EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

ÚLOHY ŘEŠITELNÉ BEZ VĚTY O MULTIPLIKÁTORECH

Nalezněte absolutní extrémy funkce f na množině M.

1.* $f(x,y) = x + y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$

2. $f(x,y) = e^x;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + 2y^2 \le 1\}$

3.* $f(x,y) = x^2 + y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$

4.* $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z;\ M = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$

5. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z;\ M = \mathbf{R}^3$

6. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)};\ M = \mathbf{R}^2$

7. $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},\ a > 0, b > 0;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$

8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\};\ a > b > c > 0$

9. $f(x,y) = (x+y)e^{-2x-3y};\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2; x \ge 0, y \ge 0\}$

10. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^3$ tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

ÚLOHY NA VĚTU O LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORECH

Nalezněte maxima a minima funkce f na množině M.

11.* $f(x,y) = x + y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \ge 0, y \ge 0\}$

12.* $f(x,y,z) = xyz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

13.* $f(x,y,z) = xyz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}$

14. $f(x,y,z) = xyz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x + y + z \ge 0\}$

15. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$

16. $f(x,y,z) = xy^2z^3;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x + 2y + 3z = a, x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$; kde $a > 0$

17. $f(x,y) = y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$

18. $f(x,y) = x^2 + y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ 4y^3 - 4y + x^2 = 0,\ y \ge 0\}$

19. $f(x,y) = x^4y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^4 + y^4 \le 16, x \ge -1\}$

20. $f(x,y) = 2x + 4y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \le 1, x \ge 0,\ y \ge 0\}$

21. $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2);\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1, |z| \le 1\}$

22. $f(x,y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 4, x \le 0\}$

23. $f(x,y,z) = xy + yz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$

24. $f(x,y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)};\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + 4y^2 \le 1\}$

25. $f(x,y,z) = z + e^{xy};\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 = z^2\}$

26. $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$

27. $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\}$

VÝSLEDKY

1. Maximum: $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, minimum: $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. **2.** Maximum: $[1,0]$, minimum: $[-1,0]$. **3.** Maximum: $[0,1],\ [1,0]$, minimum: $[0,0]$. **4.** Maximum: $[1,1,1],\ [1,-1,1],\ [-1,1,1],\ [-1,-1,1]$; minimum: $[0,0,-1]$. **5.** Maxima se nenabývá; minimum: $[-1,-2,3]$. **6.** Maximum se nabývá v každém bodě jednotkové kružnice; minimum: $[0,0]$. **7.** Maximum:

$[a/\sqrt{a^2+b^2}, b/\sqrt{a^2+b^2}]$; minimum: $[-a/\sqrt{a^2+b^2}, -b/\sqrt{a^2+b^2}]$. **8.** Maximum: $[a,0,0]$, $[-a,0,0]$; minimum: $[0,0,0]$. **9.** Maximum: $[1/2, 0]$; minimum: $[0,0]$ **10.** Dno nádrže bude čtverec $4m \times 4m$ a hloubka nádrže bude $2m.$ **11.** Maximum: $[1,1]$, minimum: $[0,0]$ **12.** Maximum: $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$; minimum: $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$.

13. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, nabývá tedy na M maxima a minima. Použijeme Lagrangeovu větu o multiplikátorech. Položme $G = \mathbf{R}^3$,

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z.$$

Funkce f, g_1 a g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(G)$. Vypočítejme příslušné parciální derivace.

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = yz, & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xz, & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy, \\
\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, & \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, \\
\dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, & \dfrac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1.
\end{array}$$

Vektory $[2x, 2y, 2z]$ a $[1,1,1]$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když platí $x = y = z$. Žádný bod s touto vlastností ovšem neleží v množině M, neboť pro bod $[x,x,x]$ by muselo současně platit $g_1(x,x,x) = 3x^2 - 1 = 0$ i $g_2(x,x,x) = 3x = 0$, což nelze. Je tedy třeba vyřešit tuto nelineární soustavu:

$$\begin{aligned}
yz + \lambda_1 2x + \lambda_2 &= 0, && (1)\\
xz + \lambda_1 2y + \lambda_2 &= 0, && (2)\\
xy + \lambda_1 2z + \lambda_2 &= 0, && (3)\\
x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0, && (4)\\
x + y + z &= 0. && (5)
\end{aligned}$$

