5 Funkce více proměnných

5.1 R^n jako metrický a lineární prostor

Definice. Množinou $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel.

Definice. Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na R^n rozumíme funkci $\rho\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \langle 0, +\infty)$ definovanou předpisem

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(x,y)$ nazýváme **vzdáleností bodu** x **od bodu** y.

Věta 5.1 (vlastnosti euklidovské metriky)**.** *Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:*

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x,y) = \rho(y,x)$,

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ *(trojúhelníková nerovnost),*

(iv) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\, \forall \lambda \in \mathbf{R}\colon \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x,y)$,

(v) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$.

Definice. Nechť $x \in \mathbf{R}^n,\ r > 0$. Množinu $B(x,r)$ definovanou předpisem

$$B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^n; \rho(x,y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí o poloměru** r **a středu** x nebo také **okolím bodu** x.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbf{R}^n$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset M$.

Definice. Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá **otevřená v** $\mathbf{R}^n$, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem. Doplňky otevřených množin (tj. množiny tvaru $\mathbf{R}^n \setminus G$, kde G je otevřená množina) nazýváme **uzavřenými množinami v** $\mathbf{R}^n$.

Věta 5.2 (vlastnosti otevřených množin)**.**

(i) *Prázdná množina a celý prostor $\mathbf{R}^n$ jsou otevřené v $\mathbf{R}^n$.*

(ii) *Nechť množiny $G_\alpha \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha \in A$, jsou otevřené v $\mathbf{R}^n$. Pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^n$.*

(iii) *Nechť množiny G_i, $i = 1, \dots, m$, jsou otevřené. Pak $\bigcap_{i=1}^{m} G_i$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^n$.*

Věta 5.3 (vlastnosti uzavřených množin)**.**

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $F_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A, A \neq \emptyset$, *jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$. *Pak* $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ *je uzavřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

(iii) *Nechť množiny* F_i, $i = 1, \dots, m$, *jsou uzavřené. Pak* $\bigcup_{i=1}^m F_i$ *je uzavřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$. **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. **Vnitřkem** množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. **Uzávěrem** množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Vnitřek množiny M budeme značit $\operatorname{int} M$ a pro uzávěr množiny M vyhradíme symbol $\overline{M}$.

Definice. Řekneme, že množina M je **omezená v** $\mathbf{R}^n$, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $M \subset B(\mathbf{o}, r)$.

Konec 1. přednášky, 22. 2. 2017

5.2 Spojitost funkcí z $\mathbf{R}^n$

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f: M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě** x **vzhledem k** M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \in B(f(x), \varepsilon).$$

Definice. Nechť $x^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^\infty$ **konverguje k** x, pokud $\lim_{j\to\infty} \rho(x, x^j) = 0$. Značíme $x^j \to x$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x^j\}_{j=1}^\infty$.

Věta 5.4. *Nechť* $x^j \in \mathbf{R}^n$ *pro každé* $j \in \mathbf{N}$ *a* $x \in \mathbf{R}^n$. *Posloupnost* $\{x^j\}_{j=1}^\infty$ *konverguje k* x *právě tehdy, když posloupnost* $\{x_i^j\}_{j=1}^\infty$ *konverguje k* x_i *pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$.

Věta 5.5 (Heine)**.** *Nechť* $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ *a* $f : M \to \mathbf{R}$. *Pak je ekvivalentní:*

(i) f *je spojitá v* x *vzhledem k* M,

(ii) $\lim_{j\to\infty} f(x^j) = f(x)$ *pro každou posloupnost* $\{x^j\}_{j=1}^\infty$ *splňující* $x^j \in M$ *pro* $j \in \mathbf{N}$ *a* $\lim_{j\to\infty} x^j = x$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $f : M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá na** M, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M.

Konec 2. přednášky, 24. 2. 2017

Definice. Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazýváme **kompaktní**, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní posloupnost s limitou v M.

