Předmluva

Tento text o plošném a křivkovém integrálu měl být původně částí mých skript „Vybrané partie z matematické analýzy pro 2. ročník“, které vyšly na podzim 2003 v Matfyzpresu pod chybným názvem („pro 1. a 2. ročník“). Nebyl však do těchto skript zařazen; hlavně proto, že se příliš rozrostl.

Výklad vychází hlavně z [Kop], ale také z [ČM], [LM], [Ru1], [Zo] a z jedné mé výběrové přednášky na MFF UK. K jeho pochopení je nutné znát teorii míry a integrálu v rozsahu přednášeném ve 3. semestru oboru matematika.

Tuto verzi zveřejňuji jako studijní materiál pro výběrovou přednášku „Doplňující partie z matematické analýzy“. K ní je připojen výklad o plochách v $\mathbb{R}^n$ ze zmíněných skript.

Děkuji kolegům prof. J. Malému, doc. J. Ratajovi a doc. J. Staré za připomínky k částem předchozích verzí.

Dále děkuji P. Charvátovi za zhotovení obrázků.

Tento text ještě neprošel posledním podrobným čtením, takže jistě obsahuje řadu drobných nedostatků. Budu vděčen za upozornění na faktické chyby. Omlouvám se, že na řadě míst se odkazuji na tvzení s otazníkem místo čísla. Jde většinou o tvrzení z výše uvedených skript. Většinou lze odkaz zjistit podle souboru SKRIPTA vystaveného na mé webové stránce, který obsahuje předběžnou verzi zmíněných skript i s textem o plošném integrálu - s mnoha chybami a bez obrázků. Mám v úmyslu tyto citace doplnit, do Dodatků přidat text o orientaci k-rozměrné plochy, opravit další nalezené chyby, a pak text vystavit na své webové stránce.

Praha, 22. dubna 2004 Luděk Zajíček

1. Hladké k-rozměrné plochy v $\mathbb{R}^n$

Vyložíme pouze základní fakta teorie k-rozměrných ploch, která umožňují přirozený a elegantní výklad teorie vázaných extrémů.

Začněme neformální diskusí následující otázky: Které podmnožiny $\mathbb{R}^2$ je přirozené považovat za hladké 1-rozměrné plochy („křivé čáry“) v $\mathbb{R}^2$?

Naší intuitivní představě jistě vyhovuje libovolná přímka; dále také asi graf hladké funkce f (tedy množina $\{(x, y)\colon\ y = f(x)\}$ a také „graf“ hladké funkce $x = g(y)$ (přesněji: množina $\{(x, y)\colon\ x = g(y)\}$). Naší představě však také asi vyhovuje kružnice $\{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 = 1\}$. Ta však není ani grafem funkce $y = f(x)$ ani „grafem“ funkce $x = g(y)$, je však lokálně jednoho z těchto typů.

Jako přirozená se tedy jeví „lokální definice“: hladkou 1-rozměrnou plochu budeme definovat jako takovou množinu $M \subset \mathbb{R}^2$, pro jejíž každý bod $x \in M$ existuje otevřené okolí U bodu x takové, že $U \cap M$ je „speciální kus hladké 1-rozměrné plochy“: „hladce zdeformovaná otevřená úsečka“. Pod tímto pojmem můžeme rozumět množinu, která je grafem funkce $y = f(x), x \in (a, b)$ nebo $x = g(y)$, $y \in (c, d)$; jsou však možné i jiné přirozené definice (například obraz úsečky při hladké deformaci roviny nebo obraz intervalu (a, b) při vhodném hladkém zobrazení $\varphi\colon\ (a, b) \to \mathbb{R}^2$).

Tyto přístupy v obecném případě vedou k různým pojmům „kusu k-rozměrné C^p-plochy“ v $\mathbb{R}^n$. Je důležitou a zajímavou skutečností, že tyto *různé přístupy* vedou ke *stejnému pojmu* k-rozměrné C^p-plochy v $\mathbb{R}^n$.

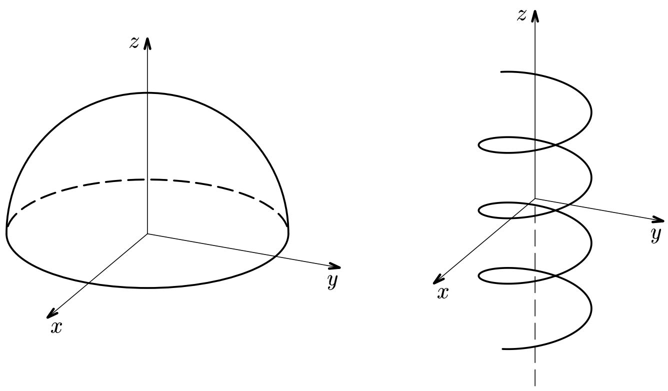
Úmluva Použijeme-li kdekoliv v dalším výkladu symbol C^p, rozumí se, že $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ je libovolné pevně zvolené číslo. Není-li řečeno jinak, jsou v dalším k, n přirozená čísla, pro která $k < n$.

Je vhodné upozornit, že dále užívaná terminologie týkající se „kusů ploch“ není v literatuře běžná.

Různé typy „kusů ploch“

Explicitně zadaný kus plochy

Zhruba řečeno, jde o množinu, která je zadaná (přesněji: *lze zadat*) jako „graf funkce (zobrazení)“. Jinak a trochu přesněji: pro určení bodu v explicitně zadaném kusu k-rozměrné plochy stačí znát jeho jistých k souřadnic; ostatních $n-k$ souřadnic pak můžeme jednoznačně dopočítat.



Obr. 1.1.

1.1 Definice. *Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy v $\mathbb{R}^n$ $(1 \le k < n)$, jestliže existují přirozená čísla $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, neprázdná otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $f\colon G \to \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^p takové, že*

$$M = \{(x_1, \dots, x_n)\colon (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\},$$

kde $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}$ jsou zbylé souřadnice, přesněji: platí $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k}$ a $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$.

1.2 Příklad. a) Horní polosféra $\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 < 1,\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$ znázorněná na obr. 1.1 vlevo je explicitně zadaný kus 2-rozměrné C^∞-plochy v $\mathbb{R}^3$.

b) Šroubovice $\{(x, y, z)\colon x = r\cos cz,\ y = r\sin cz\}$ $(r > 0,\ c \ne 0)$ (srov. obr. 1.1 vpravo) je explicitně zadaný kus 1-rozměrné C^∞-plochy v $\mathbb{R}^3$.

c) Nechť G je libovolná otevřená neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^2$. Pak množina

$$M = \{(x, y, z, t)\colon (y, t) \in G,\ x = y^2 t,\ z = \sin(y + t)\}$$

je explicitně zadaný kus 2-rozměrné C^∞-plochy v $\mathbb{R}^4$.

d) Množina $\bigcup_{n=1}^\infty (n, n + 1/2) \times \{1\}$ je podle naší definice explicitně zadaný kus 1-rozměrné C^∞-plochy v $\mathbb{R}^2$, i když není souvislá – souvislost kusu plochy jsme v definici nepožadovali.

c) Kružnice $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$ není explicitně zadaný kus 1-rozměrné C^1-plochy v $\mathbb{R}^2$, ale je sjednocením 4 takových kusů:

$$\{(x, y)\colon x \in (-1, 1),\ y = \sqrt{1 - x^2}\},\ \{(x, y)\colon x \in (-1, 1),\ y = -\sqrt{1 - x^2}\},$$

$$\{(x, y)\colon y \in (-1, 1),\ x = \sqrt{1 - y^2}\},\ \{(x, y)\colon y \in (-1, 1),\ x = -\sqrt{1 - y^2}\}.$$

Parametricky zadaný kus plochy

Myšlenka parametrického zadání plochy je analogická obvyklé definici křivky: bod k-rozměrné plochy $P \subset \mathbb{R}^n$ by měl být určen zadáním k reálných parametrů, tj. $P = \varphi(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^k$ a φ je „rozumné zobrazení".

Pro parametrické zadání kusu k-rozměrné C^p-plochy v $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq k < n)$, je přirozené uvažovat otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^k$ a prosté zobrazení $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ třídy C^p. Hlubší rozbor ukazuje, že je vhodné připouštět pouze zobrazení φ, která splňují další dodatečné požadavky (viz Příklad 1.6 a Příklad 1.8).

1.3 Definice. *Nechť $1 \leq k < n$ jsou přirozená čísla, $G \subset \mathbb{R}^k$ je neprázdná otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení. Řekneme, že $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$, jestliže platí:*

(i) *Zobrazení φ je třídy C^1 na G.*
(ii) *Derivace $\varphi'(a)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je prosté zobrazení pro každý bod $a \in G$.*
(iii) *Zobrazení $\varphi\colon G \to \varphi(G)$ je homeomorfismus.*

1.4 Definice. *Nechť $1 \leq k < n$. Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^n$ je parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy v $\mathbb{R}^n$, jestliže existuje neprázdná otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ třídy C^p takový, že $M = \varphi(G)$.*

1.5 Poznámka.

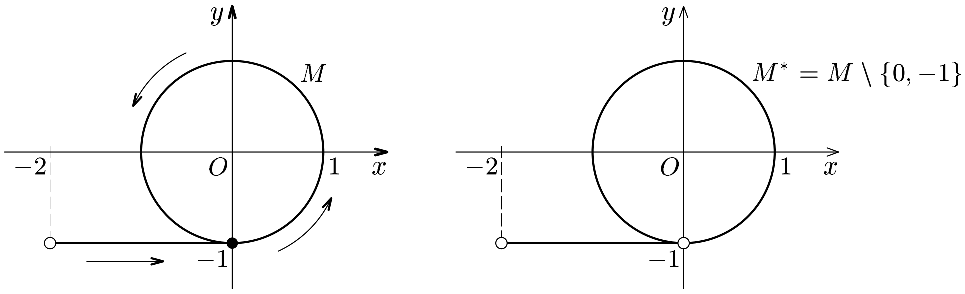
(a) Pokud G je navíc souvislá množina (případně množina homeomorfní s otevřenou koulí v $\mathbb{R}^k$), používá se v literatuře pro $\varphi(G)$ někdy název „jednoduchá plocha" nebo „elementární plocha".

(b) Podmínka (ii) z Definice 1.3 je *podmínka regularity.* Z lineární algebry je známo, že tuto podmínku lze ekvivalentně psát i v jiných formách:
$(ii)^*$ $\dim\bigl(\varphi'(a)(\mathbb{R}^k)\bigr) = k$ pro každý bod $a \in G$.
$(ii)^{**}$ Hodnost Jacobiho matice zobrazení φ je v každém bodě $a \in G$ rovna k.
Regulárními zobrazeními z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$ $(k < n)$ se často rozumí zobrazení s vlastnostmi (i) a (ii). My tento pojem nebudeme zavádět; „regulární homeomorfismus" je pro nás „nedělitelný termín".

(c) Vzhledem k tomu, že z podmínky (i) vyplývá spojitost φ, lze podmínku (iii) (ekvivalentně) nahradit kteroukoliv z následujících dvou podmínek, které jsou ekvivalentní spojitosti φ^{-1}:
$(iii)^*$ Zobrazení φ je prosté a pro každou otevřenou množinu $H \subset G$ je $\varphi(H)$ množina (relativně) otevřená ve $\varphi(G)$.
$(iii)^{**}$ Zobrazení φ je prosté a pro každou posloupnost (t_n) v G a $t \in G$ platí implikace $\varphi(t_n) \to \varphi(t) \Longrightarrow t_n \to t$.

(d) Pokud $k = n$ a $G \subset \mathbb{R}^n$, pak zobrazení $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ splňuje podmínky (i), (ii), (iii), právě když φ je difeomorfismus. To plyne okamžitě z Věty (?)

Následující příklad ukazuje, že kdybychom v Definici 1.3 vynechali podmínku regularity (ii), plocha $\varphi(G)$ by nemusela být hladká.



Obr. 1.2.

1.6 Příklad. Nechť $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = (x^3, |x^3|)$. Pak $\varphi(\mathbb{R})$ je grafem funkce $f(x) = |x|$, takže to není „hladká" 1-rozměrná plocha. Předpoklady (i) a (iii) se snadno ověří; podmínka (ii) však není splněna pro $a = 0$.

1.7 Příklad. Předpokládejme, že $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, (1 \le k < n)$ je lineární zobrazení. Pak $\varphi'(a) = \varphi$ pro každý bod $a \in \mathbb{R}^k$. Podmínka regularity (ii) je tedy splněna právě tehdy, když φ je prosté. V tom případě je však vždy splněna i podmínka (iii). To můžeme zdůvodnit tak, že $\varphi(\mathbb{R}^k)$ je konečně rozměrný normovaný lineární podprostor $\mathbb{R}^n$, a protože zobrazení $\varphi^{-1}\colon \varphi(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^k$ je lineární, je nutně spojité (viz Věta (?)). Zcela analogický je případ, kdy φ je zúžení lineárního (resp. afinního) zobrazení na neprázdnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$.

Následující příklad však ukazuje, že obecně nelze podmínku (iii) z definice regulárního difeomorfismu nahradit předpokladem prostoty φ.

