Riešenie záverečného testu Varianta A, ZS 2015/2016

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+3n+1} - \sqrt{n^3+3n-1}).$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+3n+1} - \sqrt{n^3+3n-1}) \frac{\sqrt{n^3+3n+1} + \sqrt{n^3+3n-1}}{\sqrt{n^3+3n+1} + \sqrt{n^3+3n-1}} \qquad (1b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+3n+1} + \sqrt{n^3+3n-1}} \qquad (1b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}})} \qquad (2b)$$

$$= \frac{2}{\infty} = 0 \qquad (2b)$$

2. (18b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x(\ln x)^2,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Dále určete tečnu ke grafu v každém jejím inflexním bodě.

Z ln plynie $D_f = (0, \infty)$ (0,5b)
$f(-x) \neq \pm f(x)$ a funkce nie je ani sudá ani lichá. Plynie priamo z D_f. (0,5b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, (x = 0 \notin D_f)$, t.j. $P_x[1, 0]$
$P_y : x = 0$ neexistuje (0,5b)
znamienko funkcie: funkcia je na $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ kladná (0,5b)

$\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-2 \ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0$, alebo aspoň z odôvodnenia, že ln je pomalšie ako polynóm (1b)
$\lim\limits_{x \to \infty} x(\ln x)^2 = \infty$ (1b)

$f'(x) = \ln x(\ln x + 2); x > 0 \Rightarrow f'$ je definovaná na celom D_f (2b)
nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{e^2}$ (0,5b)
monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na $(0, \frac{1}{e^2})$ a $(1, \infty)$ a funkcia je tu rastúca, $f'(x) < 0$ na $(\frac{1}{e^2}, 1)$ a funkcia je tu klesajúca (1b)
lokálne i globálne minimum funkcie je v bode $[1, 0]$
lokálne maximum $[\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}]$ (0,5b)

$f''(x) = \frac{2(\ln x + 1)}{x}; x > 0; f''$ je definovaná na celom D_f (2b)

nulové body 2. derivácie $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ (0,5b)
konvexita/ konkavita: $f''(x) < 0$ na $(0, \frac{1}{e})$ a funkcia je tu konkávna, $f''(x) > 0$ na $(\frac{1}{e}, \infty)$ a funkcia je tu konvexná (1b)
inflexný bod $[\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$ (0,5b)