Lemma 5.6. *Nechť $F \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená množina a $\{x^j\}$ je posloupnost prvků množiny F mající limitu $x \in \mathbf{R}^n$. Pak $x \in F$.*

——— Konec 3. přednášky, 1. 3. 2017 ———

Věta 5.7 (charakterizace kompaktních množin v $\mathbf{R}^n$)**.** *Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima (minima) na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x)$$
$$\big(\forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)\big).$$

Řekneme, že f má v bodě x **lokální maximum (lokální minimum) vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x)$$
$$\big(\forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \geq f(x)\big).$$

Definice. Řekneme, že f má v bodě x **ostré lokální maximum (ostré lokální minimum) vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M\colon f(y) < f(x)$$
$$\big(\forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M\colon f(y) > f(x)\big).$$

Věta 5.8. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbf{R}$ je spojitá na M. Pak f nabývá na M svého maxima i minima.*

Důsledek 5.9. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $f\colon M \to \mathbf{R}$ je spojitá na M. Pak f je omezená na M.*

5.3 Parciální derivace

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1,\dots,n\}$ a $a \in \mathbf{R}^n$. Pak číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^j) - f(a)}{t}$$
$$\left(= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{t} \right)$$

nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce** f **podle** j**-té proměnné v bodě** a (pokud limita existuje).

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná a otevřená. Nechť funkce f má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace (tj. funkce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\ j = 1, \dots, n,$ jsou spojité v každém bodě G). Pak říkáme, že funkce f je **třídy** $\mathcal{C}^1$ **na** G. Značíme $f \in \mathcal{C}^1(G)$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T\colon x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n),\ x \in \mathbf{R}^n,$$

se nazývá **tečnou nadrovinou** ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Věta 5.10. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak f je spojitá na G.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. **Gradientem funkce** f **v bodě** a rozumíme vektor

$$\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right].$$

Věta 5.11. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G,\ j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f\colon G \to \mathbf{R}$ má v bodě a lokální extrém (vzhledem ke G). Pak buď $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.*

——— Konec 5. přednášky, 8. 3. 2017 ———

Věta 5.12 (derivace složené funkce)**.** *Nechť $r, s \in \mathbf{N}$ a nechť $G \subset \mathbf{R}^s$, $H \subset \mathbf{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathcal{C}^1(G)$ a $f \in \mathcal{C}^1(H)$. Je-li složená funkce $F\colon G \to \mathbf{R}$ určená předpisem*

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x))$$

definována na G, pak $F \in \mathcal{C}^1(G)$. Pro $a \in G$ označme $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Věta 5.13. *Nechť $i, j \in \mathbf{N},\ i \le n,\ j \le n$ a funkce f má na okolí bodu $a \in \mathbf{R}^n$ obě derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto jsou v bodě a spojité. Pak platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce f je **třídy** $\mathcal{C}^\infty$ **na** G, má-li f všechny parciální derivace všech řádů spojité na množině G. Značíme $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$.

——— Konec 6. přednášky, 10. 3. 2017 ———

5.4 Věta o implicitních funkcích

Věta 5.14. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^1(G)$,

(ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$ a píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

kde $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in U$.

Věta 5.15. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j\colon G \to \mathbf{R}$, $j = 1, \ldots, m$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*

(i) $F_j \in \mathcal{C}^1(G)$ *pro* $j \in \{1, \ldots, m\}$,

(ii) $F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ *pro* $j \in \{1, \ldots, m\}$,

(iii) $\left| \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F_j(x, y) = 0$ pro každé $j \in \{1, \ldots, m\}$ a píšeme-li $y_j = \varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, pak $\varphi_j \in \mathcal{C}^1(U)$.

Konec 7. přednášky, 15. 3. 2017

5.5 Lagrangeova věta o multiplikátorech

Věta 5.16. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G;\ g(x, y) = 0\}$ a $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M.*

Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I)
$$\nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{o},$$

(II) *existuje reálné číslo $\lambda \in \mathbf{R}$ splňující*
$$\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \cdot \nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{o}.$$

——— Konec 8. přednášky, 17. 3. 2017 ———

Věta 5.17. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$, $m < n$,*

$$M = \{z \in G;\ g_1(z) = 0, g_2(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

a bod $\tilde{z} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k M.

Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) *vektory*

$$\nabla g_1(\tilde{z}), \nabla g_2(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$$

jsou lineárně závislé,

(II) *existují reálná čísla $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_m$ splňující*

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \cdot \nabla g_1(\tilde{z}) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(\tilde{z}) = \mathbf{o}.$$

5.6 Funkce konkávní a kvazikonkávní

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že M je **konvexní** množina, jestliže platí:

$$\forall x,\ y \in M\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle :\ tx + (1-t)y \in M.$$

Věta 5.18 (o střední hodnotě)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina, $f \in \mathcal{C}^1(G)$, $a \in G, b \in G$. Pak existuje $t_0 \in (0, 1)$ tak, že*

$$f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0 a + (1-t_0)b)(a_i - b_i).$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že f je

- **konkávní** funkce na M, jestliže

$$\forall a, b \in M\, \forall t \in \langle 0, 1\rangle\colon f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b),$$

- **ryze konkávní** funkce na M, jestliže

$$\forall a, b \in M, a \neq b\, \forall t \in (0, 1)\colon f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b),$$

- **kvazikonkávní na** M, jestliže

$$\forall a, b \in M, f(b) \geq f(a)\, \forall t \in \langle 0, 1\rangle : f(ta + (1-t)b) \geq f(a),$$

- **ryze kvazikonkávní na** M, jestliže

$$\forall a, b \in M, a \neq b, f(b) \geq f(a) \, \forall t \in (0,1)\colon f(ta + (1-t)b) > f(a).$$

Věta 5.19. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Pak platí:*

(i) *Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.*

(ii) *Je-li f ryze konkávní na M, pak je i ryze kvazikonkávní na M.*

Věta 5.20. *Nechť funkce f je konkávní na otevřené konvexní množině G. Pak f je spojitá na G.*

Věta 5.21. *Nechť funkce f je konkávní na konvexní množině M. Pak pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina $Q_\alpha = \{x \in M;\ f(x) \geq \alpha\}$ konvexní.*

Konec 9. přednášky, 22. 3. 2017

Věta 5.22. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak je funkce f konkávní na G právě tehdy, když platí*

$$\forall x,\ y \in G\colon f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i).$$

Věta 5.23. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$ je konkávní na G. Je-li $a \in G$ stacionárním bodem funkce f, pak je a bodem maxima funkce f.*

Věta 5.24. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak je funkce f ryze konkávní na G právě tehdy, když*

$$\forall x, y \in G, x \neq y\colon f(y) < f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i).$$

Věta 5.25. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Funkce f je kvazikonkávní na M právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina*

$$Q_\alpha = \{x \in M;\ f(x) \geq \alpha\}$$

konvexní.

Věta 5.26. *Nechť f je ryze kvazikonkávní funkce na konvexní množině $M \subset \mathbf{R}^n$. Pokud f nabývá na M svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.*

Důsledek 5.27. *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní, omezená, uzavřená a neprázdná množina a f je spojitá a ryze kvazikonkávní funkce na M. Pak f nabývá maxima na M právě v jednom bodě.*

6 Maticový počet

6.1 Základní operace s maticemi

Definice. Tabulku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme **maticí typu** $m \times n$. Je-li $m = n$, pak mluvíme o **čtvercové matici řádu** n. Množinu všech matic typu $m \times n$ značíme $M(m \times n)$.

O n-tici čísel

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$$

kde $i \in \{1, \dots, m\}$, mluvíme jako o i-**tém řádku** matice (1) a o m-tici čísel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

kde $j \in \{1, \dots, n\}$, jako o j-**tém sloupci** matice (1). Matici (1) značíme také symbolem $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\mathbb{B} = (b_{uv})_{\substack{u=1..p \\ v=1..s}}$ se rovnají, jestliže platí $m = p$, $n = s$ a $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Definice. Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$, $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Pak **součtem matic** $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ rozumíme matici

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Součinem reálného čísla λ a matice $\mathbb{A}$ rozumíme matici

$$\lambda\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Konec 10. přednášky, 24. 3. 2017