Odečtením (2) od (1) dostaneme:

$$-z(x-y) + 2\lambda_1(x-y) = 0. \tag{6}$$

Odtud plyne, že musí být $z = 2\lambda_1$ nebo $x = y$. Podobně odečtením (3) od (2) dostaneme:

$$-x(y-z) + 2\lambda_1(y-z) = 0. \tag{7}$$

Toto dává $x = 2\lambda_1$ nebo $y = z$. Ze vztahů (6) a (7) tedy vyplývá, že musí být buď $x = y$, nebo $y = z$, nebo $x = z$. Podívejme se nejprve na první případ, kdy $x = y$. Z (5) máme $z = -2x$ a (4) pak dává $6x^2 = 1$, tj. $x = 1/\sqrt{6}$ nebo $x = -1/\sqrt{6}$. K těmto bodům lze skutečně dopočítat příslušná y, z, λ_1 a λ_2. Případy $y = z$ a $z = x$ vyřešíme obdobně. Obdržíme tyto podezřelé body:

$$\left[\tfrac{2}{\sqrt6}, -\tfrac{1}{\sqrt6}, -\tfrac{1}{\sqrt6}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{2}{\sqrt6}, -\tfrac{1}{\sqrt6}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt6}, -\tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{2}{\sqrt6}\right],$$
$$\left[-\tfrac{2}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt6}, -\tfrac{2}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt6}, \tfrac{1}{\sqrt6}, -\tfrac{2}{\sqrt6}\right].$$

Výpočtem hodnot funkce f v uvedených bodech zjistíme, že v prvním řádku jsou body, kde funkce f nabývá maxima na M, a ve druhém řádku jsou body, kde f nabývá minima na M.

14. Množina M je kompaktní, neboť M je uzavřená polokoule. Funkce f je spojitá na M, takže nabývá na M maxima i minima. Body podezřelé z extrému budeme hledat zvlášť vzhledem k vnitřku množiny M a zvlášť vzhledem k hranici M. Mimo takto nalezené body již nemůže existovat další bod extrému, neboť je-li $\vec{x} \in A \subset M$ bod extrému vzhledem k M, pak je to i bod extrému vzhledem k A.

Vnitřek M je roven $\{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 1, x+y+z > 0\}$. Funkce f je třídy $\mathcal{C}^1$. Body podezřelé z extrému vzhledem k $\operatorname{Int} M$ jsou body, v nichž jsou všechny parciální derivace prvního řádu rovny 0. Platí $\nabla f(x,y,z) = [yz, xz, xy]$. Tento vektor je roven nulovému vektoru právě v bodech s alespoň dvěma nulovými souřadnicemi, tj. na souřadnicových osách. Body podezřelé z extrému ležící v $\operatorname{Int} M$ jsou tedy právě prvky některé z následujících množin:

$$\{[x,0,0];\ x \in (0,1)\}, \quad \{[0,y,0];\ y \in (0,1)\} \quad \text{a} \quad \{[0,0,z];\ z \in (0,1)\}.$$

Hranici $H(M)$ si rozdělíme na části

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x,y,z] \in G_1;\ x+y+z=0\}, \quad \text{kde} \\ &\quad G_1 = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2<1\}, \\ H_2 &= \{[x,y,z] \in G_2;\ x^2+y^2+z^2=1\}, \quad \text{kde} \\ &\quad G_2 = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x+y+z>0\}, \\ H_3 &= \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=0\}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že množiny G_1 a G_2 jsou otevřené. Pro nalezení bodů podezřelých z extrému vzhledem k množině H_1, resp. H_2, H_3, můžeme použít větu o Lagrangeových multiplikátorech.