1.8 Příklad. (Srov. obr. 1.2).
Uvažujme množinu

$$M := ((-2,0) \times \{-1\}) \cup \{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Položíme nyní $G := (-2, 2\pi)$ a budeme uvažovat prostou parametrizaci $\varphi\colon G \to M$, která popisuje pohyb bodu, který v „časovém intervalu" $(-2,0)$ (jednotkovou rychlostí) probíhá úsečku $(-2,0)\times\{-1\}$ „zleva doprava" a pak v „časovém intervalu" $[0,2\pi]$ probíhá kružnici $\{(x,y)\colon\ x^2+y^2=1\}$ v kladném smyslu. Přesněji:

$$\varphi(t) = (t,-1),\ t \in (-2,0), \quad \varphi(t) = (\cos(-\pi/2+t), \sin(-\pi/2+t)),\ t \in [0,2\pi).$$

Elementární výpočet ukazuje, že φ splňuje podmínky (i) a (ii). Navíc je φ zřejmě prosté; není však regulárním homeomorfismem z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$, protože $\varphi^{-1}\colon M \to G$ *není spojité*. To ukážeme pomocí podmínky $(iii)^{**}$ z Poznámky 1.5: klademe-li $t_k = 2\pi - 1/k$ a $t = 0$, platí $\varphi(t_k) \to \varphi(t) = (0,-1)$, ale neplatí $t_k \to t$. Lze ukázat, že M vůbec není parametricky zadaný kus 1-rozměrné C^p-plochy v $\mathbb{R}^2$. „Vadí" však pouze bod $(0,-1)$: zúžení φ na otevřenou množinu $(-2,0)\cup(0,2\pi)$ je regulární homeomorfismus z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$, takže $M^*\colon = M \setminus \{(0,-1)\}$ je parametricky zadaný kus 1-rozměrné C^1-plochy v $\mathbb{R}^2$.

S přesným ověřováním spojitosti φ^{-1} mohou být potíže i tehdy, když se věc zdá být z geometrického názoru zcela jasná. V případě, že G je omezená množina, lze často užít následující tvrzení.

1.9 Tvrzení. *Nechť $1 \le k < n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je neprázdná omezená otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté spojité zobrazení. Předpokládejme, že existuje spojité zobrazení $\widetilde{\varphi}\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$, které rozšiřuje zobrazení φ. Pak $\varphi\colon G \to \varphi(G)$ je homeomorfismus, právě když platí podmínka*

$$\widetilde{\varphi}(\partial G) \cap \varphi(G) = \emptyset. \tag{1.1}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že platí podmínka (1.1). Víme, že zobrazení $\varphi^{-1}\colon \varphi(G) \to G$ je spojité, právě když vzor $(\varphi^{-1})^{-1}(A) = \varphi(A)$ je (relativně) uzavřená množina ve $\varphi(G)$ pro každou (relativně) uzavřenou množinu A v G. Nechť tedy A je relativně uzavřená v G, tj. $A = \overline{A} \cap G$. Protože G je omezená, je podle Věty (?) $\overline{A}$ kompaktní. Podle Věty (?) je tedy množina $\widetilde{\varphi}(\overline{A})$ kompaktní, a proto je uzavřená v $\mathbb{R}^n$. Protože zřejmě $\overline{A} = A \cup (\overline{A} \cap \partial G)$, podle podmínky (1.1) platí

$$\widetilde{\varphi}(\overline{A}) \cap \varphi(G) = \varphi(A) \cup \big(\widetilde{\varphi}(\overline{A} \cap \partial G) \cap \varphi(G))\big) = \varphi(A),$$

takže dostáváme, že $\varphi(A)$ je (relativně) uzavřená množina ve $\varphi(G)$, což jsme měli dokázat. Nyní předpokládejme, že podmínka (1.1) neplatí. Existují tedy body $t \in G$ a $t^* \in \partial G$, pro které $\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(t^*)$. Zvolíme-li nyní posloupnost (t_n) bodů z G konvergující k t^*, dostáváme, že $\varphi(t_n) \to \varphi(t)$, takže neplatí podmínka $(iii)^{**}$ z Poznámky 1.5 a $\varphi\colon G \to \varphi(G)$ není homeomorfismus.

1.10 Příklad. Nechť $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení „zavádějící sférické souřadnice“ z Příkladu (?). Uvažujme zobrazení

$$\Psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi(\theta,\varphi) = S(1,\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

Z vlastností S vyplývá, že $\Psi(\mathbb{R}^2) = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Zřejmě Ψ je třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$ a úvahou nebo výpočtem snadno dostáváme, že platí rovnost $\Psi'(\theta,\varphi)\,(h,k) = S'(1,\theta,\varphi)\,(0,h,k)$. Protože $J_S(1,\theta,\varphi) = \sin\theta$, je lineární zobrazení $\Psi'(\theta,\varphi)$ prosté, pokud $\sin\theta \ne 0$. Položíme-li $G\colon = (0,\pi) \times (0,2\pi)$ a $\Phi := \Psi\restriction_G$, splňuje tedy Φ podmínky (i) a (ii) z Definice 1.3. Z geometrického názoru „je vidět“ a snadno se přesně dokáže, že Φ je prosté a $\Phi(G)$ je jednotková sféra bez „nultého poledníku“, tj.

$$\Phi(G) = P := \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 = 1\} \setminus \{(x,y,z)\colon y = 0,\ x \ge 0,\ x^2+z^2 = 1\}.$$

Zobrazení $\widetilde{\Phi} := \Psi\restriction_{\overline{G}}$ je zřejmě spojité rozšíření Φ a je snadné ověřit platnost podmínky (1.1). Zobrazení Φ je tedy regulární homeomorfismus a P je parametricky zadaný kus dvourozměrné C^1-plochy.

Kus k-rozměrné C^p-plochy zadaný difeomorfismem.

1.11 Definice. *Nechť $1 \le k < n$. Řekneme, že $\emptyset \ne M \subset \mathbb{R}^n$ je kus k-rozměrné C^p-plochy zadaný difeomorfismem, jestliže existuje otevřená množina $H \subset \mathbb{R}^n$ a difeomorfismus $\psi\colon H \to \mathbb{R}^n$ třídy C^p takový, že*

$$M = \psi(H \cap \{(x_1,\dots,x_n)\colon x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}).$$

1.12 Poznámka. Kdybychom v předchozí definici místo lineárního k-rozměrného prostoru $\{(x_1,\ldots,x_n)\colon x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots=x_n=0\}$ připouštěli libovolný k-rozměrný afinní podprostor $\mathbb{R}^n$, dostali bychom stejný pojem. To je snadno vidět z toho, že libovolné dva k-rozměrné afinní podprostory $\mathbb{R}^n$ lze na sebe převést (afinním) difeomorfismem, který zobrazuje $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$.

Implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.

1.13 Definice. *Nechť $1 \le k < n$. Řekneme, že $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ je implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy v $\mathbb{R}^n$, existuje-li otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ a zobrazení $g\colon G \to \mathbb{R}^{n-k}$ takové, že g je třídy C^p v G, Jacobiho matice $[g'(x)]$ zobrazení g má v každém bodě $x \in G$ hodnost $n-k$ a*

$$M = \{x \in G\colon\ g(x) = 0\}.$$

Dále budeme potřebovat následující snadné vztahy mezi právě definovanými pojmy.

1.14 Tvrzení. *Nechť $1 \le k < n$ a $M \subset \mathbb{R}^n$. Uvažujme následující výroky.*

(i) *M je explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.*
(ii) *M je parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.*
(iii) *M je implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.*
(iv) *M je kus k-rozměrné C^p-plochy zadaný difeomorfismem.*

Pak platí následující implikace:

$$(i) \Rightarrow (ii),\ (i) \Rightarrow (iii),\ (i) \Rightarrow (iv),\ (iv) \Rightarrow (ii).$$

Důkaz. „$(i) \Rightarrow (ii)$“: Předpokládejme, že M je explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy. Pro větší přehlednost předpokládejme, že pro indexy $i_1,\ldots,i_k$ z Definice 1.1 platí $i_1=1,\ldots,i_k=k$. Pak existuje neprázdná otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $f\colon G \to \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^p takové, že

$$M = \{(x_1,\ldots,x_n)\colon\ (x_{k+1},\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_k)\}.$$

Je snadno vidět, že zobrazení $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ dané předpisem $\varphi(t) = (t, f(t))$ je regulární homeomorfismus z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$ a $\varphi(G) = M$. Množina M je tedy parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy. Je zřejmé, že případ obecných indexů $i_1,\ldots,i_k$ je zcela obdobný, jen formální zápis je méně přehledný.

„$(i) \Rightarrow (iii)$“: Opět předpokládáme, že $i_1=1,\ldots,i_k=k$ a G, f mají stejný smysl jako výše. Položme $G^* := G \times \mathbb{R}^{n-k}$ a definujme zobrazení $g\colon G^* \to \mathbb{R}^{n-k}$

předpisem $g(t,u) := u - f(t)$. Snadno vidíme, že $g \in C^1(G^*)$, Jacobiho matice zobrazení g má v každém bodě $(t,u) \in G^*$ hodnost $n-k$ a

$$g(t,u) = 0 \iff u = f(t) \iff (t,u) \in M,$$

takže M je skutečně implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.

„$(i) \Rightarrow (iv)$“: Stále předpokládáme, že $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$ a G, f jsou jako výše. Položme $H := G \times \mathbb{R}^{n-k}$ a $\psi(t,u) := (t, u + f(t))$ pro $(t,u) \in H$. Zřejmě $\psi^{-1}(\tau, v) = (\tau, v - f(\tau))$, $(\tau, v) \in H$, takže ψ je difeomorfismus H na H. Tvrzení (iv) vyplývá z rovností

$$\psi(H \cap \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0\}) = \{(t, f(t))\colon\ t \in G\} = M.$$

„$(iv) \Rightarrow (ii)$“: Nechť M je kus k-rozměrné C^p-plochy zadaný difeomorfismem. Existuje tedy otevřená množina $H \subset \mathbb{R}^n$ a difeomorfismus $\psi\colon\ H \to \mathbb{R}^n$ takový, že

$$M = \psi\left(H \cap \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0\}\right).$$

Nechť $G := \{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k\colon\ (t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0) \in H\}$ a pro $t = (t_1, \ldots, t_k) \in G$ položme $\varphi(t) = \psi(t_1, \ldots, t_k, 0, \ldots, 0)$. Zřejmě $\varphi(G) = M$ a snadno lze ověřit, že φ je regulární homeomorfismus z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$. Je tedy M parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.

Obtížnější je následující důležité tvrzení, a proto je dokážeme podrobněji.

1.15 Tvrzení. *Nechť $1 \le k < n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy a $a \in M$. Pak existuje otevřené okolí U bodu a takové, že $U \cap M$ je explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.*

Důkaz. Podle definice existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon\ G \to \mathbb{R}^n$ takový, že $M = \varphi(G)$. Označme $t_0 := \varphi^{-1}(a)$. Protože hodnost Jacobiho matice zobrazení φ v bodě t_0 je podle předpokladu k a řádky této matice jsou

$$\operatorname{grad} \varphi_1(t_0), \ldots, \operatorname{grad} \varphi_n(t_0),$$

existují indexy $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ takové, že vektory

$$\operatorname{grad} \varphi_{i_1}(t_0), \ldots, \operatorname{grad} \varphi_{i_k}(t_0)$$

jsou lineárně nezávislé. Položíme-li

$$\omega(t) := (\varphi_{i_1}(t), \ldots, \varphi_{i_k}(t)),\ t \in G,$$

dostáváme, že $\omega\colon\ G \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení třídy C^p na G, jehož Jacobiho matice v bodě t_0 je regulární. Podle Věty (?) o inverzním zobrazení existuje otevřené okolí V bodu t_0 takové, že zúžení $\tau := \omega\restriction_V$ je difeomorfismus. Je tedy $W := \tau(V)$ otevřená podmnožina $\mathbb{R}^k$ a τ^{-1} je difeomorfismus W na V. Definujme ještě

$$\psi(t) := (\varphi_{j_1}(t), \ldots, \varphi_{j_{n-k}}(t)), \quad t \in G,$$

kde $j_1 < \dots < j_{n-k}$ jsou zbylé indexy $(\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\})$. Položíme-li $f := \psi \circ \tau^{-1}$, je $f\colon W \to \mathbb{R}^{n-k}$ třídy C^p a snadno vidíme, že

$$\varphi(V) = \{(x_1, \dots, x_n)\colon (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\}. \tag{1.2}$$

Skutečně, je-li $(x_1, \dots, x_n) = \varphi(t)$ pro nějaký bod $t \in V$, pak podle definice zobrazení τ, ψ je $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \tau(t) \in W$ a $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = \psi(t)$, takže

$$(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = \psi(\tau^{-1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

Jestliže naopak pro bod $(x_1, \dots, x_n)$ platí $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, pak pro $t := \tau^{-1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ platí $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \tau(t)$ a $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = \psi(\tau^{-1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})) = \psi(t)$, takže $(x_1, \dots, x_n) = \varphi(t) \in \varphi(V)$.

Protože $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$, je obraz $\varphi(V)$ otevřené množiny V množina relativně otevřená v $M = \varphi(G)$. Existuje tudíž otevřená množina $U \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $U \cap M = \varphi(V)$. Podle (1.2) je tedy $U \cap M$ explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.

Analogické tvrzení pro implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy je vlastně jen jinou formulací věty o implicitních funkcích.

