5. Číselné řady

1. Zjistěte, zda konvergují (divergují) řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}.$$

2. Zjistěte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+5}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}.$$

3. Určete pro která $z \in \mathbf{R}$ následující řady konvergují

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\,!}z^n\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z^n\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}z^n\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}\,,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

4. Vyšetřete konvergenci následujících řad.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2^{n^2}},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1),\qquad \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{3}{2^n-2n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}),\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+4^n}{4^n+5^n},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}.$$

Výsledky

1. diverguje, konverguje, diverguje, konverguje, konverguje, konverguje, konverguje

2. konverguje, konverguje, diverguje, konverguje

3. $(-1,1)$, $\mathbf{R}$, $\langle -1/2, 1/2\rangle$, $(-3,3)$, $(-1,1\rangle$, $\langle -1,1\rangle$, $\langle -1,1)$

4.1. Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

4.2. Použijeme Lebnizova kritéria. Ověřme jeho předpoklady:

(1) řada má požadovaný tvar,
(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{3} - 1) = 0$,
(3) $\forall n \in \mathbf{N}: \ \sqrt[n]{3} - 1 \geq \sqrt[n+1]{3} - 1$ (lze snadno odvodit ze zřejmé nerovnosti $3^{n+1} \geq 3^n$, $n \in \mathbf{N}$).

Řada tedy konverguje.

4.3. Pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ platí $2^n > 2n$ a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n - 2n},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{2^{n+1}-2(n+1)}}{\frac{3}{2^n-2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

4.4. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $n \leq 2^n \leq 3^n$ a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}+(-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}\right)}{\frac{2^n}{3^n}\left(\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{3^{n+1}}}}{\frac{1+(-1)^n\frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n\frac{n}{3^n}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1$, $k \in \mathbf{N}$;
(2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.

Z (1) a (2) vyplývá:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} = 0.$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

4.5. Označme $a_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbf{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

4.6. Funkce arctg je ve svém definičním oboru rostoucí a proto

$$\forall n \in \mathbf{N}: \ 0 < \operatorname{arctg} 1 \le \operatorname{arctg} n$$

a také

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbf{N}: \ 0 < \frac{\operatorname{arctg} 1}{n} \le \frac{\operatorname{arctg} n}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje a proto diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 1}{n}$. Odtud, z $(\star)$ a ze srovnávacího kritéria dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ diverguje.

4.7. Použijeme Leibnizova kritéria:

- řada má požadovaný tvar, neboť $\cos(n\pi) = (-1)^n, \ n \in \mathbf{N}$ a
$$c_n = \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} > 0;$$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{7}{n}}}{\sqrt{n+1}} = 0$ (použili jsme větu o aritmetice limit a také spojitost odmocniny);
- nerovnost $c_n \ge c_{n+1}, \ n \in \mathbf{N}$, je ekvivalentní s nerovností $(n+7)(n+2) \ge (n+8)n, \ n \in \mathbb{N}$; poslední nerovnost platí, jak se lze snadno přesvědčit po roznásobení.

Naše řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria.

4.8. Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

4.9. Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{4^{n+1}+5^{n+1}} \cdot \frac{4^n+5^n}{3^n+4^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n}+4}{\frac{4^{n+1}}{5^n}+5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n}+1}{\frac{3^n}{4^n}+1} = \frac{4}{5} < 1. \end{aligned}$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

4.10. Platí následující odhad:

$$\forall n \in \mathbf{N}: \ \left|(-1)^n \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Zkoumaná řada je absolutně konvergentní a tedy konvergentní – toto plyne ze srovnávacího kritéria a faktu, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ je konvergentní.