

Planimetrie

Dělicí poměr, dvojpoměr, kolineace

1. Na přímce p jsou dány orientované úsečky \overrightarrow{AB} a \overrightarrow{CD} . Sestrojte na p jen pomocí pravítka (s rovnoběžkami, bez stupnice, bez pravého úhlu, bez úhloměru, bez kružítka):

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

d) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

e) $-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

c) $3\overrightarrow{AB}$

2. Nechť jsou dány různé body A, B . Určete jakých hodnot nabývá reálné číslo λ pro různé volby bodu C na přímce \overleftrightarrow{AB} , když platí:

$$\lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

(zn. $\lambda = (AB; C)$ pro $A \neq C \neq B$, dělicí poměr).

 Volte hodnoty $A = 0, B = 1$ a určete graf funkce $f(C) = (AB; C)$.

DÚ Je-li dělicí poměr $(AB; C) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, určete $(BA; C), (AC; B), (CA; B), (CB; A), (BC; A)$ v závislosti na λ .

3. Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé kolineární body. Definujme reálné číslo

$$\delta = \frac{(AB; C)}{(AB; D)}.$$

Určete kdy je δ kladné a kdy záporné číslo.

(zn. $\delta = (AB; CD)$, dvojpoměr).

4. Ověrte, že krajní body těžnice, její střed a těžiště příslušného trojúhelníku tvoří harmonickou čtveřici. Určete v jakém pořadí.

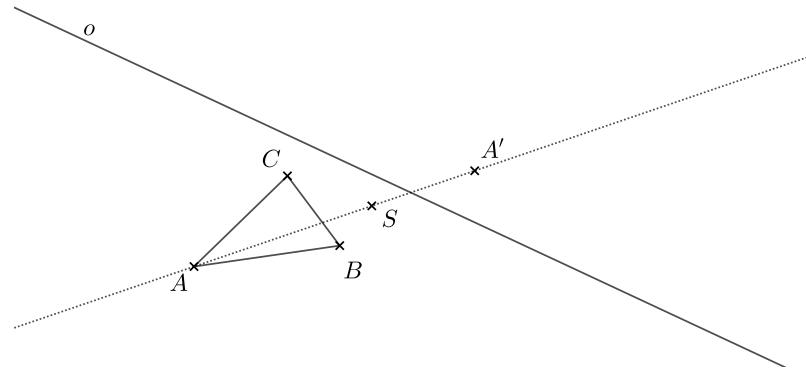
5. Nalezněte body A, B, C, D na celočíselné ose (souřadnice jsou celá čísla) tak, aby dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (t.j. A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřici) a určete hodnotu $(CD; AB)$.

DÚ 2 V rovině jsou dány body A a B . Na přímce \overleftrightarrow{AB} najděte množinu bodů X takových, že

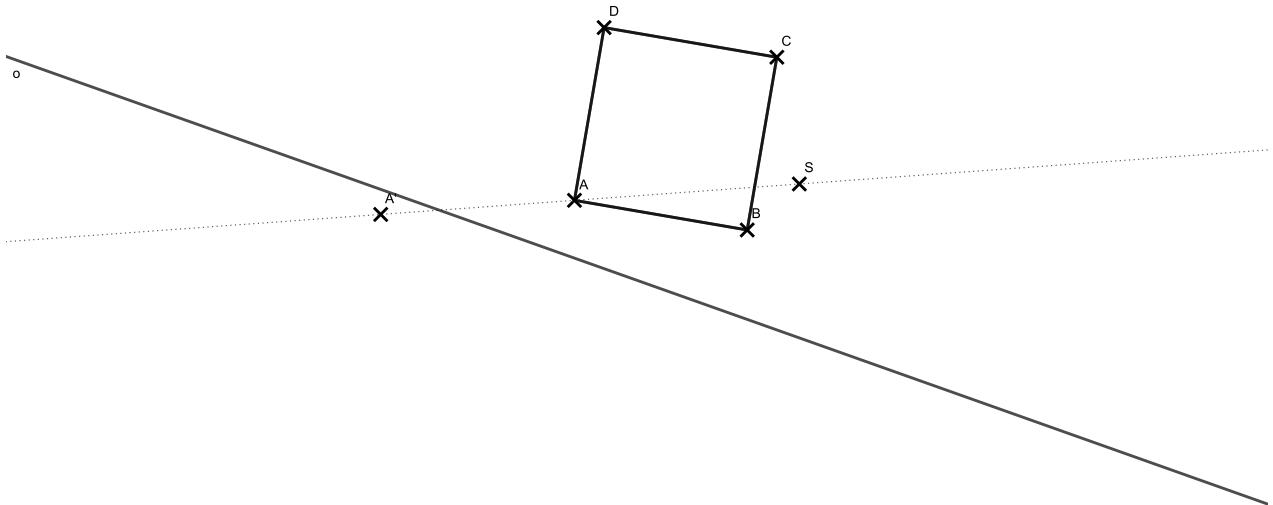
- $|(AB; X)| = 2$
- $|(AB; X)| = 1/3$
- $(AB; X) \cdot (BX; A) = 1$