Funkce $[x,y,z] \mapsto x+y+z$ má na $\mathbf{R}^3$ nenulový gradient, takže v případě množiny H_1 dostaneme body podezřelé z extrému řešením soustavy

$$\begin{aligned} yz+\lambda &= 0, \\ xz+\lambda &= 0, \\ xy+\lambda &= 0, \\ x+y+z &= 0. \end{aligned}$$

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme jediné řešení této soustavy $[x,y,z]=[0,0,0]$. Tento bod leží v množině H_1, a je tedy bodem podezřelým z extrému.

V případě množiny H_2 má funkce $[x,y,z] \mapsto x^2+y^2+z^2-1$ nulový gradient pouze v bodě $[0,0,0]$, který není prvkem H_2, takže body podezřelé z extrému dostaneme vyřešením soustavy

$$\begin{aligned} yz+2\lambda x &= 0, \\ xz+2\lambda y &= 0, \\ xy+2\lambda z &= 0, \\ x^2+y^2+z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Obdobným postupem jako v předchozím příkladu obdržíme řešení, přičemž příslušné hodnoty λ neuvádíme:

$$\begin{gathered} \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right],\ \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right],\ \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right],\ \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right],\ \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right],\ \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right],\ \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ [1,0,0], \quad [-1,0,0], \quad [0,1,0], \quad [0,-1,0], \quad [0,0,1], \quad [0,0,-1]. \end{gathered}$$

Z těchto bodů leží v množině H_2 pouze tyto body:

$$\begin{gathered} \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ [1,0,0], \quad [0,1,0], \quad [0,0,1]. \end{gathered}$$

Množinu H_3 jsme vyšetřili již v předchozím příkladu. Zde dostáváme podezřelé body

$$\begin{gathered} \left[\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right], \\ \left[-\tfrac{2}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right], \quad \left[\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right]. \end{gathered}$$

Porovnáním hodnot funkce f v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá maxima na M v bodě $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ a minima na M v bodech $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

15. Maximum: $[\pi/6,\pi/6,\pi/6]$; minima se nenabývá. **16.** Maximum: $[a/6,a/6,a/6]$; minima se nenabývá. **17.** Maximum: $[\sqrt{3}/2,1/2]$, $[-\sqrt{3}/2,1/2]$; minimum: $[\sqrt{3}/2,-1/2]$, $[-\sqrt{3}/2,-1/2]$.

18. Maximum: $\left[\sqrt{7\sqrt{5/12}/3},\sqrt{5/12}\right]$, $\left[-\sqrt{7\sqrt{5/12}/3},\sqrt{5/12}\right]$; minimum: $[0,0]$.

19. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin

M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y];\ y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\},$$
$$H_2 = \{[-1,y] \in \mathbf{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbf{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^4 + y^4 = 16, \tag{1}$$
$$4x^3y = \lambda 4x^3, \tag{2}$$
$$x^4 = \lambda 4y^3. \tag{3}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$. Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

20. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},$$
$$H_2 = \{[0,y] \in \mathbf{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,0] \in \mathbf{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \tag{1}$$

$$2 = \lambda \frac{1}{4} x^{-3/4}, \tag{2}$$

$$4 = \lambda \frac{1}{4} y^{-3/4}. \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4} \right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0, y) = 4y, \qquad y \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0, 0],\ [0, 1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x, 0) = 2x, \qquad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0, 0]$, $[1, 0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0, 1]$ a minima v bodě $[0, 0]$.

21. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x, y, 1) = f(x, y, -1) < f(x, y, z) < f(x, y, 0), \qquad [x, y, z] \in \mathbf{R}^3,\ z \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$ a minima na množině $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$. Položme $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Platí $g, h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Pro každé $[x, y] \in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

$$2x + y = \lambda 2x, \tag{2}$$

$$x + 2y = \lambda 2y. \tag{3}$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme $(3 - 2\lambda)(x + y) = 0$. To znamená, že buď $x = -y$ nebo $\lambda = 3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x = y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech

$$[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}],\ [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}],\ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}].$$

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1],\ [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1],$$

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1],\ [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0],\ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

22. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech $[-1/2, 0],\ [0,0]$. Pouze první bod však patří do vnitřku množiny M.