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{is})_{\substack{i=1..m \\ s=1..n}}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbb{B} = (b_{sj})_{\substack{s=1..n \\ j=1..k}}$ je matice typu $n \times k$. **Součinem matic** $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ rozumíme matici $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (c_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..k}}$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, k.$$

Zpravidla budeme psát místo $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ pouze $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

Věta 6.1 (vlastnosti maticového násobení)**.** *Platí:*

(i) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ \mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$,

(iii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ (\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{C}$,

(iv) $\exists! \mathbb{I} \in M(n \times n)\, \forall \mathbb{A} \in M(n \times n): \ \mathbb{I}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{I} = \mathbb{A}$ *(existence a jednoznačnost **jednotkové matice** $\mathbb{I}$).*

Definice. Transponovanou maticí k matici

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$$

rozumíme matici

$$\mathbb{A}^T = (a^t_{uv})_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$$

kde $a^t_{uv} = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \dots, n\}$, $v \in \{1, \dots, m\}$.

Věta 6.2 (vlastnosti transponovaných matic)**.** *Platí:*

(i) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\colon (\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)\colon (\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$,

(iii) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times k)\, \forall \mathbb{B} \in M(k \times n)\colon (\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$.

6.2 Regulární matice

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **regulární**, pokud existuje $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Definice. Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice. Matici $\mathbb{B}$ splňující $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ pak nazýváme **inverzní maticí** k matici $\mathbb{A}$. Značíme ji $\mathbb{A}^{-1}$.

——— Konec 11. přednášky, 29. 3. 2017 ———

Věta 6.3 (regularita a maticové operace)**.** *Nechť* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ *jsou regulární matice. Pak platí:*

(i) $\mathbb{A}^{-1}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$,

(ii) $\mathbb{A}^T$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$,

(iii) $\mathbb{A}\mathbb{B}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.

Definice. Nechť $k, n \in \mathbf{N}$. Mějme řádkové vektory $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, \ldots, v_n^1), \ldots, \mathbf{v}^k = (v_1^k, \ldots, v_n^k)$. **Lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ rozumíme řádkový vektor tvaru

$$\lambda_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}^k,$$

kde $\lambda_i \in \mathbf{R},\ i = 1, \ldots, k$. **Triviální lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ rozumíme lineární kombinaci

$$0 \cdot \mathbf{v}^1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}^k.$$

Definice. Řekneme, že vektory $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže platí

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}: \ \lambda_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}^k = \mathbf{o} \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0,$$

neboli mezi všemi lineárními kombinacemi řádkových vektorů $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ je rovna nulovému řádkovému vektoru, který značíme $\mathbf{o}$, jenom triviální lineární kombinace.

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. **Hodností matice** $\mathbb{A}$ rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků (tj. řádkových vektorů). Hodnost matice $\mathbb{A}$ značíme $h(\mathbb{A})$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je **schodovitá**, jestliže pro každé $i \in \{2, \ldots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\mathbb{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Definice. **Elementárními řádkovými úpravami** matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět:

(i) záměnu dvou řádků,

(ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,

(iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Definice. **Transformací** budeme rozumět konečnou posloupnost řádkových elementárních úprav. Jestliže matice $\mathbb{B} \in M(m \times n)$ vznikla z matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ aplikací transformace T na matici $\mathbb{A}$, pak tento fakt značíme takto: $\mathbb{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$.

Věta 6.4 (vlastnosti řádkových elementárních úprav)**.** (i) *Nechť* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. *Pak existuje transformace* T *převádějící matici* $\mathbb{A}$ *na schodovitou matici.*

(ii) *Nechť* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$. *Jestliže existuje transformace* T_1 *taková, že* $\mathbb{A} \overset{T_1}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$, *pak existuje transformace* T_2 *taková, že* $\mathbb{B} \overset{T_2}{\rightsquigarrow} \mathbb{A}$.

(iii) *Nechť* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$ *a* T *je transformace taková, že* $\mathbb{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$. *Pak* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$.

