Planimetrie

Mnohoúhelníky

❄ Klasifikujte čtyřúhelníky podle těchto vlastností:

(a) rovnoběžnost

(b) kolmost

(c) velikost úhlu

(d) délka úsečky

❄ (Varignonova věta) Středy stran libovolného čtyřúhelníku tvoří rovnoběžník. Dokažte.

❄ Obě úhlopříčky rozdělují lichoběžník na čtyři trojúhelníky. Vyjádřete jejich obsahy pomocí základen a, c a výšky v.

1. Průsečík úhlopříček lichoběžníku leží na těžnici trojúhelníku, který vznikne prodloužením jeho nerovnoběžných stran. Dokažte.

2. V rovině je dán lichoběžník $ABCD$ se základnou AB a přímka p rovnoběžná s $\overleftrightarrow{AB}$. Označme průsečíky: $\overleftrightarrow{AD} \cap p = E$; $\overleftrightarrow{AC} \cap p = F$; $\overleftrightarrow{BC} \cap p = G$; $\overleftrightarrow{BD} \cap p = H$. Dokažte, že $|EF| = |GH|$.

3. ☠) Sestrojte libovolný bicentrický čtyřúhelník, který není čtverec.

   b) Určete obsah bicentrického čtyřúhelníku.

4. Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: $a = AB, b = BC, c = CD, \alpha = \sphericalangle DAB$. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce, konstrukci a diskuzi existence a počtu řešení.

5. Je dán půlkruh nad průměrem A_2B_2 a konvexní čtyřúhelník $K_1L_1M_1N_1$. Sestrojte čtyřúhelník $K_2L_2M_2N_2$ podobný čtyřúhelníku $K_1L_1M_1N_1$ tak, aby jeho vrcholy K_2L_2 ležely na průměru A_2B_2 a vrcholy M_2N_2 na kružnici ohraničující půlkruh.

6. Dokažte, že úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku o stranách a, b, c, d jsou na sebe kolmé právě tehdy, když je $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

7. V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém platí $|AB| = |BC| = x$ a $|CD| = |DA| = y$. Určete nutnou podmínku pro to, aby jeho obsah byl $S = xy$. Své tvrzení zdůvodněte.

❄ Máme za úkol pletivem vymezit pozemek ve tvaru pravoúhelníku tak, že jednu stranu pozemku tvoří (rovná) zeď vedlejšího pozemku. Jaké mají být rozměry pozemku, aby jeho plocha byla co největší, máme-li k dispozici 36m pletiva?

❄ Proveďte **náčrt, rozbor a diskuzi** konstrukční úlohy: V rovině je dána přímka p, kružnice k a bod M. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec $ABCD$ tak, aby jeho úhlopříčka AC byla částí přímky p, bod M byl středem strany BC a aby bod B ležel na kružnici k.

8. Proveďte **náčrt, rozbor a diskuzi** konstrukční úlohy: V rovině je dána úsečka AB a kružnice $k(S, r)$. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby body C a D ležely na kružnici k.

❄ Dokažte, že obsah konvexního čtyřúhelníku s úhlopříčkami, které mají délky e, f a svírají úhel φ, je roven

$$P = \frac{1}{2} e f \sin \varphi.$$

9. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž je $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 90°$. Středy základen AB a CD jsou po řadě M a N. Určete délku úsečky MN, je-li $|AB| = a$ a $|CD| = c$.

❄ Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž je $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 90°$. Středy základen AB a CD jsou po řadě M a N. Určete délku úsečky MN, je-li $|AB| = a$ a $|CD| = c$.

10. Na úhlopříčce obdélníku určete bod, který po spojení úsečkami se třemi jeho vrcholy, rozdělí obdélník na tři útvary o shodném obsahu.

11. Je dán pětiúhelník, jehož vnitřní úhly jsou shodné a po sobě následující strany mají délky 2,3 a 4. Určete délky zbývajících stran.

12. Pravidelný mnohoúhelník vepsaný kružnici poloměru r má 20 úhlopříček. Určete jeho obsah.

❄ Dokažte, že délka úhlopříčky a délka strany pravidelného pětiúhelníku jsou v poměru zlatého řezu. (viz literatura v moodle)

❄ Zkonstruujte pravidelný pětiúhelník, popište postup konstrukce.

13. Zkonstruujte pravidelný desetiúhelník, popište postup konstrukce.

14. Dokažte, že obsah pravidelného osmiúhelníku je roven součinu nejkratší a nejdelší jeho úhlopříčky.