1.16 Tvrzení. *Nechť $1 \le k < n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy a $a \in M$. Pak existuje otevřené okolí U bodu a takové, že $U \cap M$ je explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.*

Důkaz. Podle Definice 1.13 můžeme najít otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$ a zobrazení $g = (g_1, \dots, g_{n-k})\colon G \to \mathbb{R}^{n-k}$ takové, že g je třídy C^p v G, Jacobiho matice $[g'(a)]$ má v každém bodě $x \in G$ hodnost $n-k$ a $M = \{x \in G\colon g(x) = 0\}$. Protože matice $[g'(a)]$ má hodnost $n-k$, existují indexy $1 \le j_1 < \dots < j_{n-k} \le n$ takové, že

$$\frac{D(g_1, \dots, g_{n-k})}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})}(a) \ne 0.$$

Označme zbylé indexy $i_1 < \dots < i_k$ $(\{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\})$. Podle věty o implicitních funkcích dostáváme (viz. Poznámka (?)), že existují otevřené okolí $U \subset G$ bodu a a zobrazení f z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^{n-k}$, které je definované a třídy C^p na nějakém otevřeném okolí bodu $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$, takové, že

$$M \cap U = \{x \in U\colon g(x) = 0\} = \{(x_1, \dots, x_n)\colon (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})\}.$$

Je tedy $U \cap M$ explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.

1.17 Poznámka. Lze snadno dokázat, že pokud $M \subset G \subset \mathbb{R}^n$ je kus k-rozměrné C^p-plochy v $\mathbb{R}^n$ zadaný parametricky (implicitně, difeomorfismem) a $\psi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus třídy C^p, pak $\psi(M)$ je opět kus plochy stejného druhu. Speciálně tyto pojmy kusů ploch jsou „geometrické“ — nezávisí na zvoleném systému kartézských (afinních) souřadnic. Můžeme tedy tyto pojmy definovat i v obecném eukleidovském či afinním prostoru (kde žádný souřadnicový systém není předem zadán). Jinak je tomu s pojmem explicitně zadaného kusu plochy, který není invariantní ani vůči změně kartézských souřadnic. Uvažujme například horní půlkružnici $M = \{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\}$, která je zřejmě explicitně zadaný kus 1-rozměrné C^∞-plochy v $\mathbb{R}^2$. Otočíme-li ale množinu M kolem počátku v kladném smyslu o $\pi/4$, výsledná množina již takovým explicitně zadaným kusem plochy nebude.

Definice k-rozměrné C^p-plochy

1.18 Věta. *Nechť $1 \le k < n$ a $P \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Pak následující vlastnosti množiny P jsou ekvivalentní.*

(i) *Pro každý bod $a \in P$ existuje otevřené okolí U bodu a takové, že $U \cap P$ je explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.*

(ii) *Pro každý bod $a \in P$ existuje otevřené okolí U bodu a takové, že $U \cap P$ je parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.*

(iii) *Pro každý bod $a \in P$ existuje otevřené okolí U bodu a takové, že $U \cap P$ je implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy.*

(iv) *Pro každý bod $a \in P$ existuje otevřené okolí U bodu a takové, že $U \cap P$ je kus k-rozměrné C^p-plochy zadaný difeomorfismem.*

Důkaz. Implikace (i) $\Longrightarrow$ (ii), (i) $\Longrightarrow$ (iii), (i) $\Longrightarrow$ (iv) a (iv) $\Rightarrow$ (ii) plynou okamžitě z Tvrzení 1.14. Stačí tedy dokázat implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) a (iii) $\Rightarrow$ (i).

K důkazu prvé z nich zvolme libovolný bod $a \in P$. Podle (ii) existuje otevřené okolí V bodu a, pro které je $V \cap P$ parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy. Podle Tvrzení 1.15 existuje otevřené okolí V^* bodu a takové, že $V^* \cap (V \cap P)$ je explicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy. Položíme-li $U := V \cap V^*$, dostáváme platnost (i).

Důkaz implikace $(iii) \Rightarrow (i)$ dostáváme stejným způsobem z Tvrzení 1.16.

Nyní můžeme vyslovit *základní definici* tohoto oddílu.

1.19 Definice. *Nechť $1 \le k < n$. Neprázdnou množinu $P \subset \mathbb{R}^n$ budeme nazývat k-rozměrnou C^p-plochou, jsou-li splněny (ekvivalentní) podmínky (i)-(iv) z Věty 1.18.*

1.20 Poznámka.

(i) Je snadné ověřit, že každý z výše definovaných typů kusů k-rozměrných C^p-ploch je k-rozměrná C^p-plocha. Speciálně (viz Příklad 1.2 d)) vidíme, že k-rozměrná C^p-plocha nemusí být souvislá množina.

(ii) Je-li $M \subset G \subset \mathbb{R}^n$ k-rozměrná C^p-plocha a ψ: $G \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus třídy C^p, pak (srov. Poznámka 1.17) $\psi(M)$ je opět k-rozměrná C^p-plocha.

(iii) Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ k-rozměrná C^p-plocha a $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina protínající M, pak $M \cap G$ je zřejmě opět k-rozměrná C^p-plocha.

Autoři učebnic berou za základ při definici k-rozměrné C^p-plochy v $\mathbb{R}^n$ různé podmínky (většinou některou z podmínek (i)-(iv) z Věty 1.18). Někdy se v definici předpokládá souvislost plochy; někdy se místo o k-rozměrné C^p-ploše hovoří o k-rozměrné varietě třídy C^p v $\mathbb{R}^n$. Poznamenejme, že pojem variety, který je základem moderní diferenciální geometrie, je velmi obecný — prvky (body) variety mohou být libovolné objekty. Pojem k-rozměrné C^p-plochy lze přirozeným způsobem ztotožnit (srov. [Ko; Věta 2.27]) s pojmem k-rozměrné variety třídy C^p, která je *vlastní podvarietou* prostoru $\mathbb{R}^n$.

Na přirozenou otázku po velikosti k-rozměrných ploch odpovídá následující tvrzení.

1.21 Tvrzení. *Nechť $1 \leq k < n$ a $P \subset \mathbb{R}^n$ je k-rozměrná C^1-plocha. Pak P je řídká, lebesgueovsky nulová a borelovská množina.*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $a \in P$. Pak existuje jeho otevřené okolí U_a takové, že $P^* := P \cap U$ je kus k-rozměrné plochy zadaný difeomorfismem.

Existuje tedy otevřená množina $H \subset \mathbb{R}^n$ a difeomorfismus ψ: $H \to \mathbb{R}^n$ třídy C^p takový, že $P^* = \psi(H \cap A)$, kde $A = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0\}$. Množina $H \cap A$ je zřejmě řídká v H a $\lambda_n(H \cap A) = 0$.

Protože $\psi H \to \psi(H)$ je homeomorfismus, je P^* řídká v otevřené množině $\psi(H)$, takže je řídká (v $\mathbb{R}^n$). Je tedy P lokálně řídká, z čehož snadno vyplývá (např. pomocí podmínky (iv) z Tvrzení (?)), že je řídká.

Z věty o substituci (Věta 3.23) okamžitě vyplývá, že $\lambda_n(P^*) = 0$. Pomocí Poznámky (?) snadno dostáváme $\lambda_n(P) = 0$.

Protože množina $H \cap A$ je množina uzavřená v H, je P^* uzavřená v otevřené množině $\psi(H)$, a proto je také uzavřená v otevřené množině $V := U \cap \psi(H) \supset P^* = P \cap V$, tj. $\overline{P \cap V} \cap V = P \cap V$. Protože zřejmě $\overline{P \cap V} \cap V = \overline{P} \cap V$, snadno tedy vidíme, že a je vnitřním bodem množiny P v prostoru $\overline{P}$. Tím jsme dokázali, že P je otevřená podmnožina $\overline{P}$. Podle Tvrzení (?) platí $P = \overline{P} \cap G$ pro nějakou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$; P je tedy borelovská množina.

1.22 Poznámka. Je zřejmé, že k-rozměrná C^∞-plocha v $\mathbb{R}^n$ nemusí (ale může) být uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Otevřená však být nemůže (to by nebyla řídká).

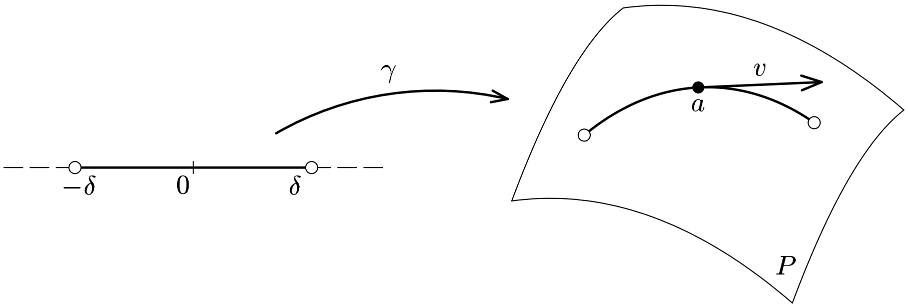
Následující tvrzení okamžitě plyne z definice k-plochy a Poznámky (?).

1.23 Tvrzení. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha. Pak P je spočetným sjednocením explicitně zadaných kusů k-rozměrných C^1-ploch.*

Tečný prostor ke k-rozměrné C^p-ploše

Velmi důležitý je pojem tečného prostoru k ploše P v bodě $a \in P$. *Afinním tečným prostorem* $T_a^{\mathrm{af}}(P)$ ke ploše P v bodě a rozumíme, zhruba řečeno, ten jediný afinní k-rozměrný prostor $A \subset \mathbb{R}^n$, který obsahuje bod a a v blízkosti bodu a se ke ploše P „velmi těsně přimyká“. Také lze říci, že v dostatečně malých okolích bodu a již „od sebe plochu P a afinní prostor A nerozeznáme“ (viz Tvrzení 1.29 a Poznámka 1.30).

Pojem afinního tečného prostoru bude ovšem zobecňovat již definovaný pojem tečné nadroviny ke grafu funkce: Je-li f: $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ funkce třídy C^1, pak graf $P = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\ x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$ funkce f je $(n-1)$-rozměrná C^1-plocha v $\mathbb{R}^n$; afinním tečným prostorem k P v bodě $a \in P$ pak bude tečná nadrovina k P v tomto bodě.



Obr. 1.3. Tečný vektor v ke ploše P.

Základním geometrickým pojmem v teorii ploch však není pojem afinního tečného prostoru, ale pojem (vektorového) tečného prostoru $T_a(P)$, který je zaměřením afinního tečného prostoru. Jinými slovy, $T_a(P)$ je ten (k-rozměrný) vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$, pro který

$$T_a^{\mathrm{af}}(P) = a + T_a(P).$$

Probíhá-li v vektorový tečný prostor, vyplní body $a + v$ celý afinní tečný prostor.

Tečný vektorový prostor ke ploše se často definuje následujícím způsobem (srov. obr. 1.3) pomocí derivací zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$ („cest“).

1.24 Definice. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je k-rozměrná C^p-plocha a je dán bod $a \in P$. Pak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazveme tečným vektorem ke ploše P v bodě a, existuje-li $\delta > 0$ a spojité zobrazení $\gamma\colon (-\delta, \delta) \to P$ takové, že $\gamma(0) = a$ a $\gamma'(0) = v$. Množinu všech tečných vektorů ke ploše P v bodě a označujeme $T_a(P)$ a nazýváme ji (vektorovým) tečným prostorem ke ploše P v bodě a.*

1.25 Poznámka.

(i) Je vhodné si uvědomit toto: Je-li U otevřené okolí bodu a, pak $P^* = P \cap U$ je opět k-rozměrná C^p-plocha a $T_a(P^*) = T_a(P)$. To plyne okamžitě z toho, že pro každou spojitou „cestu“ $\gamma\colon (-\delta, \delta) \to P$, pro kterou $\gamma(0) = a$, zřejmě existuje $\delta^* > 0$ takové, že $\gamma((-\delta^*, \delta^*)) \subset P^*$.

(ii) I kdybychom v Definici 1.24 nepožadovali spojitost „cesty“ γ, dostali bychom stejný pojem (to je vidět z *důkazu* následující věty).

V následující větě dokážeme, že $T_a(P)$ je skutečně vektorový prostor (dimenze k), a ukážeme, jak jej v konkrétních případech můžeme snadno určit.

1.26 Věta. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je k-rozměrná C^p-plocha a je dán bod $a \in P$. Pak platí následující tvrzení.*

(i) *$T_a(P)$ je k-rozměrný vektorový prostor.*

(ii) *Je-li P parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy a $\varphi\colon H \to \mathbb{R}^n$ je příslušný regulární homeomorfismus z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^n$, pro který $\varphi(H) = P$ a*

$a = \varphi(u_0)$, pak

$$T_a(P) = \mathrm{Im}(\varphi'(u_0)).$$

(iii) *Nechť P je implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy, tj.*

$$P = \{x \in G\colon\ g_1(x) = 0, \dots, g_{n-k}(x) = 0\},$$

kde g_i, $i = 1, \dots, n-k$, jsou funkce třídy C^p na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ takové, že gradienty $\operatorname{grad} g_1(x), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(x)$ jsou lineárně nezávislé pro každé $x \in G$. Pak

$$T_a(P) = (\mathrm{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(a)\})^{\perp}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme ve čtyřech krocích. (Na obr. 1.4 je zobrazen případ, kdy $k = 2$, $n = 3$ a jsou splněny předpoklady z (ii) a (iii).)

