Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 4. termín, 1. 2. 2024

---

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n\to\infty} \log(2^n + n + 1) \cdot \sin\left(n - \sqrt[3]{n^3 + n}\right)$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to-1} (2 + x)^{\operatorname{cotg}(\pi x)}$$

(12 bodů)

3. Určete, v kterých bodech je funkce f spojitá, a spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = (x - 1)^2 \cdot \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x) = \arcsin(1 - \log^2 x).$$

(a) Určete definiční obor funkce f.

(b) Spočtěte první derivaci funkce f všude, kde existuje.

(c) Nalezněte všechny inflexní body funkce f.

(13 bodů)

Matematika 1, 4. termín, 1.2.2024

ÚLOHA ČÍSLO 1

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\log(2^n+n+1)\cdot \sin(n-\sqrt[3]{n^3+n})}_{a_n}$$

Označme $b_n = \log(2^n+n+1)$, $c_n = n-\sqrt[3]{n^3+n}$, $n\in\mathbb{N}$.
Potom $a_n = b_n \sin(c_n)$, $n\in\mathbb{N}$.

posloupnost $\{b_n\}$:

$$\log(2^n+n+1) = \log(2^n(1+2^{-n}(n+1))) = n\log 2 + \log(1+2^{-n}(n+1))$$

$$\lim \frac{b_n}{n} = \lim\left(\log 2 + \frac{1}{n}\log(1+2^{-n}(n+1))\right) = \log 2 + 0 = \log 2$$

platí: $\left.\begin{array}{l}\lim(1+2^{-n}(n+1)) = 1 \\ \log \text{ je spojitý v } 1\end{array}\right\} \overset{\text{Heine}}{\Longrightarrow} \lim\log(1+2^{-n}(n+1)) = 0$

posloupnost $\{c_n\}$:

$$c_n = n-\sqrt[3]{n^3+n} = \frac{-n}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n}+(\sqrt[3]{n^3+n})^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2}$$

$$\lim\frac{c_n}{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{3} \qquad \left.\begin{array}{l}\lim c_n = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}: c_n<0\end{array}\right\} \overset{\text{Heine}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty}\frac{\sin c_n}{c_n} = 1$$

závěrečný výpočet: $\lim a_n = \lim b_n\cdot\sin(c_n)$

$$= \lim\frac{b_n}{n}\cdot n\cdot\frac{\sin c_n}{c_n}\cdot c_n = \lim\frac{b_n}{n}\cdot\frac{\sin(c_n)}{c_n}\cdot\frac{c_n}{\frac{1}{n}} = \log 2\cdot 1\cdot\frac{-1}{3}$$
$$= -\frac{\log 2}{3}$$

BODOVÁNÍ

úprava $\{b_n\}$	... 4
úprava $\{c_n\}$	... 4
závěrečný výpočet	... 4

ÚLOHA ČÍSLO 2

$f(x) = (2+x)^{\cotg(\pi x)}$ $\qquad$ $g(x) = \cotg(\pi x)\cdot\log(2+x)$ 2b

$f(x) = e^{g(x)}$

$$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\log(2+x)}{1+x}\cdot(1+x)\cdot\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\log(2+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{\sin(\pi x)}\cdot\cos(\pi x) = (*)$$ 2b 1b

(1) $\lim_{x\to -1} \frac{\log(2+x)}{1+x} = 1$

$h(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$ $\qquad$ $\lim_{y\to 0} h(y) = 1$ 1b

$k(x) = 1+x$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1} k(x) = 0$

$\forall x \in P(-1,1):\ k(x) = 1+x \neq 0$ 1b

$\overset{\text{VLSF(P)}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{x\to -1} h(k(x)) = 1$

(2) $$\lim_{x\to -1} \frac{1+x}{\sin \pi x} = \lim_{x\to -1} \frac{1+x}{-\sin(\pi(x+1))} = \lim_{x\to -1} \frac{-1}{\pi}\cdot\frac{\pi(x+1)}{\sin(\pi(x+1))} = -\frac{1}{\pi}$$

VLSF (P)

vnitřní funkce $x \mapsto \pi(x+1)$ 2b

(P): $\forall x \in P(-1,1):\ \pi(x+1) \neq 0$

(3) cos je spojitý v $-\pi$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to -1} \cos(\pi x) = -1$ 1b

dokončení výpočtu: $(*) = 1\cdot\frac{-1}{\pi}\cdot(-1) = \frac{1}{\pi}$ 1b

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} e^{g(x)} = \underline{\underline{e^{\frac{1}{\pi}}}}$$ 1b

bylo na společném semináři

BODOVÁNÍ

- úprava pomocí exp-funkce ... 2
- úprava $g(x)$ ... 4
- VLSF v (1) ... 2
- VLSF v (2) ... 2
- dopočet ... 2