Konec 12. přednášky, 31. 3. 2017

Věta 6.5 (součin a řádkové úpravy)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times k), \mathbb{B} \in M(k \times m)$, $\mathbb{C} \in M(n \times m)$ *a platí* $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{C}$. *Nechť* T *je transformace a* $\mathbb{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{A}'$ *a* $\mathbb{C} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{C}'$. *Pak platí* $\mathbb{A}'\mathbb{B} = \mathbb{C}'$.

Věta 6.6. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $h(\mathbb{A}) = n$.

Konec 13. přednášky, 5. 4. 2017

6.3 Determinanty

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Maticí $\mathbb{A}_{ij}$ budeme rozumět matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. **Determinant matice** $\mathbb{A}$ definujeme takto:

$$\det \mathbb{A} = \begin{cases} a_{11}, & \text{pokud } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}, & \text{pro } n > 1. \end{cases}$$

Pro $\det \mathbb{A}$ budeme také používat symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 6.7. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

(i) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ *vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme první řádkovou elementární úpravu), pak platí* $\det \mathbb{A}' = -\det \mathbb{A}$.

(ii) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ *jeden řádek vynásobíme reálným číslem* λ, *pak platí*
$$\det \mathbb{A}' = \lambda \det \mathbb{A}.$$

(iii) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ λ*-násobek jednoho řádku přičteme k jinému řádku (tj. provedeme třetí řádkovou elementární úpravu), pak platí*

$$\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A}.$$

Konec 14. přednášky, 5. 4. 2017

Věta 6.8. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. *Pak*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbb{A}_{ij}.$$

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **horní trojúhelníková** matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j \in \{1, \dots n\}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **dolní trojúhelníková** matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j \in \{1, \dots n\}$.

Věta 6.9. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice. Pak platí*

$$\det \mathbb{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Věta 6.10. *Pro* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.

Věta 6.11. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta 6.12. *Pro* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \mathbb{A}\mathbb{B} = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$.

6.4 Řešení soustav lineárních rovnic

Věta 6.13. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$, $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ *a* $\mathbb{A}\mathbf{x} = b$. *Provedeme-li stejné elementární úpravy na* $\mathbb{A}$ *i na* $\boldsymbol{b}$ *obdržíme matice* $\mathbb{A}'$ *a* $\boldsymbol{b}'$ *pro které platí* $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$.

Věta 6.14. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *matice* $\mathbb{A}$ *je regulární,*

(ii) *soustava (S) má pro každé* **b** *právě jedno řešení,*

(iii) *soustava (S) má pro každé* **b** *alespoň jedno řešení.*

Věta 6.15. *Soustava (S) má řešení právě tehdy, když matice*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mají stejnou hodnost.

Konec 15. přednášky, 12. 4. 2017

Věta 6.16 (Cramerovo pravidlo)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je regulární matice,* $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$*,* $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ *a* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*. Pak*

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

pro $j = 1, \dots, n$.

6.5 Matice a lineární zobrazení

Definice. Řekneme, že zobrazení $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je **lineární**, pokud platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n: \ f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbf{R}\, \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n: \ f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u})$.

Věta 6.17 (reprezentace lineárních zobrazení)**.** *Zobrazení* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *je lineární právě tehdy, když existuje matice* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ *taková, že*

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n: \ f(\boldsymbol{u}) = \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Věta 6.18. *Nechť zobrazení* $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *je lineární. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) *f je bijekce (tj. jde o prosté zobrazení $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$),*

(ii) *f je prosté zobrazení,*

(iii) *f je zobrazení $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$.*

Věta 6.19. *Nechť* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *je lineární zobrazení reprezentované maticí* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ *a* $g\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ *je lineární zobrazení reprezentované maticí* $\mathbb{B} \in M(k \times m)$*. Potom složené zobrazení* $g \circ f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ *je lineární a je reprezentováno maticí* $\mathbb{B}\mathbb{A}$*.*

Konec 16. přednášky, 19. 4. 2017

7 Číselné řady

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme **m-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat **n-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Věta 7.1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Věta 7.2 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Konec 17. přednášky, 21. 4. 2017

Věta 7.3 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy splňující* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in (0, +\infty)$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 7.4 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Budiž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 7.5 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Budiž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s kladnými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim a_{n+1}/a_n > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 7.6. *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$.