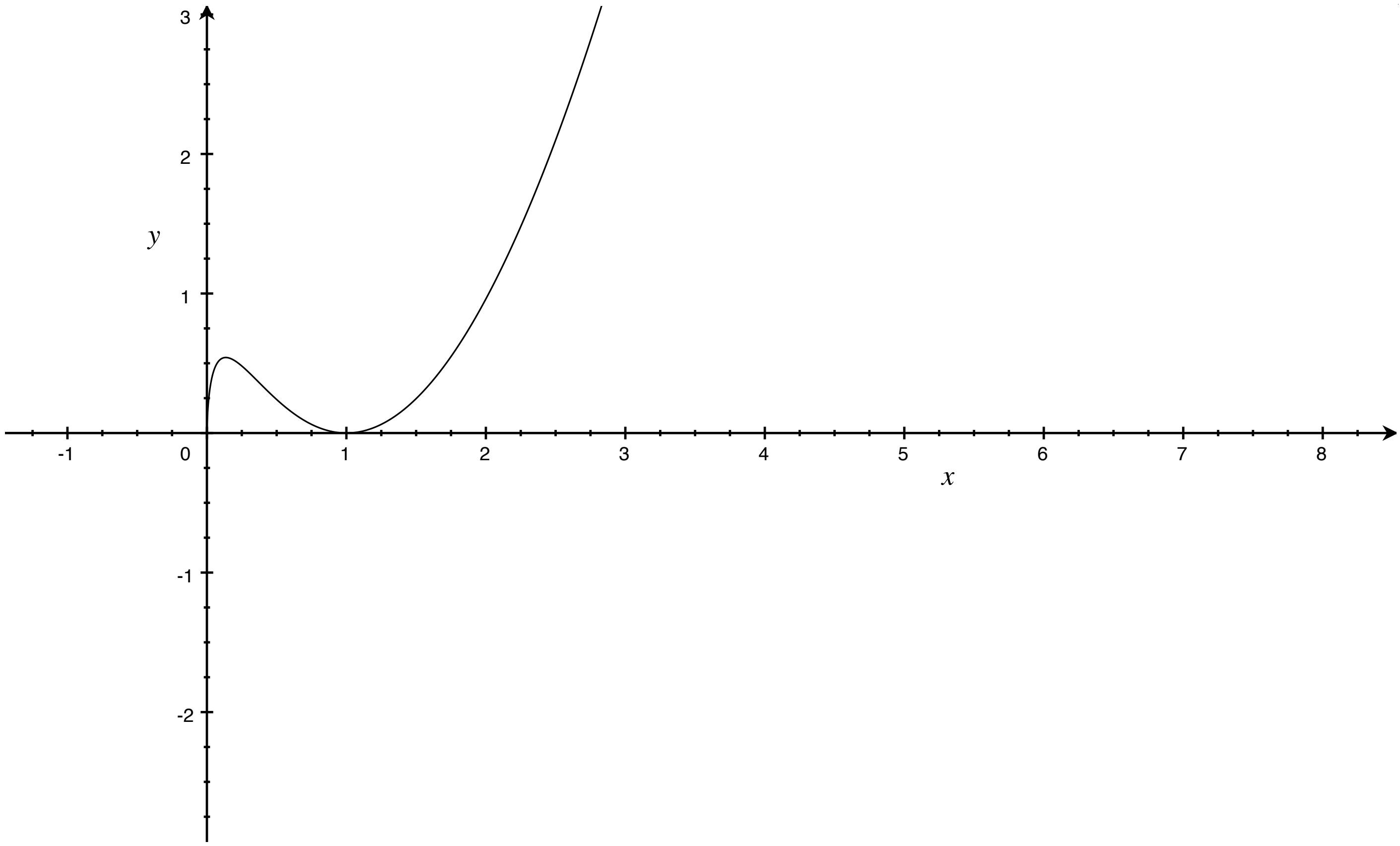
asymptota v $\infty : \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x(\ln x)^2}{x} = \infty$ neexistuje (1b)

tečna $y = kx + q$ v inflexnom bode $[\frac{1}{e}, \frac{1}{e}]$:
$k = f'(\frac{1}{e}) = -1$