ÚLOHA ČÍSLO 3

spojitost: sgn je spojitá v každém bodě $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ f je spojitá v každém bodě $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

bod -2: $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2+} (x-1)^2 \cdot (-1) = -9 \neq 0 = f(-2)$

f není spojitá v -2

bod $+1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} (x-1)^2 = 0 \\ \text{sgn je omezená} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1)$

f je spojitá v 1

derivace v $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty) \\ -(x-1)^2, & x \in (-2, 1) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty) \\ -2(x-1) & x \in (-2, 1) \end{cases}$$

derivace v -2

$$f'_+(-2) = \lim_{x \to -2+} \frac{-(x-1)^2}{x+2} = -\infty \qquad \forall x \in P_+(-2, 1): x+2 > 0$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x \to -2-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = -\infty \qquad \forall x \in P_-(-2, -1): x+2 < 0$$

$\underline{f'(-2) = -\infty}$

BODOVÁNÍ

spojitost mimo $-2, 1$ ... 2
spojitost v -2 ... 2
spojitost v 1 ... 2
derivace mimo $-2, 1$ ... 2
derivace v -2 ... 3
derivace v 1 ... 2

derivace v 1

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 \operatorname{sgn}(x^2+x-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x-1)\operatorname{sgn}(x^2+x-2) = \underline{0}$$

ÚLOHA ČÍSLO 4

$$f(x) = \arcsin(1 - \log^2 x)$$

(a) $-1 \leq 1 - \log^2 x \leq 1$

$\log^2 x \leq 2$ $\qquad\qquad$ $-\log^2 x \leq 0$

$\log x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$ $\qquad\qquad$ $x \in (0, \infty)$

$x \in \langle e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}} \rangle$

$$\underline{\underline{\mathcal{D}(f) = \langle e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}} \rangle}}$$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (1 - \log^2 x)^2}} \cdot \left(-2 \log x \cdot \dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad x \in (e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}) \setminus \{1\}$

$$= -\frac{2 \log x}{x \sqrt{2 \log^2 x - \log^4 x}}$$

<u>bod 1</u> : f je spojitá v 1

$\lim\limits_{x \to 1+} f'(x) = -\sqrt{2} = f'_+(1)$ $\qquad$ $f'(1)$ neexistuje

$\lim\limits_{x \to 1-} f'(x) = \sqrt{2} = f'_-(1)$

(c) $f''(x) = -2 \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x} - \log x \left(\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x} + x \dfrac{\frac{1}{2}\left(4\log x \cdot \frac{1}{x} - 4\log^3 x \cdot \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x}}\right)}{x^2 (2\log^2 x - \log^4 x)}$

$\forall x \in (e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}) \setminus \{1\}$: jmenovatel $(x) > 0$

čitatel $(x) = (2\log^2 x - \log^4 x)^{\frac{1}{2}} - \log x\, (2\log^2 x - \log^4 x)^{\frac{1}{2}}$

$\qquad - \log x \cdot \frac{1}{2} x\, (2\log^2 x - \log^4 x)^{-\frac{1}{2}} \left(4 \log x \cdot \frac{1}{x} - 4\log^3 x \cdot \frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x}} \cdot \left(2\log^2 x - \log^4 x - \log x\, (2\log^2 x - \log^4 x)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} x \log x \left(4\log x \cdot \frac{1}{x} - 4\log^3 x \cdot \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x}} \cdot \left(2\log^2 x - \log^4 x - 2\log^3 x + \log^5 x - 2\log^2 x + 2\log^4 x\right)$$

$$\text{čitatel}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x}} \cdot \left(-2\log^3 x + \log^4 x + \log^5 x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\log^2 x - \log^4 x}} \cdot \log^3 x \cdot \left(\log^2 x + \log x - 2\right), \; x \in (e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}) \setminus \{1\}$$

$$f''(x) > 0 \iff x \in (e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}) \setminus \{1\} : \log^3 x \cdot (\log x + 2)(\log x - 1) > 0$$

$$\iff x \in (e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}) \wedge \log x \in (-2,0) \cup (1,\infty)$$

$$\iff x \in (e^{-\sqrt{2}}, 1) \cup (e, e^{\sqrt{2}})$$

$$f''(x) < 0 \iff x \in (1, e)$$

$-2 \quad 0 \quad 1$

$- \quad + \quad - \quad +$

1 ... není inflexním bodem, protože $f'(1)$ neexistuje

e ... inflexní bod

BODOVÁNÍ

(a) 1 bod

(b) $x \neq 1$ 2 body

$x = 1$ 2 body

(c) výpočet f'' 2 body

úprava f'' 2 body

znaménko f'' 2 body

závěr 2 body