Zadání písemné zkoušky z Matematiky 1

FSV UK, ZS 2023-24, 3. termín, 23. 1. 2024

---

1. Spočtěte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n\to\infty}\Big((n^2+n+1)^3-(n^3+n^2+1)^2\Big)\cdot\Big(\sqrt[3]{n^{15}+n^5+1}-\sqrt[3]{n^{15}+1}\Big).$$

(12 bodů)

2. Spočtěte následující limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0}\big(\sqrt{\cos x}\big)^{\left(\operatorname{cotg}^2(x)\right)}.$$

(12 bodů)

3. Spočtěte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-\cos x}{x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\};\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

(13 bodů)

4. Uvažujte funkci

$$f(x)=\operatorname{arctg}\Big(\frac{x^2}{x+2}\Big).$$

(a) Nalezněte intervaly monotonie f.

(b) Určete obor hodnot funkce f.

(b) Rozhodněte, zda je f konkávní na intervalu $[10,\infty)$.

(13 bodů)

Matematika 1, 3. termín, 23.1.2024

ÚLOHA ČÍSLO 1

$$b_n = (n^2+n+1)^3 - (n^3+n^2+1)^2 \qquad c_n = \sqrt[3]{n^{15}+n^5+1} - \sqrt{n^{15}+1}$$

$$a_n = b_n \cdot c_n$$

úprava $\{b_n\}$:

$$b_n = n^6 + 3n^4(n+1) + 3n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 - n^6 - 2n^3(n^2+1) + (n^2+1)^2$$

$$= n^6 + 3n^5 - n^6 - 2n^5 + P(n), \quad P \ldots \text{ polynom, st } P \leq 4$$

$$= n^5 + P(n)$$

úprava $\{c_n\}$:

$$c_n = \frac{(n^{15}+n^5+1) - (n^{15}+1)}{(n^{15}+n^5+1)^{\frac{2}{3}} + (n^{15}+n^5+1)^{\frac{1}{3}} \cdot (n^{15}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{15}+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{n^5}{n^{10} \cdot \underbrace{\left((1+n^{-10}+n^{-15})^{\frac{2}{3}} + (1+n^{-10}+n^{-15})^{\frac{1}{3}} (1+n^{-15})^{\frac{1}{3}} + (1+n^{-15})^{\frac{2}{3}} \right)}_{d_n}}$$

$$= \frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{d_n} \qquad \lim d_n = 1 + 1 \cdot 1 + 1 = 3$$

závěrečný výpočet

$$\lim a_n = \lim b_n \cdot c_n = \lim (n^5 + P(n)) \cdot \frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{d_n}$$

$$= \lim \left(1 + \frac{P(n)}{n^5}\right) \cdot \frac{1}{d_n} = (1+0) \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

BODOVÁNÍ

- úprava $\{b_n\}$ 4
- úprava $\{c_n\}$ 5
- závěrečný výpočet ... 3

ÚLOHA ČÍSLO 2

$$f(x) = (\sqrt{\cos x})^{\cotg^2 x}$$

$$g(x) = \cotg^2 x \cdot \log \sqrt{\cos x} \qquad f(x) = e^{g(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log(\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{2}\cdot \cos^2 x}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{(2)} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{(3)} \cdot \underbrace{\frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1}}_{(4)} = (*)$$

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{2}$ (spojitost fce cos)

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1$ (základní limita + VOAL)

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ (známá limita)

(4) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

$\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$

$\forall x \in P(0, \frac{\pi}{2}): \cos x \neq 1$

$\overset{\text{VLSF}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = 1$

dokončení výpočtu

$$(*) = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{g(x)} = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{4}}}}$$

tzv. na společném semináři

BODOVÁNÍ

- úprava pomocí exponenciální funkce ... 2
- úprava $g(x)$ ... 6
- ověření VLSF ve (4) ... 2

dopočet ... 2

ÚLOHA ČÍSLO 3

výpočet derivace pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{(e^x + \sin x)\cdot x - (e^x - \cos x)\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{xe^x + x\sin x - e^x + \cos x}{x^2}$$

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$$

výpočet derivace pro $x = 0$

- spojitost f v 0: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x\right) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 1 = f(0)$$

- $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x + x\sin x - e^x + \cos x}{x^2}$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + xe^x + \sin x + x\cos x - e^x - \sin x}{2x}$$

(*) l'Hôpital $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xe^x + x\cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}(e^x + \cos x) = 1$$

VĚTA $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f'(0) = 1}}$ $\quad f'_+(0) = f'_-(0) = \underline{\underline{1}}$

BODOVÁNÍ

- $x \neq 0$ ... 3
- spojitost v 0 ... 3
- výpočet limity f' ... 4
- výpočet $f'(0)$ ... 3

ÚLOHA ČÍSLO 4

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, f je spojitá na $D(f)$ -1

(a) intervaly monotonie

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2} \cdot \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2 + x^4} \qquad 1$$

$$= \frac{x(x+4)}{(x+2)^2 + x^4}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (-4, -2) \cup (-2, 0)$ 1

f je rostoucí na $(-\infty, -4\rangle$ a na $\langle 0, \infty)$

f je klesající na $\langle -4, -2)$ a na $(-2, 0\rangle$ 2

(b) (1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -2+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -2-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ + (a) $\Rightarrow$

(2) $f((-\infty, -4\rangle) = (-\frac{\pi}{2}, f(-4)\rangle = (-\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg}(-8)\rangle$

$f(\langle -4, -2)) = (-\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg}(-8)\rangle$

$f((-2, 0\rangle) = \langle 0, \frac{\pi}{2})$ $\quad f(\langle 0, \infty)) = \langle 0, \frac{\pi}{2})$

(1) $H(f) = (-\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg}(-8)\rangle \cup \langle 0, \frac{\pi}{2})$

(c) $f''(x) = \dfrac{(2x+4)\left((x+2)^2+x^4\right) - (x^2+4x)\left(2(x+2)+4x^3\right)}{\left((x+2)^2+x^4\right)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

1

čitatel$(x) = (2x+4)(x^2+4x+4+x^4) - (x^2+4x)(2x+4+4x^3)$

$= 2x^3+8x^2+8x+2x^5+4x^2+16x+16+4x^4$
$-2x^3-4x^2-4x^5-8x^2-16x-16x^4$

$= -2x^5-12x^4+8x+16$ 1

Pro každé $x \geq 10$ platí

$-2x^5-12x^4+8x+16 \leq -20x-12x+8x+16 = -24x+16 < 0$ 2

-1

Pro každé $x \in \langle 10, \infty)$ je $f''(x) < 0$ a f' je spojitá na $[10, \infty)$

$\Rightarrow$ f je konkávní na $\langle 10, \infty)$ 1

BODOVÁNÍ

(a) 4 body $\forall$ spojitost -1 $\forall\ \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ -1

(b) 4 body $\forall\ \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ -1

(c) 5 bodů