6. Jsou dány 3 různé kolineární body A, B, C . Dělicí poměr $(AB; C)$ označme λ . Určete hodnotu rozdílu součtu dělicích poměrů $(AB; C)$ a $(AC; B)$ a součinu dělicích poměrů $(AB; C)$ a $(BA; C)$.
7. Na přímce \overleftrightarrow{AB} je dán bod D takový, že dělicí poměr $(AB; D) = 2$. Najděte bod C takový, že body A, B, C a D tvoří harmonickou čtveřici.
8. Je dána úsečka AB a její střed C . Na přímce \overleftrightarrow{AB} najděte bod D takový, že dvojpoměr $(AB; CD) = \frac{1}{2}$.
9. Je dán rovnostranný trojúhelník $\triangle ABC$. Bod P dělí stranu AC v dělicím poměru $(CA; P) = -2$ a bod Q dělí stranu AB v dělicím poměru $(AB; Q) = -\frac{1}{5}$. Dokažte, že délka úsečky PQ je rovna délce poloměru kružnice vepsané trojúhelníku $\triangle ABC$.

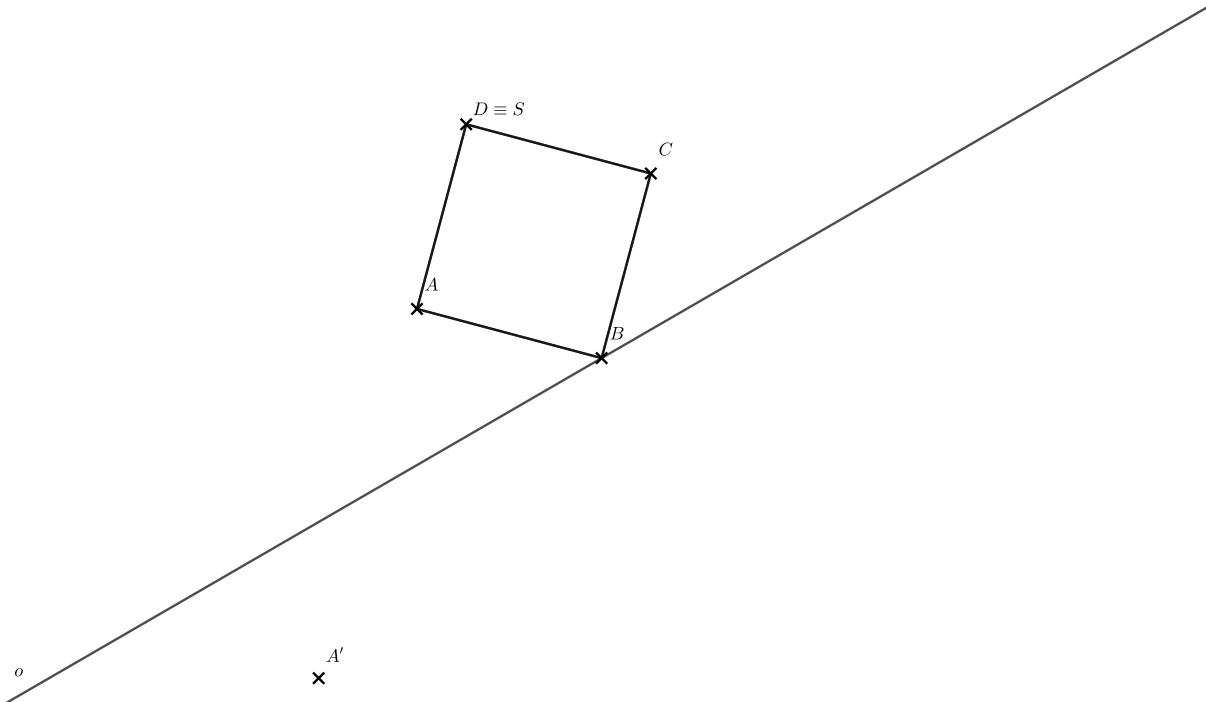
DÚ 3 Zobrazte trojúhelník ABC v středové kolineaci s osou o , středem S a párem odpovídajících si bodů $A \rightarrow A'$. Vyznačte (vyšrafujte) obraz množiny vnitřních bodů trojúhelníku ABC .