1. krok: Nejdříve dokážeme inkluzi $\mathrm{Im}(\varphi'(u_0)) \subset T_a(P)$ z (ii). Zvolme tedy libovolný vektor $w \in \mathrm{Im}(\varphi'(u_0))$; nechť $v \in H$ je ten vektor, pro který $\varphi'(u_0)(v) = w$. Uvažujme funkci $\gamma(t) := \varphi(u_0 + tv)$. Zřejmě můžeme zvolit $\delta > 0$ tak malé, aby funkce γ byla definována na celém intervalu $(-\delta, \delta)$; pak ovšem $\gamma((-\delta, \delta)) \subset P$. Protože

$$\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u_0 + tv) - \varphi(u_0)}{t} = D_v\varphi(u_0) = \varphi'(u_0)(v) = w,$$

dokázali jsme, že $w \in T_a(P)$.

2. krok: Nyní dokážeme inkluzi $T_a(P) \subset (\mathrm{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(a)\})^{\perp}$ z tvrzení (iii). Pro libovolný vektor $w \in T_a(P)$ najděme $\delta > 0$ a spojitou cestu $\gamma\colon\ (-\delta, \delta) \to P$ takovou, že $\gamma(0) = a$ a $\gamma'(0) = w$. Pro každé $t \in (-\delta, \delta)$ platí

$$g_1(\gamma(t)) = 0, \dots, g_{n-k}(\gamma(t)) = 0.$$

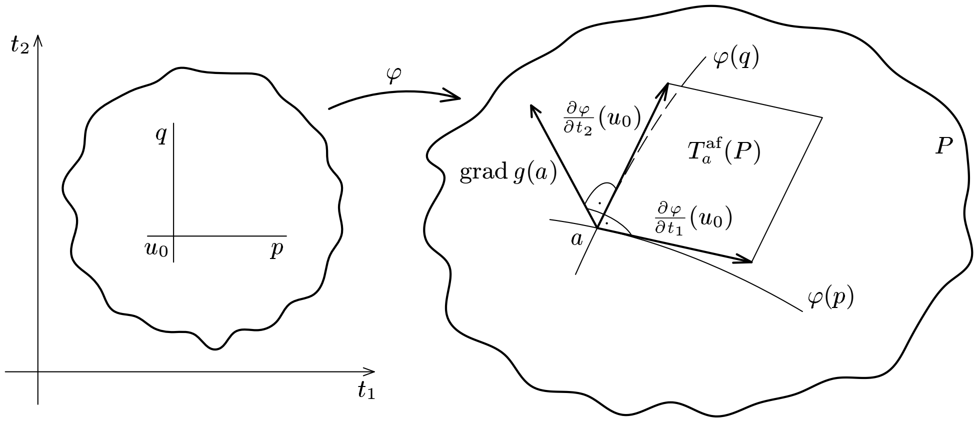
Pro každé $i \in \{1, \dots, n-k\}$ tedy podle věty o derivaci složené funkce (srov. Poznámka (?)) dostáváme

$$(g_i \circ \gamma)'(0) = \langle \operatorname{grad} g_i(a), \gamma'(0) \rangle = 0,$$

takže skutečně $w \in (\mathrm{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(a)\})^{\perp}$.

3. krok: Uvažujme obecnou k-rozměrnou C^p-plochu P. Zvolme otevřené okolí U bodu a, pro které je $U \cap P$ parametricky zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy. Podle 1. kroku důkazu a Poznámky 1.25(i) dostáváme, že $T_a(P)$ obsahuje k-rozměrný vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$, totiž $V := \mathrm{Im}(\varphi'(u_0))$. Existuje však také otevřené okolí U^* bodu a, pro které je $U^* \cap P$ implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy. Podle 2. kroku důkazu a Poznámky 1.25(i) dostáváme, že $T_a(P)$ je obsažen v k-rozměrném vektorovém podprostoru $\mathbb{R}^n$; totiž v ortogonálním doplňku

$$W := (\mathrm{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(a)\})^{\perp}$$



OBR. 1.4.

$(n-k)$-rozměrného prostoru $\operatorname{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(a)\}$. Platí tedy $V \subset T_a(P) \subset W$. Protože $\dim V = \dim W$, snadno vidíme, že $V = W$, takže $T_a(P) = V = W$ je skutečně k-rozměrný vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

4. krok: Teď již můžeme dokončit důkaz (ii) a (iii). Protože už víme, že $T_a(P)$ je v obou případech k-rozměrný vektorový prostor, z již dokázaných inkluzí mezi k-rozměrnými vektorovými prostory vyplývá, že je lze nahradit rovnostmi.

1.27 Definice. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je k-rozměrná C^p-plocha a je dán bod $a \in P$. Pak ortogonální doplněk $(T_a(P))^\perp$ k tečnému prostoru ke ploše P v bodě a se nazývá normálový prostor k ploše P v bodě a. Jeho prvky se nazývají normálové vektory k ploše P v bodě a.*

1.28 Poznámka.

(a) Je-li P implicitně zadaný kus k-rozměrné C^p-plochy jako v (iii), pak normálový prostor k ploše P v bodě a je $\operatorname{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(a)\}$.

(b) V situaci na obr. 1.4 je normálový prostor k ploše P v bodě a jednorozměrný. Tečný prostor $T_a(P) = \operatorname{Im}(\varphi'(u_0))$ je zřejmě lineárním obalem vektorů $\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(u_0) = \varphi'(u_0)\,(e_1)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(u_0) = \varphi'(u_0)\,(e_2)$ (srov. Věta (?)).

Nakonec se ještě vrátíme ke geometrickému významu afinního tečného prostoru.

1.29 Tvrzení. *Nechť P je k-rozměrná C^1-plocha v $\mathbb{R}^n$ $(1 \le k < n)$ a nechť $a \in P$. Označme $T := T_a^{\mathrm{af}}(P) = a + T_a(P)$. Pak*

$$\lim_{x\to a, x\in P} \frac{\operatorname{dist}(x,T)}{\|x-a\|} = 0; \tag{1.3}$$

$$\lim_{x\to a, x\in T} \frac{\operatorname{dist}(x,P)}{\|x-a\|} = 0. \tag{1.4}$$

Důkaz. (Stručný.) Můžeme předpokládat, že P je parametricky zadaný kus k-rozměrné C^1-plochy. Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, pro který $\varphi(G) = P$. Označme $c := \varphi^{-1}(a)$. Protože $\varphi\colon G \to P$ je homeomorfismus, je zobrazení $h \mapsto \varphi(c+h)$ homeomorfismus množiny $G - c$ na P, takže (1.3) je ekvivalentní s

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{dist}(\varphi(c+h), T)}{\|\varphi(c+h) - \varphi(c)\|} = 0. \tag{1.5}$$

Protože $\varphi'(c)\colon \mathbb{R}^k \to T_a(P)$ je lineární bijekce, z Věty (?) vyplývá, že $\varphi'(c)$ je homeomorfismus a navíc existuje $K > 0$ takové, že

$$\|\varphi'(c)\,h\| \geq K\,\|h\|, \qquad h \in \mathbb{R}^k \tag{1.6}$$

(za K lze zřejmě volit $1/\| \left(\varphi'(c)\right)^{-1} \|$). Zobrazení $h \mapsto \varphi(c) + \varphi'(c)\,h$ je zřejmě homeomorfismus $\mathbb{R}^k$ na T, takže (1.4) je ekvivalentní s

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{dist}(\varphi(c) + \varphi'(c)\,h, P)}{\|\varphi'(c)\,h\|} = 0. \tag{1.7}$$

Zřejmě platí

$$\operatorname{dist}(\varphi(c) + \varphi'(c)\,h, P) \leq \|\varphi(c+h) - \varphi(c) - \varphi'(c)\,h\| = o(\|h\|), \quad h \to 0,$$

což spolu s (1.6) dává (1.7), a tedy i (1.4).

Zřejmě pro všechna h z nějakého okolí 0 platí

$$\|\varphi(c+h) - \varphi(c)\| \geq \|\varphi'(c)\,h\| - \|\varphi(c+h) - \varphi(c) - \varphi'(c)\,h\| \geq (K/2)\,\|h\|.$$

Protože také platí

$$\operatorname{dist}(\varphi(c+h), T) \leq \|\varphi(c+h) - \varphi(c) - \varphi'(c)\,h\| = o(\|h\|), \quad h \to 0,$$

dostáváme (1.5), a tedy i (1.3).

1.30 Poznámka.

(i) Podmínky (1.3) a (1.4) se často interpretují slovy, že „P a T se k sobě navzájem v blízkosti bodu a těsně přimykají“. Tuto interpretaci lze ještě specifikovat: Podmínky (1.3) a (1.4) jsou přirozeným upřesněním tvrzení, že „v těsné blízkosti bodu a již od sebe P a T nerozeznáme“ (myslí se: když naše oko má jakkoliv dobrou rozlišovací schopnost a na velmi malá okolí bodu a se díváme „ideálním mikroskopem“).

(ii) Vidíme tedy, že k-rozměrná C^1-plocha v $\mathbb{R}^n$ má vlastnost, kterou je přirozené od hladké k-rozměrné plochy požadovat – lokálně ji nerozeznáme od k-rozměrného afinního prostoru.

(iii) Není těžké ukázat, že $T = T_a^{\mathrm{af}}(P)$ je jediný *afinní prostor*, pro který platí (1.3) a (1.4). Navíc je T jediný *k-rozměrný afinní prostor*, pro který platí (1.3) (resp. (1.4)).

Nakonec ještě dokážeme důležité tvrzení, které budeme potřebovat v teorii plošného integrálu.

1.31 Tvrzení. *Nechť P je parametricky zadaný kus k-rozměrné C^1-plochy v $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny a $\alpha\colon A \to \mathbb{R}^n$, $\beta\colon B \to \mathbb{R}^n$ jsou regulární homeomorfismy takové, že $\alpha(A) = \beta(B) = P$. Pak existuje (bijektivní) difeomorfismus $\omega\colon A \to B$ takový, že $\alpha = \beta \circ \omega$.*

Důkaz. Stačí zřejmě dokázat, že $\omega := \beta^{-1} \circ \alpha$ je difeomorfismus. Zvolme libovolný bod $a \in A$ a položme $p := \alpha(a)$, $b := \beta^{-1}(p)$. Podle Věty 1.18 existuje otevřené okolí U bodu p takové, že $P \cap U$ je kus k-rozměrné C^1-plochy zadaný difeomorfismem. Existuje tedy otevřená množina $H \subset \mathbb{R}^n$ a difeomorfismus $\psi\colon H \to \mathbb{R}^n$ třídy C^1 takový, že

$$P \cap U = \psi(H \cap \{(x_1, \dots, x_n)\colon x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}). \tag{1.8}$$

Označme $A^* := \alpha^{-1}(P \cap U)$, $B^* := \beta^{-1}(P \cap U)$ a

$$\alpha^* := \alpha \restriction_{A^*}, \quad \beta^* := \beta \restriction_{B^*}, \quad \mu := \psi^{-1} \circ \alpha^*, \quad \nu := \psi^{-1} \circ \beta^*.$$

Zřejmě A^*, B^* jsou pořadě otevřená okolí bodů a, b a μ, ν jsou prostá zobrazení třídy C^1. Z (1.8) vyplývá, že $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k, 0, \dots, 0)$, takže také $\widetilde{\mu} := (\mu_1, \dots, \mu_k)$ je prosté a třídy C^1. Pro každé $t \in A^*$ platí $\mu'(t) = (\psi^{-1})'(\alpha(t)) \circ \alpha'(t)$. Protože $(\psi^{-1})'(\alpha(t))$ je lineární bijekce $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$, platí

$$\dim(\mathrm{Lin}\{\mathrm{grad}(\mu_1(t)), \dots, \mathrm{grad}(\mu_k(t)))\}) = h([\mu'(t)]) = \dim(\mathrm{Im}\,\mu'(t)) = \dim(\mathrm{Im}\,\alpha'(t)) = k,$$

takže $[(\widetilde{\mu})'(t)]$ je regulární matice. Zobrazení $\widetilde{\mu}\colon A^* \to \mathbb{R}^k$ je tedy prosté regulární zobrazení, takže je podle Věty (?) difeomorfismus.

Zcela obdobně dostáváme, že $\widetilde{\nu} := (\nu_1, \dots, \nu_k)$ je difeomorfismus. Na základě (1.8) snadno nahlédneme, že $\omega \restriction_{A^*} = (\beta^*)^{-1} \circ \alpha^* = (\widetilde{\nu})^{-1} \circ \widetilde{\mu}$, takže $\omega \restriction_{A^*}$ je regulární zobrazení. Z toho ihned vyplývá, že ω je regulární, a protože je prosté, je difeomorfismus.

2. Úvod do teorie plošného a křivkového integrálu

2.1 Úvod

K nejdůležitějším klasickým výsledkům diferenciálního a integrálního počtu patří nepochybně Greenova, Gaussova a Stokesova věta, které mají důležité aplikace ve fyzice a v řadě matematických teorií. Velmi zhruba lze říci, že tyto věty říkají, že jistý integrál přes množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ je roven jistému příslušnému integrálu přes hranici ∂M této množiny a že jde o zobecnění Newton-Leibnizovy formule $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$. Pro formulaci zmíněných vět je třeba zavést tzv. plošné a křivkové integrály.

