Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (A)
LS 1999-2000

Příklad A1 : Spočtěte $\det A$ a vyřešte rovnici $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n} - \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^8+3n} - \sqrt{n^8+1}} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = xyz, \qquad M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y=0\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad A4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0) = 0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$.

$$e^{xy} = \cos(x+y) + y \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A5 : Spočtěte

$$\int \frac{5x^2+5x+3}{x(x^2+x+1)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test A – výsledky

Příklad A1 : $\det A = 16$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Příklad A2 : Platí:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n} - \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^8+3n} - \sqrt{n^8+1}} = +\infty,$$

a proto řada diverguje.

Příklad A3 : Maximum: $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, minimum: $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$.

Příklad A4 : $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$

Příklad A5 : $3\log|x| + \log(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (B)

LS 1999-2000

Příklad B1 : Spočtěte inverzní matici k matici A (pokud existuje) a vyřešte soustavu $Ax = b$, kde kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - \sqrt{n^4 - (-1)^n n} \right). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = x - y + 3z,\ \ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x + y + z = 3\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad B4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0) = 0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$.

$$\log(x^2 + y^2 + 1) + y + \sin y = 0. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B5 : Spočtěte

$$\int \frac{(\sin x + 3 - \cos^2 x)\cos x}{(\sin x + 1)(\sin^2 x + 1)^2}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test B – výsledky

Příklad B1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Příklad B2 : Řada konverguje podle Leibnizova kritéria.

Příklad B3 : Bod maxima: $[1, 1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2]$; bod minima: $[1, 1 + \sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2]$.

Příklad B4 : $f'(0) = 0,\ f''(0) = -1$

Příklad B5 : $\dfrac{1}{2}\log|1 + \sin x| - \dfrac{1}{4}\log(1 + \sin^2 x) + \operatorname{arctg}(\sin x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{\sin^2 x + 1},\ \ x \in (-\pi/2, 3\pi/2) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbf{Z}$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (C)

LS 1999-2000

Příklad C1 : Spočtěte inverzní matici k matici A (pokud existuje) a spočtěte $\det A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n) \cdot \operatorname{arctg}(n^3 - 5n + 6) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2, \qquad M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 - y^2 - z + 3 = 0\} \quad \text{(15 bodů)}$$

Příklad C4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(1) = 0$. Vypočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

$$\operatorname{arctg}(x + y^7) + \sin y = \pi/4 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C5 : Spočtěte

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2+1)^2(x-1)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test C – výsledky

Příklad C1 : Matice není regulární, $\det A = 0$.

Příklad C2 : Řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria. Lze srovnat např. s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

Příklad C3 : Bod maxima neexistuje; body minima: $[0, 5/3, 2/9]$, $[0, -5/3, 2/9]$.

Příklad C4 : $f'(1) = -1/2$, $f''(1) = 1/2$

Příklad C5 :

$$\frac{3}{4}\log|x-1| - \frac{3}{8}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2+1},\ x \in (-\infty, 1) \text{ a } x \in (1, +\infty)$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (D)

LS 1999-2000

Příklad D1 : Spočtěte inverzní matici k matici A (pokud existuje) a vyřešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arcsin \frac{1}{n}) \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = xyz + x, \qquad M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad D4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(1) = 1$. Vypočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

$$y \operatorname{arctg} x + x \operatorname{arctg} y = 2 \arcsin(xy/\sqrt{2}). \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D5 : Spočtěte

$$\int \frac{(-\cos^2 x - 1)\sin x}{(\cos^2 x + 2\cos x + 2)(\cos x + 1)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test D – výsledky

Příklad D1 :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Příklad D2 : Řada konverguje podle limitního srovnávacího kritéria, lze srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$.

Příklad D3 : Maximum: $[1,0,0]$, minimum: $[-1,0,0]$.

Příklad D4 : $f'(1) = -1,\ f''(1) = 4/(6-\pi)$

Příklad D5 : $2\log|\cos x + 1| - \frac{1}{2}\log(\cos^2 x + 2\cos x + 2) - 2\operatorname{arctg}(\cos x + 1),\ x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (E)

LS 1999-2000

Příklad E1 : Spočtěte inverzní matici k matici A (pokud existuje) a vyřešte soustavu $Ax = b$, kde kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right) \cdot \operatorname{arctg}(n^3 - 5n + 6) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x, y) = 7x + y, \qquad M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ e^x + e^y = e\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad E4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(1) = 1$. Vypočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

$$e^x \log(xy) + e^y \log(x) = 0. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E5 : Spočtěte

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\left(\left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 + 2 \right) \left(\sqrt{x^2+1} - x + 1 \right) \sqrt{x^2+1}} \, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test E – výsledky

Příklad E1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \\ -2 & -2 & -9 & -3 \\ -1 & -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \\ -45 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Příklad E2 : Řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria; lze srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

Příklad E3 : Bod maxima: $[1 + \log(7/8), 1 + \log(1/8)]$; bod minima neexistuje.