DÚ 4 V středové kolineaci se středem S , osou o a párem odpovídajících si bodů $A \rightarrow A'$ sestrojte obraz čtverce $ABCD$.

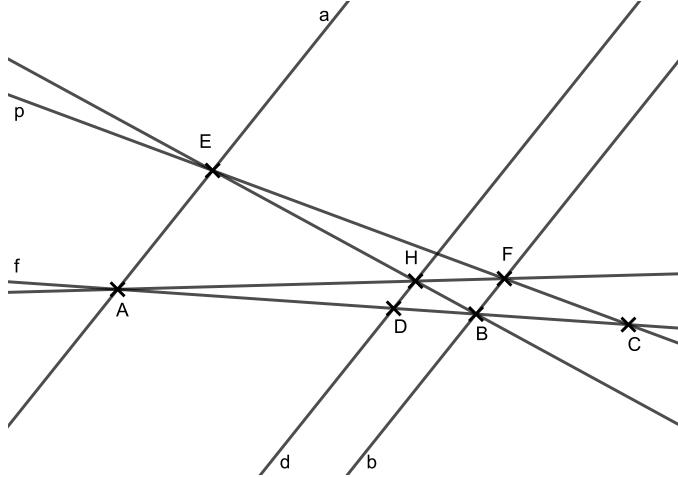


10. V rovině je dán čtverec $\square ABCD$. Sestrojte jeho obraz $\square A'B'C'D'$ ve středové kolineaci se středem S ve vrcholu D , osou o procházející vrcholem B rovnoběžně s AC a daným obrazem bodu A' , pro který platí $|A', o| = |A, o|$. Vyznačte (vyšrafujte/vybarvěte) plochu, na kterou se zobrazí vnitřek čtverce. Řešení úlohy stačí správně narysovovat do zadání.



Dokažte, že v rovině platí následovná konstrukce harmonické čtverice: Jsou dány různé kolineární body A, B, C . Volíme přímku $p \neq \overleftrightarrow{AB}$ takovou, že bod $C \in p$. Nechť a a b jsou rovnoběžné přímky $A \in a, B \in b$ ale $a, b \nparallel \overleftrightarrow{AB}, p$, které protínají přímku p v bodech $a \cap p = E, b \cap p = F$. Označme H průsečík $\overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{BE}$, jímž vedeme přímku d rovnoběžnou s a a b . Označme D průsečík přímek $d \cap \overleftrightarrow{AB}$, pak $(AB; CD) = -1$.

Nápověda: použijte podobnost.



Nechť jsou dány čtyři různé body A, B, C, D na přímce p a bod O , který na ní neleží. Označme $\overleftrightarrow{AO} = a$ a podobně b, c, d . Dokažte, že platí:

$$(AB; CD) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)}.$$

$\sin(a, c)$ je sinus orientovaného úhlu $\sphericalangle(a, c)$.

Návod: použijte např. sinovou větu, vzorce pro obsah $\triangle \dots$.

Dokažte, že středová kolineace zachovává dvojpoměr. Návod: použijte tvrzení z předchozí úlohy.

11. V rovině je dán čtverec $ABCD$ (viz obrázek). Nechť bod E leží na přímce \overleftrightarrow{BD} tak, že bod B je středem úsečky \overline{DE} .

(a) Na přímce \overleftrightarrow{DE} určete bod S takový, že dvojpoměr $(DB; ES) = 3$.

(b) Určete obraz čtverce $ABCD$ a množiny jeho vnitřních bodů (vyšrafujte, vybarvěte, ...) ve středové kolineaci se středem S a osou \overleftrightarrow{CE} , ve které je bod B obrazem bodu D .