Již přesná formulace těchto „integrálních vět" je dosti obtížná. Ve starších klasických učebnicích je podán názorný výklad teorie plošného integrálu a integrálních vět, který čtenáře seznamuje se základními myšlenkami a umožňuje mu zvládnout početní techniku, nesnese však současné nároky na matematickou přesnost. Dokonce ani základní pojmy nejsou přesně definovány, natož aby byly přesně dokázány základní věty. V. Jarník do svých učebnic teorii plošného integrálu nezařadil; v předmluvě (z r. 1955) k [J II] poznamenává, že nezná v literatuře výklad, který by vyhovoval současně z vědeckého i pedagogického hlediska. Nyní existuje několik přesných česky psaných výkladů (na různých stupních obecnosti) této teorie (např. [ČM], [Si], [Kow], [Kop], [LM], [KST]).

Cílem této kapitoly je co nejstručněji přesně vyložit Gaussovu a Greenovu větu, ale tak, aby všechny pojmy byly motivovány a aby *standardní konkrétní příklady bylo možno pomocí těchto vět co nejpohodlněji počítat.* Motivace definic základních pojmů je vedena obvyklým klasickým způsobem. Také výklad (hodně ovlivněný výkladem z [Kop]) se od klasického liší v podstatě jen v tom, že užívá standardní výsledky abstraktní teorie míry a integrálu. Důkaz (trochu zdlouhavý, ale ne obtížný) věty, která „axiomaticky" definuje k-rozměrnou míru (na „minimální" σ-algebře $\mathcal{P}_k$), je proveden v Dodatku 6.3. Standardní snadný důkaz Gaussovy věty pro velmi speciální množiny je proveden v základním textu, poměrně obtížný důkaz v obecném případě (jen málo se lišící od důkazu z [Kop]) lze nalézt v Dodatku 6.4.

Klasická Stokesova věta je uvedena bez důkazu spolu s poznámkami o diferenciálních formách a obecné Stokesově větě (jejíž jedna elementární verze je také bez důkazu uvedena).

Protože terminologie z teorie ploch zavedená v Kapitole 2 je příliš těžkopádná, dohodneme se pro účely této kapitoly na jejím zjednodušení.

Zjednodušení terminologie Není-li řečeno jinak, jsou v této kapitole n, k vždy přirozená čísla, pro která $1 \leq k < n$. Místo k-rozměrná plocha třídy C^1 budeme psát pouze *k-plocha* a místo parametricky zadaný kus k-rozměrné C^1 plochy budeme psát *jednoduchá k-plocha*. *Parametrizací jednoduché k-plochy P v $\mathbb{R}^n$* budeme rozumět libovolný regulární homeomorfismus $f: G \to \mathbb{R}^n$ ($G \subset \mathbb{R}^k$), pro který $f(G) = P$. Dále pod pojmem „jednoduchá 0-plocha v $\mathbb{R}^n$" rozumíme jednobodovou podmnožinu $\mathbb{R}^n$ a pod pojmem „0-plocha v $\mathbb{R}^n$" izolovanou podmnožinu $\mathbb{R}^n$ (tj. množinu, jejíž každý bod je izolovaný).

2.2 Starší a novější přístup k plošnému integrálu 1. druhu

Nejprve provedeme (nepřesnou) heuristickou úvahu, která vysvětluje *starší přístup* k plošnému integrálu 1. druhu. Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha, jejíž k-rozměrný obsah je konečný a nechť f je stejnoměrně spojitá funkce na P. Proveďme rozklad plochy P na konečně mnoho plošek $P_1, \dots P_r$, v každé z nich zvolme bod $x_i \in P_i$ a utvořme součet

$$\sum_{i=1}^{r} f(x_i)\,(\Delta S)_i, \tag{2.1}$$

kde $(\Delta S)_i$ je k-rozměrný obsah plošky P_i. Vzhledem ke stejnoměrné spojitosti f se zdá být věrohodné, že pokud diametr plošek P_i neomezeně zmenšujeme (a jejich počet zvětšujeme), blíží se „integrální součty" (2.1) k jistému číslu, které nazýváme plošným integrálem 1. druhu a značíme (vedeni analogií s výrazem (2.1)) $\int_P f\,\mathrm{dS}$.

Pro výpočet integrálních součtů (2.1) ovšem potřebujeme znát definici velikosti plošek P_i. Tento problém lze překonat například tak, že $\int_P f\,\mathrm{dS}$ se nedefinuje jako limita součtů (2.1), ale jako limita součtů $\sum_{i=1}^{r} f(x_i)\,\sigma_i$, kde σ_i je k-rozměrný obsah kolmého průmětu P_i^* plošky P_i na afinní tečný prostor A k ploše P v bodě x_i. Přitom se vychází z předpokladu, že pokud je ploška P_i velmi malá, P_i a P_i^* od sebe „nerozeznáme", proto platí $(\Delta S)_i \approx \sigma_i$, a tedy se také domníváme, že $\sum_{i=1}^{r} f(x_i)\,(\Delta S)_i \approx \sum_{i=1}^{r} f(x_i)\,\sigma_i$.

Plošný integrál 1. druhu má řadu důležitých fyzikálních aplikací. Předpokládejme například, že dvourozměrná plocha P v $\mathbb{R}^3$ je „zhotovena z nehomogenního materiálu" a $f(x)$ má význam „plošné hustoty" této „hmotné plochy" v bodě $x \in P$. Pokud plošky P_i jsou dostatečně malé, zdá se být zřejmé, že číslo $f(x_i)(\Delta S)_i$ velmi dobře aproximuje hmotnost m_i plošky P_i. Součet (2.1) proto velmi dobře aproximuje hmotnost plochy P a integrál

$\int_P f\,\mathrm{dS}$ má význam hmotnosti plochy P. Také pro výpočet těžiště plochy P (srov. Příklad 2.94) nebo gravitační síly, kterou P přitahuje hmotný bod (srov. Příklad 2.26), nutně potřebujeme plošný integrál 1. druhu.

Současný přístup k integrálu 1. druhu však není založen na limitě integrálních součtů. Známe-li totiž teorii abstraktního Lebesgueova integrálu, je přirozené nejprve na ploše P zavést k-rozměrnou míru μ_k (která množinám $B \subset P$ přiřazuje jejich k-rozměrný plošný obsah $\mu_k(B)$) a plošný integrál 1. druhu pak definovat rovností

$$\int_P f\,\mathrm{dS} := \int_P f\,\mathrm{d}\mu_k.$$

V následujících oddílech se proto budeme věnovat zavedení k-rozměrné míry, kterou pro zjednodušení úvah budeme budeme uvažovat na jisté σ-algebře *borelovských množin.* množin. Dále poznamenejme toto:

a) V klasických aplikacích jsou nejčastější případy $k = 1$ a $k = 2$; 1-rozměrné míře $\mu_1(A)$ (množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ nebo $A \subset \mathbb{R}^3$) se často říká délka množiny A a 2-rozměrné míře $\mu_2(A)$ množiny $A \subset \mathbb{R}^3$ se říká plošný obsah množiny A.

b) Je-li $\mu_k(P) < \infty$ a f je stejnoměrně spojitá (jak jsme předpokládali výše), lze snadno dokázat (srov. Tvrzení 3.28), že $\int_P f\,\mathrm{d}\mu_k$ je limitou integrálních součtů (2.1).

c) Pro geometrii je jedním ze základních pojmů integrál diferenciální formy přes orientovanou plochu (resp. varietu). Pomocí tohoto pojmu lze integrál prvního druhu také definovat, pojem orientace plochy však pro definici integrálu 1. druhu není nutný.

2.3 Definice k-rozměrné míry na k-rozměrném afinním podprostoru $\mathbb{R}^n$

Uvažujme nejprve nejjednodušší případ plochy, která „není křivá“, totiž afinního prostoru. (Některá základní fakta o afinních podprostorech eukleidovských prostorů a o afinních zobrazeních mezi nimi, která budeme používat, jsou shrnuta v Dodatku 6.7.) Jestliže A je k-rozměrný afinní podprostor $\mathbb{R}^n$ $(1 \le k < n)$, existuje (srov. Dodatek 6.7 c)) izometrie $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to A$. Lze tedy A (touto izometrií) „ztotožnit“ s $\mathbb{R}^k$. Protože na $\mathbb{R}^k$ existuje kanonická k-rozměrná míra (totiž Lebesgueova míra); zdá se být zřejmé, že i na A lze definovat „kanonickou k-rozměrnou míru“ μ_k^A (která je obrazem Lebesgueovy míry při každé takové izometrii). Pro jednoduchost budeme na A definovat pouze „kanonickou“ míru μ_k^A na σ-algebře $\mathcal{B}(A)$ borelovských podmnožin A. Dále λ_k je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^k$ a λ_k^b je její restrikce na σ-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ borelovských podmnožin $\mathbb{R}^k$.

Je-li $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to A$ izometrie, je $\varphi\colon (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \to (A, \mathcal{B}(A))$ zřejmě měřitelné zobrazení, takže na $\mathcal{B}(A)$ je definován obraz $\mu_\varphi := \varphi(\lambda_k^b)$ míry λ_k^b při zobrazení φ; podle definice platí

$$\mu_\varphi(B) := \lambda_k(\varphi^{-1}(B)), \qquad B \in \mathcal{B}(A).$$

Snadno vidíme, že μ_φ nezávisí na výběru izometrie φ. Je-li totiž $\psi\colon \mathbb{R}^k \to A$ jiná izometrie a $B \in \mathcal{B}(A)$, pak zřejmě $\psi^{-1}(B) = (\psi^{-1}\circ\varphi)(\varphi^{-1}(B))$, a protože $\psi^{-1}\circ\varphi$ je izometrie $\mathbb{R}^k$ na $\mathbb{R}^k$, platí (viz Tvrzení 3.25)

$$\mu_\varphi(B) = \lambda_k(\varphi^{-1}(B)) = \lambda_k(\psi^{-1}(B)) = \mu_\psi(B).$$

Následující definice je tedy korektní.

2.1 Definice. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je k-rozměrný ($1 \le k \le n$) afinní podprostor $\mathbb{R}^n$ a $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to A$ je izometrie. Pak klademe $\mu_k^A := \varphi(\lambda_k^b)$.*

Je-li $k = n$, zřejmě $\mu_k^A = \lambda_k^b$. Je-li A pevně dáno, budeme psát místo μ_k^A jen μ_k.

2.2 Poznámka. Míra μ_k^A byla definována v závislosti na afinním prostoru A. Pokud ale B je borelovská podmnožina dvou různých k-rozměrných afinních prostorů $A_1 \subset \mathbb{R}^n$, $A_2 \subset \mathbb{R}^n$, pak $A_1\cap A_2$ je afinní prostor dimenze menší než k. Z toho snadno vyplývá, že $\mu_k^{A_1}(A_1\cap A_2) = \mu_k^{A_2}(A_1\cap A_2) = 0$, takže také $\mu_k^{A_1}(B) = \mu_k^{A_2}(B) = 0$. Pro každou borelovskou množinu $B \subset \mathbb{R}^n$, která je podmnožinou nějakého k-rozměrného afinního podprostoru $\mathbb{R}^n$ (tyto množiny ovšem netvoří σ-algebru!) máme tedy korektně definovaný její k-rozměrný objem $\mu_k(B)$.

Z vlastností λ_k nyní odvodíme některé vlastnosti μ_k^A. Předně je zřejmé, že $\mu_k^A(K) < \infty$, kdykoliv $K \subset A$ je kompaktní (takže μ_k^A je Radonova míra) a také to, že míra μ_k^A je σ-konečná. Dále ukážeme, jak se jednoduše spočte k-rozměrná míra k-rozměrného rovnoběžnostěnu v A. Pojem rovnoběžnostěnu lze přirozeně definovat v libovolném vektorovém prostoru:

2.3 Definice. *Nechť je dán vektorový prostor V a jeho prvky $v_1,\dots,v_k$, a. Pak klademe*

$$\mathcal{R}_a(v_1,\dots,v_k) := \{a + t_1v_1 + \dots + t_kv_k :\ 0 \le t_1 \le 1,\dots,0 \le t_k \le 1\}.$$

Jsou-li $v_1,\dots,v_k$ lineárně nezávislé vektory, nazýváme $\mathcal{R}_a(v_1,\dots,v_k)$ k-rozměrným rovnoběžnostěnem.

2.4 Definice. *Nechť V je unitární prostor a $v_1,\dots,v_k$ jsou jeho prvky. Pak definujeme Gramovu matici a Gramův determinant (gramián) vektorů $v_1,\dots,v_k$ takto:*

$$G(v_1,\dots,v_k) := (\langle v_i, v_j\rangle)_{i,j=1}^k, \qquad \Gamma(v_1,\dots,v_k) := \det G(v_1,\dots,v_k).$$

2.5 Tvrzení. *Nechť $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{R}^n$, $k \le n$. Pak*

$$\Gamma(v_1,\dots,v_k) = \det\left([v_1,\dots,v_k]^T \cdot [v_1,\dots,v_k]\right).$$

Pokud navíc $k = n$, pak

$$\Gamma(v_1,\dots,v_k) = (\det[v_1,\dots,v_k])^2.$$

Vektory $v_1,\dots,v_k$ jsou lineárně závislé, právě když $\Gamma(v_1,\dots,v_k) = 0$.

Důkaz. Obě rovnosti plynou z toho, že $G(v_1,\dots,v_k) = [v_1,\dots,v_k]^T \cdot [v_1,\dots,v_k]$ a základů teorie determinantů. Poslední tvrzení je Věta 28.4. (i) z [Be].

