodů)}$$

**Příklad A4:** Napište Taylorovy polynomy třetího řádu funkce $f(x) = (x^2+1)^x - 1$ a $g(x) = x^3 + x^4 + x^5$ v bodě 0. Pomocí nich pak spočtěte limitu $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$. (12 bodů)

**Příklad A5:** Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f$ v množině $M$, kde

$$f(x,y) = \sin x \cos y, \quad M = \mathbf{R}^2 \qquad \text{(12 bodů)}$$

# Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)
## ZS 2006-07, 30.1. 2007

**Příklad B1:** Spočtěte primitivní funkci k funkci

$$\frac{x^4+2}{(x^2+3)^2}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

**Příklad B2:** Nechť $B$ je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici $\mathbb{A}$ na diagonální tvar a určete, zda forma $B$ je PD, ND, PSD, NSD či ID. Spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

**Příklad B3:** Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z $\mathbf{R}^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice $\mathbb{B}$?

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(12 bodů)}$$

**Příklad B4:** Napište Taylorův polynom desátého řádu funkce $f(x) = (1+x^4)^{1/5}$ v bodě 0 a s jeho pomocí pak spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^4)^{1/5} - 1 - \frac{1}{5}x^4}{x^8}.$$

(12 bodů)

**Příklad B5:** Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f$ v množině $M$, kde

$$f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + z^2 + 3x^2z, \quad M = (0,+\infty) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

# Výsledky testu (B)

**Příklad B1:**

$$x + \frac{11}{6}\frac{x}{x^2+3} - \frac{25}{18}\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}(x/\sqrt{3}), \qquad x \in \mathbf{R}$$

**Příklad B2:** Matice je indefinitní, 0.

**Příklad B3:** Vlastní číslo 1; vlastní vektory: $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

**Příklad B4:** $1 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{2}{25}x^8$, $-2/25$

**Příklad B5:** Funkce nemá na $M$ lokální extrém.

# Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)
## ZS 2006-07, 7.2. 2007

---

**Příklad C1:** Spočtěte primitivní funkci na intervalu $(0, \pi/2)$ k funkci
$$\frac{2\sin y - \cos y}{\cos^3 y + \sin y - \sin y \cos^2 y}. \qquad (12 \text{ bodů})$$

**Příklad C2:** Nechť $B$ je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Převeďte matici $\mathbb{A}$ na diagonální tvar a určete, zda forma $B$ je PD, ND, PSD, NSD či ID. Spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

**Příklad C3:** Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z $\mathbf{R}^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice $\mathbb{B}$?
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \qquad (12 \text{ bodů})$$

**Příklad C4:** Napište Taylorův polynom devátého řádu funkce $f(x) = \log(\cos(x^3) + x^4)$ v bodě 0 a s jeho pomocí pak spočtěte limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x^3) + x^4) - x^4}{x^6}.$$
(12 bodů)

**Příklad C5:** Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f$ v $\mathbf{R}^2$, kde
$$f(x, y) = x \sin y + y. \qquad (12 \text{ bodů})$$

# Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)
## ZS 2006-07, 14.2. 2007

**Příklad D1:** Spočtěte primitivní funkci k funkci

$$x \log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

**Příklad D2:** Nechť $B$ je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 10 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici $\mathbb{A}$ na diagonální tvar a určete, zda forma $B$ je PD, ND, PSD, NSD či ID. Spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

**Příklad D3:** Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z $\mathbf{R}^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice $\mathbb{B}$?

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

**Příklad D4:** Napište Taylorův polynom devátého řádu funkce $f(x) = \exp(\sin(x^3)) - \cos(x^2)$ v bodě 0 a s jeho pomocí pak spočtěte limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(\sin(x^3)) - \cos(x^2) - x^3}{x^4}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

**Příklad D5:** Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f$ v $\mathbf{R}^2$, kde

$$f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2. \qquad \text{(12 bodů)}$$

# Výsledky testu (D)

**Příklad D1:**

$$\frac{1}{2}x^2 \log\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 - \log(2 - x^2), \qquad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

**Příklad D2:** Matice je pozitivně definitní, 2.

**Příklad D3:** Vlastní číslo 1; vlastní vektory: $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; vlastní číslo 2; vlastní vektory: $t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; vlastní číslo 3; vlastní vektory: $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vlastní vektory $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tvoří bázi $\mathbf{R}^3$ a každý vektor z $\mathbf{R}^3$ lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů.

**Příklad D4:** $x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{24}x^8$, $1/2$

**Příklad D5:** Funkce má v bodě $[4, 4]$ lokální maximum.

# Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)
## ZS 2006-07, 2.3. 2007

---

**Příklad E1:** Spočtěte určitý integrál

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}.$$

**Příklad E2:** Nechť $B$ je bilineární forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 10 & -6 & -5 \\ 2 & -6 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Převeďte matici $\mathbb{A}$ na diagonální tvar a určete, zda forma $B$ je PD, ND, PSD, NSD či ID. Spočtěte $B\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

**Příklad E3:** Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Lze každý vektor z $\mathbf{R}^3$ vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních vektorů matice $\mathbb{B}$?

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

**Příklad E4:** Napište Taylorův polynom pátého řádu funkce

$$f(x) = \cos(\sin(x) + \exp(x) - 1)$$

v bodě 0 a s jeho pomocí pak spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x) + \exp(x) - 1) - 1 + 2x^2 + x^3}{x^4}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

**Příklad E5:** Nalezněte všechny lokální extrémy funkce $f$ v $\mathbf{R}^2$, kde

$$f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}. \qquad \text{(12 bodů)}$$