Věta 7.7 (Leibnizovo kritérium)**.** *Mějme řadu* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. *Nechť platí*

- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

——— Konec 18. přednášky, 26. 4. 2017 ———

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Věta 7.8. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

Definice. Budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo je v ní obsaženo právě jednou. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 7.9 (přerovnání řady)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní. Potom každé její přerovnání* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *je absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

8 Integrál

8.1 Primitivní funkce

Definice. Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k** f **na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 8.1. *Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

Věta 8.2. *Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 8.3. *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.*

Konec 19. přednášky, 28. 4. 2017

Věta 8.4 (o substituci)**.** (i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

(ii) *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \stackrel{c}{=} G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\, dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

Věta 8.5 (integrace per partes)**.** *Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\, dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\, dx \text{ na } I.$$

Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 8.6 (základní věta algebry)**.** *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ taková, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Věta 8.7. *Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbf{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen P násobnosti k.*

——— Konec 20. přednášky, 3. 5. 2017 ———

Důsledek 8.8. *Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \dots, x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l$ taková, že*

(i) $P(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(ii) *žádné dva z mnohočlenů $x-x_1$, $x-x_2, \dots, x-x_k$, $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, $\dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají společný kořen,*

(iii) *mnohočleny $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, $\dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají žádný reálný kořen.*

Věta 8.9 (o rozkladu na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) a_n, $x_1, \dots x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů $x-x_1$, $x-x_2, \dots, x-x_k$, $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, $\dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají společný kořen,*

(vi) *mnohočleny $x^2+\alpha_1 x+\beta_1$, $\dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l$, $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)} \\
&+ \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} \\
&+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots \\
&+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.
\end{aligned}$$

8.2 Riemannův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b\rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \dots, x_n$ nazýváme **dělicími body**. Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b\rangle$ je **zjemněním dělení** D intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže každý dělicí bod D je i dělicím bodem D'.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, D) &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\nolimits_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,\\
\underline{S}(f, D) &= \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\nolimits_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,\\
\overline{\int_a^b} f &= \inf\bigl\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\bigr\},\\
\underline{\int_a^b} f &= \sup\bigl\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\bigr\}.
\end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f má **Riemannův integrál** na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota integrálu funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ je pak rovna společné hodnotě $\overline{\int_a^b} f$ a $\underline{\int_a^b} f$ a značíme ji $\int_a^b f$. Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f = -\int_b^a f$, a v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f = 0$.

Konec 21. přednášky, 5. 5. 2017

Lemma 8.10 (kritérium existence Riemannova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

(i) $\int_a^b f = I \in \mathbf{R}$ *právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že*

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

(ii) *Funkce f má na $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Věta 8.11. (i) *Nechť funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál i na intervalu $\langle c,d\rangle$.*

(ii) *Nechť $c \in (a,b)$ a funkce f má Riemannův integrál na intervalech $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Konec 22. přednášky, 10. 5. 2017

Věta 8.12 (linearita Riemannova integrálu)**.** *Nechť f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom*

(i) *funkce αf má Riemannův integrál na $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

(ii) *funkce $f+g$ má Riemannův integrál na $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{2}$$

Věta 8.13. *Nechť $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$, a nechť f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom platí:*

(i) *Je-li $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$.*

(ii) *Funkce $|f|$ má Riemannův integrál na $\langle a,b\rangle$ a platí $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$.*

Definice. Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá na intervalu** I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall x,y \in I, |x-y| < \delta\colon |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Konec 23. přednášky, 12. 5. 2017

Věta 8.14. *Je-li funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, pak je stejnoměrně spojitá na $\langle a,b\rangle$.*

Věta 8.15. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a,b\rangle$.*

Věta 8.16. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a,b) a nechť $c \in (a,b)$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f$ pro $x \in (a,b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$, neboli funkce F je primitivní k f na (a,b).*

Věta 8.17 (Newtonova-Leibnizova formule)**.** *Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$, $a<b$, a F je primitivní funkce k f na (a,b). Pak existují vlastní limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ a platí*

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Konec 24. přednášky, 19. 5. 2017