Nejdříve odvodíme (z věty o substituci) vzorec pro Lebesgueovu míru rovnoběžnostěnu. Čtenáři, který nezná důkaz věty o substituci a chce vzorec pochopit, lze doporučit [Ru2; Věta 8.28] nebo [LM; Lemma 34.7].

2.6 Tvrzení. *Nechť $v_1, \dots, v_k, a \in \mathbb{R}^k$. Pak*

$$\lambda_k\left(\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k)\right) = |\det[v_1, \dots, v_k]| = \sqrt{\Gamma(v_1, \dots, v_k)}. \tag{2.2}$$

Důkaz. Jsou-li vektory $v_1, \dots, v_k$ lineárně nezávislé, pak $\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k)$ je k-rozměrný rovnoběžnostěn a zřejmě $\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k) = f(I)$, kde $I := [0,1]^k$ a $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ je prosté afinní zobrazení dané předpisem

$$f(t_1, \dots, t_k) := a + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k.$$

Pro Jacobiho matici difeomorfismu f v libovolném bodě $t \in \mathbb{R}^k$ máme zřejmě $[f'(t)] = [v_1, \dots, v_k]$, takže podle věty o substituci pro Lebesgueův integrál a Tvrzení 2.5 dostáváme

$$\lambda_k(\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k)) = \int_{f(I)} 1 \, \mathrm{d}\lambda_k = \int_I |\det[v_1, \dots, v_k]| \, \mathrm{d}\lambda_k = \\ = |\det[v_1, \dots, v_k]| = \sqrt{\Gamma(v_1, \dots, v_k)}.$$

Jsou-li vektory $v_1, \dots, v_k$ lineárně závislé, pak $\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k)$ je zřejmě podmnožina afinního prostoru dimenze menší než k, takže má nulovou Lebesgueovu míru. Všechny členy (2.2) jsou tedy nulové.

2.7 Věta. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je k-rozměrný afinní prostor ($1 \le k < n$), $a \in A$, vektorový prostor $V \subset \mathbb{R}^n$ je zaměření A (tj. $A = a + V$) a $v_1, \dots, v_k \in V$. Pak*

$$\mu_k\left(\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k)\right) = \sqrt{\Gamma(v_1, \dots, v_k)}. \tag{2.3}$$

Důkaz. Zvolme izometrii $F\colon \mathbb{R}^k \to A$. Podle Dodatku 6.7 c) existuje unitární bijekce $L\colon \mathbb{R}^k \to V$ taková, že $F(x) = F(0) + L(x)$, $x \in \mathbb{R}^k$. Položme $c := F^{-1}(a)$, $w_1 := L^{-1}(v_1), \dots, w_k := L^{-1}(v_k)$. Pak zřejmě $\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k) = F\left(\mathcal{R}_c(w_1, \dots, w_k)\right)$, takže

$$\mu_k^A\left(\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k)\right) = \lambda_k\left(\mathcal{R}_c(w_1, \dots, w_k)\right) = \sqrt{\Gamma(w_1, \dots, w_k)}.$$

Rovnost (2.3) pak vyplývá z toho, že $L\colon \mathbb{R}^k \to V$ je unitární zobrazení, takže $\langle v_i, v_j \rangle = \langle w_i, w_j \rangle$, $1 \le i, j \le k$, a tedy $\Gamma(w_1, \dots, w_k) = \Gamma(v_1, \dots, v_k)$.

V předchozím výkladu jsme mohli předpokládat, že A je k-rozměrný podprostor libovolného unitárního prostoru; takovou obecnost však nepotřebujeme. Vzorec (2.3) motivuje následující definici.

2.8 Definice. *Nechť V je unitární prostor. Pak pro vektory $v_1, \dots, v_k$ z V klademe*

$$\operatorname{vol}(v_1, \dots, v_k) := \sqrt{\Gamma(v_1, \dots, v_k)}.$$

Za předpokladů Věty 2.7 lze pak rovnost (2.3) zapsat ve tvaru

$$\mu_k\left(\mathcal{R}_a(v_1, \dots, v_k)\right) = \operatorname{vol}(v_1, \dots, v_k). \tag{2.4}$$

Jsou-li $v_1, \ldots, v_k$ prvky $\mathbb{R}^k$, pak podle Tvrzení 2.6 platí

$$\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_k) = |\det[v_1, \ldots, v_k]|. \tag{2.5}$$

Důležitou skutečností je existence „koeficientu změny k-rozměrné míry“ při afinním zobrazení. Nejdříve uvažujme afinní bijekci $F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Lze psát $F(x) = F(0)+L(x)$, kde $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ je lineární bijekce. Protože zřejmě $J_F(x) = \det[L]$, $x \in \mathbb{R}^k$, z věty o substituci pro Lebesgueův integrál vyplývá, že pro každou borelovskou množinu $B \subset \mathbb{R}^n$ platí

$$\lambda_n\left(F(B)\right) = |\det[L]| \cdot \lambda_n(B).$$

Zobrazení F tedy buď vůbec nemění míru borelovské množiny (je-li $|\det[L]| = 1$) nebo ji „násobí“ jistým konstantním kladným koeficientem, totiž číslem $\kappa(F) := |\det[L]| > 0$. (Pro změnu vzdáleností bodů nebo změnu úhlů taková zákonitost při $k \geq 2$ neplatí!)

2.9 Věta. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}^m$ jsou k-rozměrné afinní prostory a V_T, V_Z jsou jejich zaměření. Nechť $f: T \to Z$ je afinní zobrazení tvaru $f(t) = z_0 + L(t - t_0)$, kde $t_0 \in T$, $z_0 \in Z$ a $L: V_T \to V_Z$ je lineární zobrazení. Pak platí následující tvrzení:*

(i) *Existuje jediné číslo $\kappa(f) \geq 0$ takové, že pro každou kompaktní množinu $E \subset T$ platí*

$$\mu_k^Z(f(E)) = \kappa(f) \cdot \mu_k^T(E). \tag{2.6}$$

(ii) *Zobrazení f je prosté právě když $\kappa(f) > 0$. V tom případě platí rovnost* (2.6) *pro každou borelovskou množinu $E \subset T$.*

(iii) *Je-li $(v_1, \ldots, v_k)$ báze prostoru V_T, pak*

$$\kappa(f) = \frac{\operatorname{vol}(L(v_1), \ldots, L(v_k))}{\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_k)}, \tag{2.7}$$

(iv) $$\kappa(f) = \kappa(L).$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že f je prosté; pak f je homeomorfismus. Uvažujme izometrie $\varphi: \mathbb{R}^k \to T$, $\psi: \mathbb{R}^k \to Z$ a borelovskou množinu $E \subset T$. Pak $\mu_k^T(E) = \lambda_k(\varphi^{-1}(E))$ a $\mu_k^Z(f(E)) = \lambda_k(\psi^{-1}(f(E)))$. Zobrazení $F := \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ je zřejmě afinní bijekce $\mathbb{R}^k$ na $\mathbb{R}^k$, takže podle úvahy před větou existuje číslo $\kappa(F) > 0$ takové, že $\lambda_k(F(B)) = \kappa(F)\lambda_k(B)$ pro každou $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Pro $B := \varphi^{-1}(E)$ dostáváme $\lambda_k(\varphi^{-1}(E)) = \kappa(F)\lambda_k(\psi^{-1}(f(E)))$. Položíme-li tedy $\kappa(f) := \kappa(F)$, vidíme, že (2.6) platí pro každou $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$.

Pokud f není bijekce, je $f(T)$ afinní podprostor prostoru Z dimenze menší než k, takže se snadno ukáže, že $\mu_k^Z(f(T)) = 0$, a vzorec (2.6) tedy platí pro každou kompaktní $E \subset T$ pro $\kappa(f) := 0$ ($f(E)$ je zřejmě kompaktní, a tedy i borelovská). Dokázali jsme tedy (i) a (ii) (kromě jednoznačnosti $\kappa(f)$).

Je-li $(v_1, \ldots, v_k)$ báze prostoru V_T, pak zřejmě platí rovnost $f\left(\mathcal{R}_{t_0}(v_1, \ldots, v_k)\right) = \mathcal{R}_{z_0}(L(v_1), \ldots, L(v_k))$, takže

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(L(v_1), \ldots, L(v_k)) &= \mu_k^Z\left(\mathcal{R}_{z_0}(L(v_1), \ldots, L(v_k))\right)\\ &= \kappa(f) \cdot \mu_k^T\left(\mathcal{R}_{t_0}(v_1, \ldots, v_k)\right) = \kappa(f) \cdot \operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_k).\end{aligned}$$

Okamžitě tedy dostáváme (iii) a tudíž i jednoznačnost čísla $\kappa(f)$. Protože L je také afinní zobrazení mezi k-rozměrnými afinními prostory, podle (iii) platí rovnost

$$\operatorname{vol}(L(v_1), \dots, L(v_k)) = \kappa(L) \cdot \operatorname{vol}(v_1, \dots, v_k),$$

ze které pak ihned vyplývá (iv).

2.10 Poznámka.

(i) Je-li zobrazení L z předchozí věty unitární, z (2.7) a Definice 2.8 vyplývá, že $\kappa(f) = \kappa(L) = 1$.

(ii) Pokud f z předchozí věty není prosté, může se stát, že obraz $f(E)$ borelovské množiny není borelovský. Kdybychom však místo μ_k^T a μ_k^Z uvažovali jejich zúplnění, mohli bychom psát (2.6) pro libovolnou borelovskou (dokonce μ_k^T-měřitelnou) množinu $E \subset T$ i pro f, které není prosté.

Nyní určíme koeficient změny míry κ_f v jednom důležitém speciálním případě.

2.11 Tvrzení. *Nechť $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je prosté afinní zobrazení tvaru $f = a + L$, kde $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení a $a \in \mathbb{R}^n$. Pak $Z := f(\mathbb{R}^k)$ je k-rozměrný afinní prostor a platí*

$$\kappa(f) = \kappa(L) = \operatorname{vol}(L(e_1), \dots, L(e_k)) = \sqrt{\Gamma(L(e_1), \dots, L(e_k))}. \tag{2.8}$$

V případě $k = n$ platí $\kappa(f) = |\det[L]|$.

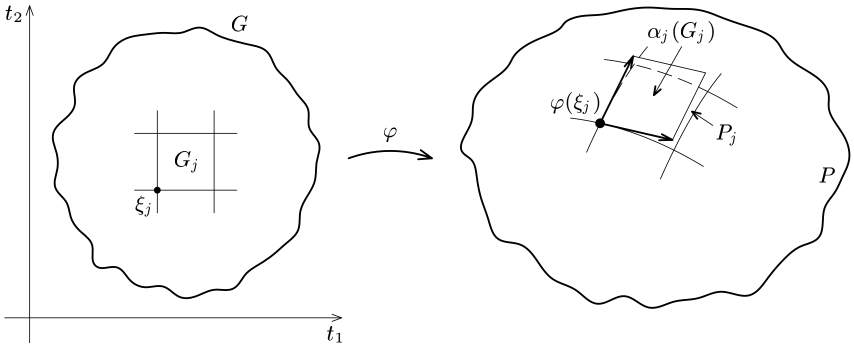
Důkaz. Stačí užít vzorec (2.7) na kanonickou bázi, tj. pro $v_i = e_i$, $i = 1, \dots, k$. Případ $k = n$ jsme již diskutovali (lze též užít Tvrzení 2.5).

Následující tvrzení, které je téměř zřejmé, nám v dalším umožní zkrátit a vyjasnit některé výpočty.

2.12 Tvrzení. *Nechť $T \subset \mathbb{R}^n$, $Z \subset \mathbb{R}^m$, $S \subset \mathbb{R}^p$ jsou k-rozměrné afinní prostory a nechť $f: T \to Z$ a $g: Z \to S$ jsou afinní zobrazení. Pak*

$$\kappa(g \circ f) = \kappa(g) \cdot \kappa(f). \tag{2.9}$$

Důkaz. Nechť $K \subset T$ je kompaktní množina s kladnou mírou $\mu_k^T(K)$. Množiny $f(K)$ i $g(f(K))$ jsou kompaktní, takže platí $\mu_k^S(g(f(K))) = \kappa(g \circ f)\mu_k^T(K)$
a $\mu_k^S(g(f(K))) = \kappa(g) \cdot \mu_k^Z(f(K)) = \kappa(g) \cdot \kappa(f) \cdot \mu_k^T(K)$. Z těchto rovností (2.9) ihned plyne.



OBR. 2.5.

2.4 Definice k-rozměrné míry na jednoduché k-ploše

Je-li P křivá k-plocha, je přesná definice k-rozměrné míry μ_k^P na P podstatně obtížnější. Každému je jasné, jak se měří obsah křivé plochy v praxi:

Chceme-li změřit velikost plochy velké parcely v hornatém terénu, rozdělíme si ji na malé části, které již nerozeznáme od rovinných útvarů, jejich plochy změříme a výsledky sečteme.

Tento praktický návod odpovídá základní ideji diferenciálního počtu, která se někdy vyjadřuje heslem, že hladká funkce (resp. plocha) je „v malém“ afinní.

