

3. Limita funkce

1. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$$

2. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}},$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad (n \in \mathbf{N}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

3. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{x^3 + 7x} - x \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1)^{\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sqrt{x^2}}}.$$

4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log(1+2^x) \log \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

5. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\frac{\pi}{6} + x)}{\operatorname{tg} x}.$$

6. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})}.$$

7. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{cotg} \pi x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

8*. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2\pi \sqrt{n^2 + 1} \right).$$

Výsledky a některá řešení

1. $2, 1/2, -1$

2. $-1/16, 3/2, 1/n, 1/4$

3. $7/3, -1/2, 1$

4. $0, 1/e, 2/3, \log 8$

5.1. Platí

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}). \end{aligned}$$

Víme, že

- (i) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$
- (iv) \sin je prostý na $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle,$
- (v) $\sqrt{}$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} = 1.$

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

5.2. Pišme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}. \end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$ Zabývávejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Použili jsme

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
- (3) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$
- (4) \sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
- (5) \arcsin je prostá funkce,
- (6) $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
- (7) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- (8) větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

5.3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 2 \sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - 2 \sin(\pi/6 + x)}{x} \right) \\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right) \\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right) \\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right). \quad (\star) \end{aligned}$$

Víme, že

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$

Z (\star) , (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

6.1. Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}} \right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}} \right)^x \\ &= \exp \left(\log \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}} \right)^x \right) \right) \\ &= \exp \left(x \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}} \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}}} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}} \right) \\ &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}}} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + 1}}{2x^3 - 1} \right) \\ &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3 - \sqrt{x^4 + 1}}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2 - \frac{1}{x^3}} \right). \quad (\star) \end{aligned}$$

Dále platí:

- (1) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1,$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0,$
- (3) funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí ∞ různá od nuly,
- (4) \exp je spojitá na \mathbb{R} .

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}} = 1. \quad (**)$$

Dále máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}} = 1. \quad (***)$$

Z (*), (**), (***) a (4) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n = e.$$

6.2. Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x) = x(2^{\frac{1}{x}} - 1)$ v ∞ . Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\log 2}{x}} - 1}{\frac{\log 2}{x}} \cdot \log 2 = \log 2.$$

Užili jsme

- (1) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{x} = 0,$
- (3) $\frac{\log 2}{x} \neq 0$ pro každé $x > 0,$
- (4) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

6.3. Uvědomme si, že platí:

- (1) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1,$
- (2) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1,$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0,$
- (4) $\sqrt{}$ je prostá na svém definičním oboru.

Můžeme psát

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})}.$$

Z věty o limitě složené funkce, (1), (3) a (4) plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$$

Z věty o limitě složené funkce, (2), (3) a (4) plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1.$$

Věta o aritmetice limit pak dává

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})} = 1.$$

7. $1/e, 1/2, 4/3$

8. 0