

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)
ZS 2005-06, 24. 1. 2006

Příklad A1: Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad A2: Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} 3x} - \sqrt[3]{1 - \arcsin 2x}}{\sqrt[4]{1 - \arcsin 4x} - \sqrt[4]{1 + \operatorname{arctg} 5x}}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad A3: Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \sin x + \cos x + |\sin x - \cos x|$$

ve všech bodech, kde existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná). (10 bodů)

Příklad A4: Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \begin{cases} x \exp(-|\frac{x+1}{x}|) & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad A5:

(a) Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$3 \sin^2 y - 3 \sin y + \cos^2 y = 0.$$

(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice

$$\frac{x+1}{x+2} > \frac{x-5}{x+1}.$$

(c) Spočtěte vzdálenost bodu $[1, 1]$ od přímky dané rovnicí $y = 2x + 3$.

Výsledky (A)

Příklad A1: $4/5$

Příklad A2: $-20/27$

Příklad A3: Funkce f je spojitá na \mathbf{R} .

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cos x, & x \in (\pi/4, 5\pi/4) + 2k\pi, \\ -2 \sin x, & x \in (5\pi/4, 9\pi/4) + 2k\pi. \end{cases}$$

$$f'_+(\pi/4 + 2k\pi) = \sqrt{2}, f'_-(\pi/4 + 2k\pi) = -\sqrt{2}, f'_-(5\pi/4 + 2k\pi) = -\sqrt{2}, f'_+(5\pi/4 + 2k\pi) = \sqrt{2}; k \in \mathbf{Z}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)
ZS 2005-06, 30. 1. 2006

Příklad B1: Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n} + e^{1/n}\right)}{\log\left(\frac{1}{n} + e^{2/n}\right)}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad B2: Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 4^x - 1}{2 \cdot 3^x - 9^x - 1}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad B3: Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočítejte derivaci funkce

$$f(x) = (x + 1)^2 \cdot \operatorname{sgn}(x^2 + 3x + 2)$$

ve všech bodech, kde existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná). (10 bodů)

Příklad B4: Vyšetřete průběh funkce

$$h(x) = \cos 2x + |\cos x| \cdot \cos x \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad B5:

(a) Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$e^x + 2e^{-x} = 3.$$

(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice

$$\frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x+1} > \frac{1}{x+2}.$$

(c) Spočítejte obsah pravidelného osmiúhelníku vepsaného do kruhu o poloměru 1.

Výsledky (B)

Příklad B1: $2/3$

Příklad B2: $\left(\frac{\log 2}{\log 3}\right)^2$

Příklad B3: Funkce f je spojitá právě v bodech množiny $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+1), & x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty), \\ -2(x+1), & x \in (-2, -1). \end{cases}$$

$$f'(-1) = 0, \quad f'(-2) = -\infty$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)
ZS 2005-06, 6. 2. 2006

Příklad C1: Spočítejte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{4^n + 2^n} - \sqrt[3]{4^n - 2^n}}{\sqrt[3]{4^{n+1} + 2^{n+1}} - \sqrt[3]{4^{n+1} - 2^{n+1}}}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad C2: Spočítejte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}}{\arcsin x - \sin x}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad C3: Nalezněte všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ taková, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma, & x \leq 0; \\ \sin(\beta x), & x > 0. \end{cases}$$

má v každém bodě \mathbf{R} vlastní druhou derivaci. (10 bodů)

Příklad C4: Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$h(x) = \begin{cases} x \log(x^2) - x(\log|x|)^2 + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad C5:

(a) Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$(\log x)^2 = 2 \log x + 3.$$

(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 9x + 20} \geq 1.$$

(c) Nalezněte rovnice všech přímek v rovině, které procházejí bodem $[1, 2]$ a jsou tečné k jednotkové kružnici se středem v počátku.

Výsledky (C)

Příklad C1: $\sqrt[3]{2}$

Příklad C2: $1/2$

Příklad C3: $\alpha = \gamma = 0, \beta \in \mathbf{R}$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)
ZS 2005-06, 13. 2. 2006

Příklad D1: Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log n}{\log(n+1)} \right)^{n \log n}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad D2: Spočtěte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{e^x - \cos x - x - x^2}. \quad (15 \text{ bodů})$$

Příklad D3: Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \max\{x, x^2\} \right)$$

ve všech bodech, kde existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná). (10 bodů)

Příklad D4: Vyšetřete průběh funkce definované předpisem

$$f(x) = |x^2 - 1|e^{-x^2/2} \quad (20 \text{ bodů})$$

Příklad D5:

(a) Najděte všechna reálná řešení nerovnice

$$\sqrt{x-2} \geq x-8.$$

(b) Najděte všechna reálná řešení nerovnice

$$\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x+3}{x-4}.$$

(c) Spočtěte obsah trojúhelníka s vrcholy v bodech o souřadnicích $[0, 1]$, $[4, 0]$, $[2, 7]$.

Výsledky (D)

Příklad D1: $1/e$

Příklad D2: 3

Příklad D3: Funkce f je spojitá na \mathbf{R} .

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}x^2) \cdot \pi x, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \\ \cos(\frac{\pi}{2}x) \cdot \frac{\pi}{2}, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

$$f'_-(0) = 0, f'_+(0) = \pi/2, f'(1) = 0$$