Podat přesnou konstruktivní definici na základě tohoto návodu však není snadné. Proto tento postup pouze použijeme k heuristickému „odvození“ vzorce pro výpočet k-rozměrné míry $\mu_k(P)$ jednoduché k-plochy P. Nechť $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$ je parametrizace P. Rozdělme nyní otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^k$ na konečně (nebo spočetně) mnoho (borelovských, po dvou disjunktních) částí $G_1, G_2, \dots$ tak, že jejich diametry i diametry jejich obrazů $P_j := \varphi(G_j)$ jsou velmi malé. V každé množině G_j zvolme bod $\xi_j \in G_j$ a uvažujme afinní zobrazení $\alpha_j: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ dané předpisem $\alpha_j(t) := \varphi(\xi_j) + \varphi'(\xi_j)(t - \xi_j)$. (Připomeňme, že afinní zobrazení $\alpha_j(t)$ „velmi dobře“ aproximuje φ v blízkosti bodu ξ_j a jeho oborem hodnot je afinní tečný prostor $T^{\mathrm{af}}_{\varphi(\xi_j)}(P)$). Za našich předpokladů je tedy přirozené předpokládat, že $\varphi(G_j)$ a $\alpha_j(G_j)$ si jsou „k nerozeznání podobné“ (viz obr. 2.5, kde $k = 2, n = 3, G_j$ je uzavřený čtverec a ξ_j je jeho vrchol), takže se zdá být jasné, že

$$\mu_k(\varphi(G_j)) \approx \mu_k(\alpha_j(G_j)) = \kappa(\alpha_j) \cdot \lambda_k(G_j) = \kappa(\varphi'(\xi_j)) \cdot \lambda_k(G_j). \tag{2.10}$$

(Poslední rovnost vyplývá z Věty 2.9 (iv).) Také se zdá, že sečtením přes j dostaneme

$$\mu_k(P) = \sum \mu_k(P_j) = \sum \mu_k(\varphi(G_j)) \approx \sum \kappa(\varphi'(\xi_j)) \cdot \lambda_k(G_j).$$

Je tedy přirozené se domnívat, že

$$\mu_k(P) = \int_G \kappa(\varphi'(t))\ \mathrm{d}t = \int\limits_G \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_k}\right)}\ \mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

(Poslední rovnost vyplývá z (2.8), protože $\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_i} = \varphi'(t)(e_i)$.)

Přesně definovat, co je to k-rozměrná míra $\mu_k(B)$ pro dostatečně obecné (borelovské) podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a opravdu *dokázat*, že platí vzorec (2.11) (který je pro konkrétní výpočty nezbytný) je značně obtížný úkol (srov. Dodatek 6.3.). Nabízí se tedy myšlenka přijmout vzorec (2.11) *za definici* čísla $\mu_k(P)$.

My však chceme definovat nejen $\mu_k(P)$, ale i borelovskou míru μ_k^P na P. Vzorec (2.11) nás vede k tomu, že každé borelovské množině $B \subset P$ přiřadíme číslo

$$\mu_k^P(B) := \int_{\varphi^{-1}(B)} \kappa(\varphi'(t))\ \mathrm{d}t.$$

Nejprve ovšem musíme dokázat nezávislost na parametrizaci.

2.13 Tvrzení. *Nechť P je jednoduchá k-plocha v $\mathbb{R}^n$ a $\varphi: G \to \mathbb{R}^n, \psi: H \to \mathbb{R}^n$ jsou její dvě parametrizace. Pak pro každou borelovskou množinu $B \subset P$ platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} \kappa(\varphi'(t))\ \mathrm{d}t = \int_{\psi^{-1}(B)} \kappa(\psi'(t))\ \mathrm{d}t.$$

Důkaz. Ze spojitosti φ vyplývá, že $\varphi^{-1}(B)$ je borelovská podmnožina $\mathbb{R}^k$, takže integrál nalevo existuje: je to integrál ze spojité (a tedy borelovsky měřitelné) nezáporné funkce přes měřitelnou množinu. Podle Tvrzení 1.31 existuje difeomorfismus $\omega: G \to H$ takový, že $\varphi = \psi \circ \omega$. Pak pro každý bod $t \in G$ platí $\varphi'(t) = \psi'(\omega(t)) \circ \omega'(t)$, takže podle Tvrzení 2.12 a Tvrzení 2.11 dostáváme

$$\kappa(\varphi'(t)) = \kappa(\psi'(\omega(t))) \cdot \kappa(\omega'(t)) = \kappa(\psi'(\omega(t))) \cdot |J_\omega(t)|.$$

Podle věty o substituci pro Lebesgueův integrál tudíž platí

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} \kappa(\varphi'(t))\ \mathrm{d}t = \int_{\omega^{-1}(\psi^{-1}(B))} \kappa(\psi'(\omega(t))) \cdot |J_\omega(t)|\ \mathrm{d}t = \int_{\psi^{-1}(B)} \kappa(\psi'(t))\ \mathrm{d}t.$$

Následující definice je tedy korektní.

2.14 Definice. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduchá k-rozměrná plocha a $\varphi: G \to P$ je její parametrizace. Pak borelovskou k-rozměrnou míru μ_k^P na ploše P definujeme rovností*

$$\mu_k^P(B) := \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} \kappa(\varphi'(t))\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_k}\right)}\ \mathrm{d}t \tag{2.12}$$

pro každou borelovskou množinu $B \subset P$.

Musíme ovšem ověřit, že množinová funkce, kterou jsme na $\mathcal{B}(P)$ definovali vzorcem (2.12), je skutečně míra. To snadno vyplývá ze známých vlastností Lebesgueova integrálu. (Můžeme se však také odvolat na to, že μ_k^P je zřejmě obrazem $\varphi\left(\kappa(\varphi') \cdot \lambda_k^b\right)$ borelovské míry $\kappa(\varphi') \cdot \lambda_k^b$ při zobrazení φ; srov. Věty 3.21 a 3.20.)

Z Tvrzení 2.11 také snadno vyplývá, že právě definovaný pojem k-rozměrné míry na jednoduché k-ploše je zobecněním pojmu k-rozměrné míry na k-rozměrném afinním prostoru.

2.15 Poznámka. Nechť P, G, φ jsou jako v Definici 2.14. Protože funkce $\kappa(\varphi'(t))$ je spojitá na G a φ je homeomorfismus, lze zřejmě ke každému bodu $x \in P$ najít jeho otevřené okolí U_x takové, že množina $\varphi^{-1}(U_x)$ je omezená a $\kappa(\varphi'(t))$ je na ní omezená, takže $\mu_k^P(U_x \cap P) < \infty$. Míra μ_k^P je tedy lokálně konečná a pomocí Poznámky (?) snadno dostáváme, že míra μ_k^P je σ-konečná.

2.5 Definice k-rozměrné míry na „minimální“ σ-algebře $\mathcal{P}_k$

V předchozím oddíle jsme definovali míru μ_k^P na každé jednoduché ploše $P \subset \mathbb{R}^n$. Již pro nejjednodušší klasické aplikace je však důležité umět integrovat i přes k-plochy, které nejsou jednoduché (jako je například jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$), a také přes „po částech hladké plochy“ (jako je například povrch krychle nebo kužele). Pro klasický přístup k tomuto problému viz např. [Zo] nebo [Kop] (srov. Poznámka 2.25 (ii)). Obecnější přístup (srov. Dodatek 6.2) pracuje s k-rozměrnými mírami definovanými na σ-algebře všech borelovských podmnožin $\mathbb{R}^n$ (nejčastěji s Hausdorffovou mírou). My zde budeme pracovat s mírou μ_k na nejmenší σ-algebře $\mathcal{P}_k^n$, která stačí pro klasické aplikace.

2.16 Definice. *Nechť $1 \leq k < n$. Pak symbolem $\mathcal{P}_k^n$ označme nejmenší σ-algebru podmnožin $\mathbb{R}^n$, která obsahuje každou borelovskou podmnožinu každé jednoduché k-rozměrné plochy v $\mathbb{R}^n$. Je-li zřejmá hodnota n, budeme místo $\mathcal{P}_k^n$ psát pouze $\mathcal{P}_k$.*

Není těžké ukázat, že $\mathcal{P}_k$ je nejmenší σ-algebra, která obsahuje každou jednoduchou k-plochu v $\mathbb{R}^n$; menší σ-algebru proto jistě nemá smysl uvažovat.

Následující větu lze chápat jako „axiomatickou definici“ k-rozměrné míry na σ-algebře $\mathcal{P}_k$. Tato definice je sice heuristickým odvozením vzorce (2.11) dobře motivovaná, ale pro svou složitost není zcela uspokojivá. (Elegantnější axiomatická definice, s kterou je ale obtížné pracovat, je obsažena ve Větě 3.7.)

2.17 Věta. *Nechť $1 \le k < n$. Na σ-algebře $\mathcal{P}_k$ existuje právě jedna míra μ_k, pro kterou platí:*

Je-li P jednoduchá k-plocha v $\mathbb{R}^n$, φ je parametrizace P a B je borelovská podmnožina P, pak

$$\mu_k(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \kappa(\varphi'(t))\, \mathrm{d}t. \tag{2.13}$$

Důkaz věty, který je elementární, ale trochu zdlouhavý, je v Dodatku 6.4.

2.18 Poznámka. Platnost vzorce (2.13) je ovšem ekvivalentní požadavku, aby μ_k rozšiřovala každou míru μ_k^P (kde P je jednoduchá k-plocha).

V Dodatku 6.4 je plně popsána struktura σ-algebry $\mathcal{P}_k$, pro aplikace však stačí znát pouze Větu 2.17. V obvyklých aplikacích totiž vždy integrujeme přes „po částech hladké plochy“ P, které lze psát ve tvaru

$$P = \bigcup_{i=1}^{u} P_i \;\cup\; \bigcup_{i=1}^{v} Q_i, \tag{2.14}$$

kde $P_1, \ldots, P_u$ jsou po dvou disjunktní jednoduché k-plochy a pro každé $i \in \{1, \ldots, v\}$ je Q_i k_i-plocha, kde $0 \le k_i < k$. Z Tvrzení 1.21 a Tvrzení 2.19 pak snadno vyplývá, že každá borelovská množina $B \subset P$ patří do $\mathcal{P}_k$ a její k-rozměrnou míru lze počítat pomocí vzorce

$$\mu_k(B) = \mu_k(P_1 \cap B) + \cdots + \mu_k(P_u \cap B).$$

2.19 Tvrzení. *Nechť $0 \le s < k < n$, a nechť $Q \subset \mathbb{R}^n$ je s-plocha. Pak $Q \in \mathcal{P}_k$ a $\mu_k(Q) = 0$.*

Důkaz. (Stručný.) Zřejmě můžeme předpokládat $s \neq 0$. Podle Tvrzení 1.21 je Q borelovská množina. Nejprve předpokládejme, že Q je explicitně zadaný kus s-rozměrné C^1 plochy. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$Q = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\; x_{s+1} = f_{s+1}(x_1, \ldots, x_s), \ldots, x_n = f_n(x_1, \ldots, x_s)\},$$

kde $f_{s+1}, \ldots, f_n$ jsou funkce třídy C^1 na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^s$. Položme

$$P := \{(x_1, \ldots, x_n)\colon\; x_{k+1} = f_{k+1}(x_1, \ldots, x_s), \ldots, x_n = f_n(x_1, \ldots, x_s)\}.$$

Pak P je zřejmě explicitně zadaný kus k-rozměrné C^1 plochy s „přirozenou parametrizací“

$$\varphi(t_1, \ldots, t_k) := (t_1, \ldots, t_k, f_{k+1}(t_1, \ldots, t_s), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_s)), \qquad t \in G \times \mathbb{R}^{k-s}.$$

Přitom zřejmě $Q = \varphi(T)$, kde

$$T := \{(t_1, \ldots, t_k) \in G \times \mathbb{R}^{k-s}\colon\; t_{s+1} = f_{s+1}(t_1, \ldots, t_s), \ldots, t_k = f_k(t_1, \ldots, t_s)\}$$

je explicitně zadaný kus s-rozměrné C^1 plochy v $\mathbb{R}^k$. Podle Tvrzení 1.21 máme $\lambda_k(T) = 0$, takže podle (2.13) $\mu_k(Q) = \mu_k^P(Q) = 0$.

Obecný případ pak snadno dostáváme pomocí Tvrzení 1.23.

2.20 Příklad. Spočtěme plošný obsah $\mu_2(P)$ jednotkové sféry $P = \{(x, y, z)\colon\; x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Položíme-li (viz Příklad 1.10)

$$G := (0,\pi) \times (0,2\pi), \quad \Phi(\theta,\varphi) := (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad P_1 := \Phi(G),$$

je Φ parametrizace jednoduché 2-plochy P_1 a $P = P_1 \cup Q$, kde $Q = \{(x,y,z)\colon\ x^2+z^2 = 1,\ y = 0\}$. Je snadné ověřit, že Q je 1-plocha. Platí tedy

$$\mu_2(P) = \mu_2(P_1) = \int_G \kappa\left(\Phi'(\theta,\varphi)\right)\ \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Snadný výpočet dává

$$\begin{aligned}\kappa\left(\Phi'(\theta,\varphi)\right) &= \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\theta,\varphi), \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\theta,\varphi)\right)}\\ &= \sqrt{\Gamma\left((\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta), (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)\right)} = \sin\theta,\end{aligned}$$

takže $\quad \mu_2(P) = \int_G \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^\pi \sin\theta\ \mathrm{d}\theta = 4\pi.$

2.6 Definice a výpočet plošného integrálu 1. druhu

2.21 Definice. *Nechť $1 \le k < n$, $M \in \mathcal{P}_k$ a f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^*$. Potom (k-rozměrný) plošný integrál prvního druhu $\int_M f\ \mathrm{dS}_k$ funkce f přes množinu M definujeme rovností*

$$\int_M f\,\mathrm{dS}_k := \int_M f\ \mathrm{d}\mu_k, \tag{2.15}$$

konverguje-li integrál napravo. Je-li zřejmé, jaká je hodnota k, píšeme místo $\int_M f\ \mathrm{dS}_k$ pouze $\int_M f\,\mathrm{dS}$.