Hranici množiny M si rozdělíme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x = 0,\ y \in [-2,2]\},$$
$$H_2 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x < 0\}.$$

Na množině H_1 má funkce f podezřelé body: $[0,2],\ [0,-2],\ [0,0]$, protože $f(0,y) = -y^2$. Podezřelé body na H_2 budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Na množině H_2 je vždy $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{1}$$
$$2x + 4x^2 = \lambda 2x, \tag{2}$$
$$-2y = \lambda 2y. \tag{3}$$

Z (3) dostaneme, že $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. První možnost spolu s (2) dává, že $x = 0$ nebo $x = -1$. Pomocí (1) dopočteme pro tato x příslušná y a dostaneme body $[0,2],\ [0,-2],\ [-1,\sqrt{3}],\ [-1,-\sqrt{3}]$. První dva ovšem neleží v H_2. Pokud $y = 0$, pak z (1) dostáváme bod $[-2,0]$ a bod $[2,0]$, který ovšem neleží v H_2.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodě $[-1/2, 0]$ a minima v bodě $[-2,0]$.

23. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce $g_1,\ g_2$ jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1.
\end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z),\ (1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \tag{1}$$
$$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \tag{2}$$
$$y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x + y + z = 1. \tag{5}$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$. V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0,1,0], \qquad [2/3,-1/3,2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3,-1/3,2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

24. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}\cdot(-4x),\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 14y\cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}\cdot(-2y).\end{aligned}$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0, \tag{8}$$

$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0. \tag{9}$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1],\ [0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2+4y^2-1.$$

Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x,8y)$ je nulový, právě když $[x,y]=[0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$2x\cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}\cdot(-4x) = 2\lambda x, \tag{1}$$

$$14y\cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}\cdot(-2y) = 8\lambda y, \tag{2}$$

$$x^2+4y^2 = 1. \tag{3}$$

Z (1) vyplývá, že $x=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x=0$, pak podle (3) je $y=\pm 1/2$. Pokud $y=0$, pak podle (3) je $x=\pm 1$. V případě, že $x\neq 0$ a $y\neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor. Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1/2],\ [0,-1/2],\ [1,0],\ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2],\ [0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.

25. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z) = x^2+y^2-z^2.$$

Funkce $f,\ g_1$ i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xy}y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}x, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = -2z.
\end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z),\ (2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \tag{1}$$
$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \tag{2}$$
$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{5}$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x-y) = -2(\lambda_1+\lambda_2)(x-y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}],\ [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}],$$
$$[-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}],\ [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1+\lambda_2) = 2x(\lambda_1+\lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}],\ [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}],$$
$$[-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}],\ [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \qquad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \qquad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

26. Položme

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbf{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2z && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 2x && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = 1\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 2y && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = -2y\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = 2x + 1 && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y) = 2z && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y) = -2z
\end{aligned}$$

Zkoumejme pro která $[x, y, z] \in M$ jsou vektory $(2x, 2y, 2z),\ (1, -2y, -2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x = -\frac{1}{2}$ nebo $y = z = 0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M. Nyní řešme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$
$$x = y^2 + z^2 \tag{2}$$
$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{3}$$
$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \tag{4}$$
$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \tag{5}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \tag{6}$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5}-1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}\right], \qquad \left[(\sqrt{5}-1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}\right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

27. Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbf{R}^2$ a proto musí nabývat maxima i minima na množině M. Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x, 0];\ x \in \langle 0, 1\rangle\},$$
$$H_2 = \{[0, y];\ y \in \langle 0, 1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x, y];\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Je-li $[x, y] \in H_1$, platí $f(x, y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0, 0]$ a $[1, 0]$. Podobně je tomu na množině H_2. Tam dostáváme podezřelé body $[0, 0]$ a $[0, 1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vidíme, že $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3. Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \tag{2}$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$\lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2). \tag{4}$$

Z (2) vyplývá, že $\lambda \neq 0$. Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

Platí tedy buď $x = y$ nebo $-1 = x^2 + xy + y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z H_3 mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Nalezli jsme tyto podezřelé body: $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 0]$, $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Porovnáním funkčních hodnot funkce f v uvedených bodech (proveďte podrobně) zjistíme, že f nabývá svého minima v bodě $[0, 0]$ a maxima v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.