Příklad E4 : $f'(1) = -2,\ f''(1) = 12$

Příklad E5 :

$$\frac{1}{3} \log \left(\sqrt{x^2+1} - x + 1 \right) - \frac{1}{6} \log \left(\left(\sqrt{x^2+1} - x \right)^2 + 2 \right) + \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{2}} \right), \ x \in \mathbf{R}$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (F)

LS 1999-2000

Příklad F1 : Spočtěte inverzní matici k matici A (pokud existuje) a spočtěte $\det A$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad F2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$$

Příklad F3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$f(x,y) = x^3 - y^3, \qquad M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1, y \le x+1, y \ge -x-1\}$ (15 bodů)

Příklad F4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,1]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0)=1$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$.

$$x \sin(xy) + y \arccos x = \pi/2 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F5 : Spočtěte

$$\int \frac{x-2}{2(x+1)^2 x \left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} + 1\right)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Výsledky

Příklad F1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = 1.$$

Příklad F2 : Řada konverguje (podílovým kritériem je možné ukázat absolutní konvergenci řady nebo Leibnizovým kritériem ukázat konvergenci řady $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$, kde n_0 je dostatečně velké přirozené číslo).

Příklad F3 : Body maxima: $[1,0]$, $[0,-1]$; body minima: $[-1,0]$, $[0,1]$.

Příklad F4 : $f'(0) = 2/\pi,\ f''(0) = (8-4\pi)/\pi^2$

Příklad F5 :

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} - \frac{1}{3}\log\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} + 1\right) - \frac{1}{3}\log\left(\frac{x-2}{x+1} + 2\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\right),$$

$$x \in (-\infty,-1) \text{ a } x \in (2,+\infty)$$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (G)

LS 1999-2000

Příklad G1 : Spočtěte inverzní matici k matici A (pokud existuje) a spočtěte $\det A$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad G2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} - 1 \right) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad G3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = \cos(xy) + \cos z,$$
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 2,\ x^2+y^2-z=0\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad G4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0)=0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$.

$$x^3 + y^3 - e^{xy-x} + y + 1 = 0 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad G5 : Na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ nalezněte

$$\int \frac{(\operatorname{tg} x + 3)(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x + 2)(\operatorname{tg} x + 1)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Výsledky

Příklad G1 :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = -2.$$

Příklad G2 : Řada diverguje. Lze srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$.

Příklad G3 : Body maxima: $[1,0,1]$, $[0,1,1]$, $[-1,0,1]$, $[0,-1,1]$;
body minima: $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1]$, $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$.

Příklad G4 : $f'(0) = -1,\ f''(0) = -1$

Příklad G5 : $2\log(\operatorname{tg} x + 1) - \log(\operatorname{tg} x + 2)$ na intervalu $(-\pi/2, \operatorname{arctg}(-2))$ nebo $(\operatorname{arctg}(-2), -\pi/4)$ nebo $(-\pi/4, \pi/2)$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (H)

LS 1999-2000

Příklad H1 : Spočtěte inverzní matici k matici A (pokud existuje) a spočtěte $\det A$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad H2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad H3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y) = x^2+y^2, \quad M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ 3(x-y)^2+2x^2+2y^2-10x-10y+21 \le 0\} \quad \text{(15 bodů)}$$

Příklad H4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0) = 0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$.

$$x + xy^4 + \sin(xy) + y = 0 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad H5 : Spočtěte

$$\int \frac{x^5 + 3x^3 + x + 1}{(x^2+2)^2 x}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Výsledky

Příklad H1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det A = -1$$

Příklad H2 : Řada konverguje podle odmocninového kritéria.

Příklad H3 : Bod minima: $[3/2, 3/2]$; bod maxima: $[7/2, 7/2]$.

Příklad H4 : $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$

Příklad H5 : $x + \frac{1}{4}\log|x| - \frac{1}{8}\log(x^2+2) - \frac{5\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}(x/\sqrt{2}) - \frac{1}{16}\frac{4x-4}{x^2+2}$, $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, +\infty)$

Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (I)

LS 1999-2000

Příklad I1 : Spočtěte inverzní matici k matici A (pokud existuje) a determinant A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad I2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2+1} \right) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad I3 : Nalezněte extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2, \qquad M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^3 + y^2 - 9x = 0, x \geq -4\} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad I4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(1) = 1$. Vypočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

$$x^x + y^x + y^y = 3. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad I5 : Spočtěte

$$\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2(x-1)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Výsledky

Příklad I1 :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \det A = -1$$

Příklad I2 : Řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria. Lze srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/3}$.

Příklad I3 : Bod minima: $[0,0]$, body maxima: $[-4, 2\sqrt{7}]$, $[-4, -2\sqrt{7}]$.

Příklad I4 : $f'(1) = -1/2,\ f''(1) = -3/4$

Příklad I5 : $\dfrac{1}{3}\log|x-1| - \dfrac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \dfrac{5\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x-1}{x^2+x+1}, x \in (1,+\infty), \quad x \in (-\infty, 1)$