

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)

ZS 1999-2000

Příklad A1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{100} - \left(4 - \frac{3}{n}\right)^{50}}{\left(8 - \frac{1}{n}\right)^{34} - \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{51}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad A2 : Určete definiční obor funkce g a spočtěte první parciální derivace všude, kde existují.

$$g(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x + |y|). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad A3 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi/2} (4x^2 - 9\pi^2) \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad A4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \sin(\arccos^2 x)$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad A5 : Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = 8 \sin x + \operatorname{tg} x. \quad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky

Příklad A1 : $-175/136$

Příklad A2 : $D(g) = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \cos(x + y) - \sin(x + |y|), & [x, y] \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \begin{cases} \cos(x + y) - \sin(x + |y|) \operatorname{sgn} y, & [x, y] \in \mathbb{R}^2, y \neq 0 \\ (-1)^k, & [x, y] = [k\pi, 0], k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x, 0)$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ neexistuje

Příklad A3 : 24π

Příklad A4 : $D(f) = \langle -1, 1 \rangle$, $f'(x) = \cos(\arccos^2(x)) \cdot 2 \arccos x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$,
 $f'_-(1) = -2$, $f'_+(-1) = +\infty$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)

ZS 1999-2000

Příklad B1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 5n} - \sqrt[3]{n^3 + 2}}{\sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + 1}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad B2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce g . Spočtěte první parciální derivace všude, kde existují.

$$g(x, y) = \sqrt{x^4 - y^2 x^2}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad B3 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x (\cos x + \sqrt{1+x}) - \sin x}{\sin(x^2)}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad B4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \max\{\sin x, \operatorname{tg} x\}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad B5 : Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = x^{\log x}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Výsledky

Příklad B1 : 10/3

Příklad B2 : $D(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \geq |y|\} \cup \{[0, y]; y \in \mathbb{R}\}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^2 x}{\sqrt{x^4 - y^2 x^2}}, & |x| > |y| \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{-yx^2}{\sqrt{x^4 - y^2 x^2}} & |x| > |y| \\ 0, & x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

V jiných bodech parciální derivace neexistují.

Příklad B3 : 1/4

Příklad B4 : $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x \in ((\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{\cos^2 x} & x \in ((0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f'(2k\pi) = 1, f'_+((2k+1)\pi) = 1, f'_-((2k+1)\pi) = -1, k \in \mathbb{Z}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)

ZS 1999-2000

Příklad C1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3 \log(1 + \sqrt[3]{n}) - \log n) \cdot \left(\sqrt[3]{n^4 + n^3} - \sqrt[3]{n^4 - n^3 + 1} \right). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad C2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce g a spočtěte první parciální derivace všude, kde existují.

$$g(x, y) = \arcsin \left(\frac{x}{x + y^2} \right). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad C3 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)^{1/\sin^2 \pi x}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad C4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \min\{x^2, \sqrt[3]{x}\}.$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad C5 : Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \log \left(x + \frac{1}{x} \right). \quad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D) ZS 1999-2000

Příklad D1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \left(\sqrt{n^2 + \sin^2 n} - \sqrt{n^2 - \cos^2 n} \right)}{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad D2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce g a spočtěte první parciální derivace všude, kde existují.

$$g(x, y) = \sqrt{x(1 - x^2 - y^2)}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad D3 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{9^{\sin x} + \cos x}{2} \right)^{\cotg x}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad D4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \begin{cases} x^{(2^x)}, & x \in (0, 2), \\ x^{(x^2)}, & x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad D5 : Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \sin x + \frac{1}{6 \sin x}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

ZS 1999-2000

Příklad E1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad E2 : Určete definiční obor funkce g a spočtěte první parciální derivace všude, kde existují.

$$g(x, y) = \sqrt{1 - |x| - |y|}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad E3 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad E4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(x)) \cdot (\cos(2x) - 1)$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad E5 : Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = -\frac{1}{2} \sin^2 x + \sin x. \quad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F) ZS 1999-2000

Příklad F1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2^n}{n^8 + 2^n} \right)^{\frac{2^n}{n^8}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F2 : Určete definiční obor funkce g a spočtěte první parciální derivace všude, kde existují.

$$g(x, y) = x^{(y^x)} \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F3 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x})} - 2^{1/x} \right). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad F4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \arcsin(e^{-|x|})$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad F5 : Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-|x|}. \quad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

ZS 1999-2000

Příklad G1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n + 2}}{\sqrt{n^4 + 2n + 3} - \sqrt{n^4 + n + 4}}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad G2 : Určete definiční obor funkce g a spočtěte první parciální derivace všude, kde existují.

$$g(x, y) = e^{x|y|} + e^{|x|y} \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad G3 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sqrt{1 + 3x} + 1}{\sin(x^2)}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad G4 : Spočtěte derivaci funkce (resp. jednostranné derivace)

$$f(x) = \arcsin(\min\{1, 1/x\})$$

ve všech bodech, kde existuje. (10 bodů)

Příklad G5 : Vyšetřete průběh funkce (bez konvexity)

$$h(x) = |\sin(2x)| - 2 \sin x. \quad (20 \text{ bodů})$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

ZS 1999-2000

Příklad H1 : Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(2^{1/n} - 2^{1/\sqrt{n^3}} \right). \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad H2 : Určete definiční obor funkce g a spočtěte první parciální derivace všude, kde existují.

$$g(x, y) = \max\{x^2 + y, x + y\} \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad H3 : Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + 2x} + 2x \right)^{1/\sin^2 x}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad H4 : Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce f měla v bodě 1 vlastní derivaci.

$$f(x) = \begin{cases} x^{x^c} - 1, & x \in (0, 1); \\ \arctan(\sin(c(x-1))), & x \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad H5 : Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \frac{e^{|x|}}{|e^x - 3|}. \quad (20 \text{ bodů})$$