

## 4. Lineární algebra

1. Řešte soustavu:

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 1 \\2x + 3y &= 1 \\-y + z &= 1\end{aligned}$$

pomocí Gaussovy eliminace a pak pomocí inverzní matice.

2. Řešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -5 \\2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\7x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 15 \\x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3\end{aligned}$$

a spočtěte determinant soustavy.

3. Určete hodnotu matice v závislosti na parametru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & 2 & a \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Spočtěte následující determinanty

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}.$$

5. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x + y + 2u + 3v &= 1 \\3x + 4y + u + v &= 1 \\2x + 2u + 4v &= 1 \\2x + 5y + u &= 1.\end{aligned}$$

6. K následujícím maticím nalezněte inverzní (pokud existují).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. V závislosti na parametru určete hodnotu a hodnotu determinantu následujících matic.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & a & -2 \\ 1 & a & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

8. V závislosti na parametru určete hodnotu následující matice.

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & a & -2 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

9. Řešte (v závislosti na parametru) následující soustavy lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= -3 \\ x_1 - 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1 \\ ax_1 + ax_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

## Výsledky úloh

1.  $x = 5, y = -3, z = -2$
  2.  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 0, \det A = -60$
  3.  $h(A) = 4$ , pokud  $a \neq 1$ ;  $h(A) = 3$ , pokud  $a = 1$
  4.  $A = 0, B = -29.400.000$
  5.  $x = 1/6 - t, y = t, u = 2/3 - 3t, v = -1/6 + 2t, t \in \mathbf{R}$
- 6.1-4.**

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{inverzní matice neexistuje} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -5/4 & 1/4 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/16 & -1/16 & 5/16 & 3/16 & -3/16 \\ 5/8 & -5/8 & 1/8 & -1/8 & 9/8 \\ 3/8 & -3/8 & -1/8 & 1/8 & 7/8 \\ 5/16 & 11/16 & -7/16 & -1/16 & -15/16 \end{pmatrix}$$

- 7.1.  $h(A) = 4$ , pokud  $a \neq 7/6$ ;  $h(A) = 3$ , pokud  $a = 7/6$ ;  $\det A = -6a + 7$
- 7.2.  $h(A) = 4$ , pokud  $a \neq \pm\sqrt{2}$ ;  $h(A) = 3$ , pokud  $a \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ ;  $\det A = a^2 - 2$
8.  $h(A) = 3$
- 9.1.  $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = 2$
- 9.2.  $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -3$
- 9.3. Pokud  $a \neq -3/2$ , pak  $x_1 = -2a/(3 + 2a), x_2 = (a - 3)/(3 + 2a), x_3 = -3/(3 + 2a), x_4 = -a/(3 + 2a)$ ; pokud  $a = -3/2$  soustava nemá řešení.
- 9.4. Pokud  $a \neq 1$ , pak  $x_1 = \frac{5a + 12}{6(a - 1)}, x_2 = -\frac{5a + 6}{6(a - 1)}, x_3 = -\frac{a + 6}{2(a - 1)}, x_4 = \frac{a}{2(a - 1)}$ ; pokud  $a = 1$ , pak soustava nemá řešení.