$$q = y_0 - kx_0 = \frac{1}{e} - (-1)\frac{1}{e} = \frac{2}{e}$$

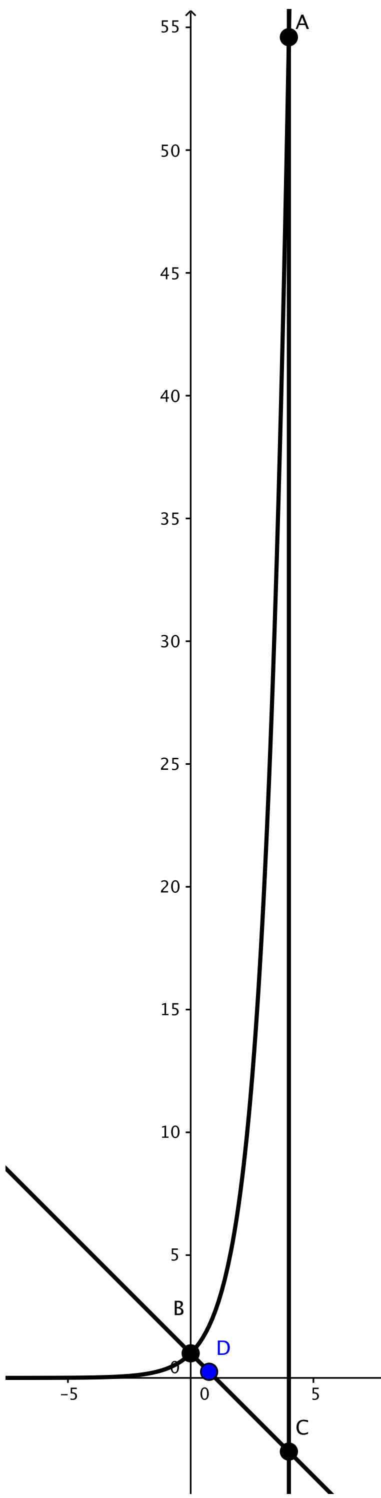
$$y = -1x + \frac{2}{e} \tag{2b}$$

graf: (3b)



3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 y$ na množině
$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -x+1 \le y \le e^x; x \le 4\}$.

Vrcholy: priesečník priamok $y = -x+1, x = 4$ je bod $C[4,-3]$ (1b)
priesečníky funkcie a priamok:
$y = e^x$ a $x = 4$ - dosadením:
Riešením je bod $A[4, e^4 \doteq 54,6]$ (1b)
$y = e^x$ a $y = -x+1$ - dosadením:
Riešením je bod $B[0,1]$ (1b)
Stacionárne body:
$\partial_x f = 3x^2 y$
$\partial_y f = x^3$
riešením je priamka $x = 0$, na ktorej neleží žiaden vnútorný bod množiny, bod B je vrchol na hranici a je kandidátom automaticky (2,5b)



Viazané extrémy:
Úsečka $\overline{AC}$
$x = 4, y \in (-3, e^4)$
$f(4,y) = g(x) = 64y$
$g'(y) = 64 \neq 0$ t.j. žiaden kandidát (3,5b)
Úsečka $\overline{BC}$
$x \in (0,4), y = -x+1$
$f(x,-x+1) = g(x) = -x^4 + x^3$
$g'(x) = -4x^3 + 3x^2 = x^2(-4x+3)$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0,4) \vee x = \frac{3}{4}$
v $x = \frac{3}{4}$ sa mení monotónia $g(x)$ a kandidát je $D[\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$ (3,5b)

Časť exponenciálnej funkcie AB (napr. dosadením):
$x \in (0,4), y = e^x$
$f(x,e^x) = g(x) = x^3 e^x$
$g'(x) = e^x x^2 (3+x)$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0,4) \vee x = -3 \notin (0,4)$
žiaden nový kandidát (3,5b)

Hodnoty $f(A) = 64e^4 \doteq 3494,3, f(B) = 0, f(C) = -192, f(D) = \frac{27}{256} \doteq 0,11$ (1b)
Maximum v bode $A[4, e^4]$,minimum v bode $C[4,-3]$ (1b).

4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = xy + yz$ na množině $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 1\}$

Výpočet napr. pomocou Jacobiánu
$(1) g_1 = x^2+y^2+z^2-1 = 0$
$(2) g_2 = x+y+z-1 = 0$

$$(3)\ \det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} y & x+z & y \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2(z-x)(x-y+z) = 0 \qquad (4b)$$

z (3) máme $(*) x = z$ alebo $(**) y = x+z$
dosadíme $(*)$ do $(1) 2x^2+y^2-1 = 0$ a $(2) 2x+y-1 = 0$
vyriešením sústavy dostávame $A[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], B[0,1,0]$ (6b)
dosadíme $(**)$ do $(1) 2x^2+2xz+2y^2-1 = 0$ a $(2) 2x+2z-1 = 0$
vyriešením sústavy dostávame $C[\frac{1}{4}(1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})]; D[\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})]$ (6b)
$f(A) = -\frac{4}{9}, f(B) = 0, f(C) = \frac{1}{4}, f(D) = \frac{1}{4}$
maximum v bodoch C, D, minimum v bode A (2b)
v prípade použitia Lagrangeových multiplikátorov: $(\lambda_1, \lambda_2) = A(\frac{5}{6}, -\frac{7}{9}); B(\frac{1}{2}, -1); C = D(0, -\frac{1}{2})$