2.22 Poznámka.

(a) Pravá strana rovnosti (2.15) je definovaná také v některých případech, kdy f není definovaná na celé množině M (srov. Dodatek 6.6).

(b) Někdy budeme místo $\int_M f\,\mathrm{dS}$ psát $\int_M f(x)\,\mathrm{dS}(x)$.

V konkrétních případech počítáme plošný integrál prvního druhu tak, že jej převádíme na integrál podle Lebesgueovy míry, který pak počítáme běžnými způsoby (užitím Fubiniho věty a věty o substituci). K tomu nám slouží následující věta.

2.23 Věta. *Nechť $1 \le k < n$. Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduchá k-plocha, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je její parametrizace a $f\colon P \to \mathbb{R}^*$ je borelovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_P f\ \mathrm{dS} = \int_G (f\circ\varphi)(t)\cdot\kappa(\varphi'(t))\ \mathrm{d}t = \int_G (f\circ\varphi)(t)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_k}\right)}\ \mathrm{d}t,$$

konverguje-li jeden ze tří integrálů.

Důkaz. Podle Poznámky 2.18 platí $\int_P f \; \mathrm{d}S = \int_P f \; \mathrm{d}\mu_k^P$. Protože platí rovnost $\mu_k^P = \varphi(\kappa(\varphi') \cdot \lambda_k^b)$ (kde $\kappa(\varphi')\colon x \mapsto \kappa(\varphi'(x))$), podle věty o integraci podle obrazu míry (Věta 3.20) platí

$$\int_P f \; \mathrm{d}S = \int_G (f \circ \varphi) \; \mathrm{d}(\kappa(\varphi') \cdot \lambda_k^b),$$

konverguje-li jeden z integrálů. Podle věty o integraci podle neurčitého integrálu (Věta 3.21) platí

$$\int_G (f \circ \varphi) \; \mathrm{d}(\kappa(\varphi') \cdot \lambda_k^b) = \int_G (f \circ \varphi) \cdot \kappa(\varphi') \; \mathrm{d}\lambda_k,$$

má-li jedna strana smysl. (Zde jsme použili to, že funkce $(f \circ \varphi) \cdot \kappa(\varphi')$ je borelovsky měřitelná na G.)

Pro základní aplikace plošného integrálu 1. druhu si stačí pamatovat Větu 2.23 a následující tvrzení (které je snadným důsledkem Tvrzení 2.19).

2.24 Tvrzení. *Nechť P je „po částech hladká plocha“ tvaru (2.14) a f je reálná funkce definovaná aspoň na $P_1 \cup \cdots \cup P_u$, pak*

$$\int_P f \, \mathrm{dS} = \int_{P_1} f \, \mathrm{dS} + \cdots + \int_{P_u} f \, \mathrm{dS}, \tag{2.16}$$

má-li jedna strana smysl.

Integrály napravo již totiž můžeme počítat podle Věty 2.23.

2.25 Poznámka.

(i) V aplikacích funkce f není někdy definovaná na celé množině P (ale pouze μ_k-skoro všude na P). Vyjádření (2.14) lze však zpravidla zvolit tak, aby f byla definována na $P_1 \cup \cdots \cup P_u$.

(ii) Klasicky se definuje plošný integrál 1. druhu přes „po částech hladkou plochu“ $P \subset \mathbb{R}^n$ pomocí vzorce (2.16). Pak je ovšem nutno dokázat nezávislost na vyjádření (2.14). Pokud se připouštějí jen vyjádření speciálního typu (srov. definice zobecněné plochy v [Kop]), je tento důkaz jednodušší než důkaz Věty 2.17 (není nutno dokazovat Lemma 3.10).

2.26 Příklad. Uvažujme jednotkovou sféru $P = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ jako hmotnou plochu s plošnou hustotou 1 a zkoumejme jí vytvořené gravitační pole F v bodě $a = (0, 0, v), 0 < v < 1$. Rozložení uvažované hmoty je zřejmě popsáno mírou $\mu = \mu^P = C_P \cdot \mu_2$, takže složka $F_z(a)$ vektoru $F(a) = (F_x(a), F_y(a), F_z(a))$ je podle (3.10) (za předpokladu, že gravitační konstanta je 1) dána vzorcem

$$F_z(a) = \int_P \frac{z - v}{(x^2 + y^2 + (z - v)^2)^{3/2}} \; \mathrm{d}S(x, y, z).$$

Ze symetrie „je vidět“ (a snadno se spočte), že $F_x(a) = F_y(a) = 0$. Při vyjádření $P = P_1 \cup Q$ a parametrizaci Φ plochy P_1 jako v Příkladu 2.20 dostáváme

$$\begin{aligned} F_z(a) &= \int_{P_1} \frac{z-v}{(x^2+y^2+(z-v)^2)^{3/2}}\, \mathrm{d}S(x,y,z) = \int_G \frac{\cos\theta - v}{\left(\sin^2\theta + (\cos\theta - v)^2\right)^{3/2}} \cdot \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos\theta - v}{(1+v^2-2v\cos\theta)^{3/2}} \cdot \sin\theta\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Pomocí substituce $\sqrt{1+v^2-2v\cos\theta} = y$ dostáváme $F_z(a) = 0$. Ze symetrie se zdá být zřejmé (a lze přesně dokázat), že gravitační pole uvnitř jednotkové koule je nulové. Pro $v > 1$ stejný postup dává, že gravitační pole v bodě a je stejné, jako kdyby všechna hmotnost plochy P byla soustředěna v počátku. (Je zřejmé, jak formulovat analogický výsledek pro elektrostatické pole.)

2.7 Vektorový součin

2.27 Definice. *Nechť $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou prvky $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$. Pak definujeme vektorový součin $u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$ takto:*

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} := (\det[e_1, u^1, \dots, u^{n-1}], \dots, \det[e_n, u^1, \dots, u^{n-1}]). \tag{2.17}$$

2.28 Poznámka.

(i) Vektorový součin chápaný jako operace je tedy zobrazení $\times\colon (\mathbb{R}^n)^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. Pokud $n = 2$, budeme vektorový součin jediného prvku u^1 zapisovat symbolem $\times(u_1)$. (V literatuře se nejčastěji používá zápis $u^1 \times u^2$ pro vektorový součin dvou vektorů; jinak jsou častější zápisy $[u^1, \dots, u^{n-1}]$ nebo $\langle u^1, \dots, u^{n-1}\rangle$, které však kolidují s naší symbolikou.)

(ii) Definice vektorového součinu se někdy zapisuje (a dobře pamatuje) pomocí „symbolického determinantu“ (kde $u^i = (u^i_1, \dots, u^i_n)$):

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & u^1_1 & \dots & u^{n-1}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n & u^1_n & \dots & u^{n-1}_n \end{vmatrix}$$

Jeho „formální rozvoj“ podle prvního sloupce dává (2.17), například

$$\times(1,3) = \begin{vmatrix} e_1 & 1 \\ e_2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 = (3, -1),$$

$$(2,1,1) \times (1,0,3) = \begin{vmatrix} e_1 & 2 & 1 \\ e_2 & 1 & 0 \\ e_3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (3, -5, -1).$$

(iii) Vidíme, že i-tou souřadnici vektorového součinu $u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$ vypočteme tak, že číslo $(-1)^{i+1}$ znásobíme determinantem matice, kterou dostaneme, vyškrtneme-li i-tý řádek z matice $[u^1, \dots, u^{n-1}]$. Z toho snadno dostáváme, že vektorový součin $\times\colon (\mathbb{R}^n)^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení. Z vlastností determinantů snadno plyne, že je to $(n-1)$-lineární antisymetrické zobrazení.

(iv) V literatuře se vyskytuje i odlišná definice vektorového součinu, ve které se vektory e_i „kladou nakonec“, takže například jeho první složka je $\det[u^1, \dots, u^{n-1}, e_1]$. V nejběžnějším případě $n = 3$ pak obě definice dávají stejný pojem, pro $n = 2$ se však liší a dávají k sobě opačné vektory.

(v) Vektorovému součinu se také někdy říká *„vnější součin“*.

Následující dvě tvrzení dávají alternativní definice vektorového součinu.

2.29 Tvrzení. *Nechť $u^1, \dots, u^{n-1}, w \in \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$. Pak $w = u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$, právě když pro každý vektor $v \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\langle v, w \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}]. \tag{2.18}$$

Důkaz. Protože na levé i pravé straně (2.18) jsou lineární formy (proměnné v), (2.18) platí pro všechna $v \in \mathbb{R}^n$, právě když platí pro $v = e_i$, $i = 1, \dots, n$, což je ekvivalentní s (2.17).

2.30 Poznámka. Přímo z definice nebo z předchozího tvrzení snadno vidíme, že $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = 0$, právě když jsou vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ lineárně závislé.

2.31 Tvrzení. *Nechť $u^1, \dots, u^{n-1}, w \in \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$. Pak $w = u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$, právě když platí tyto podmínky:*

(i) *w je kolmý na každý z vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$.*
(ii) $\|w\| = \operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1})$.
(iii) *Jsou-li vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ lineárně nezávislé, pak* $\det[w, u^1, \dots, u^{n-1}] > 0$.

Důkaz. Jsou-li $u^1, \dots, u^{n-1}$ lineárně závislé, pak (i) – (iii) splňuje zřejmě pouze vektor $w = u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = 0$.

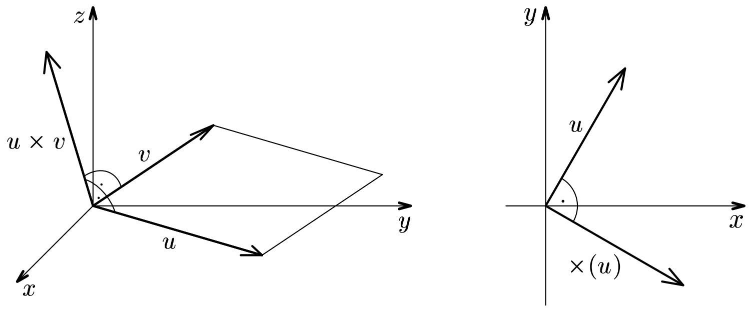
Předpokládejme tedy, že $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně nezávislé. Pak vlastnosti (*i*) a (*ii*) mají zřejmě právě dva k sobě opačné nenulové vektory z, $-z$, z nichž právě jeden splňuje i podmínku (iii). Stačí tedy dokázat, že $w := u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$ splňuje (i), (ii), (iii). Užijeme-li (2.18) na $v = u^i$, $i = 1, \dots, n-1$, dostáváme platnost (i). Pro důkaz (ii) vyjádříme $\operatorname{vol}(w, u^1, \dots, u^{n-1})$ dvěma způsoby. Podle (2.18) a (2.5) máme

$$\operatorname{vol}(w, u^1, \dots, u^{n-1}) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2.$$

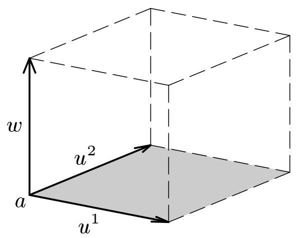
Podle Definice 2.8 platí

$$\operatorname{vol}^2(w, u^1, \dots, u^{n-1}) = \begin{vmatrix} \langle w, w \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle u^1, u^1 \rangle & \dots & \langle u^1, u^{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle u^{n-1}, u^1 \rangle & \dots & \langle u^{n-1}, u^{n-1} \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \|w\|^2 \cdot \Gamma(u^1, \dots, u^{n-1}) = \|w\|^2 \cdot \operatorname{vol}^2(u^1, \dots, u^{n-1}),$$



OBR. 2.6.



OBR. 2.7.

takže $\mathrm{vol}(w, u^1, \dots, u^{n-1}) = \|w\| \cdot \mathrm{vol}(u^1, \dots, u^{n-1})$. Protože $w \neq 0$ (viz Poznámka 2.30), z těchto dvou vyjádření dostáváme (ii). Tvrzení (iii) vyplývá z rovnosti $\langle w, w \rangle = \det[w, u^1, \dots, u^{k-1}]$ (viz (2.18)).

2.32 Poznámka.

(a) Geometrický smysl nerovnosti $\det[w, u^1, \dots, u^{n-1}] > 0$ je ten, že báze $w, u^1, \dots, u^{n-1}$ je orientovaná souhlasně s kanonickou bazí $e_1, \dots, e_n$, srov. Dodatek 6.2.

(b) Rovnost $\mathrm{vol}(w, u^1, \dots, u^{n-1}) = \|w\| \cdot \mathrm{vol}(u^1, \dots, u^{n-1})$ je „geometricky zřejmá“; $\mathrm{vol}(u^1, \dots, u^{n-1})$ je $(n-1)$-rozměrná míra „podstavy“ rovnoběžnostěnu $\mathcal{R}_a(w, u^1, \dots, u^{n-1})$ a $\|w\|$ je velikost jeho „výšky“ (srov. obr. 2.7).

Jistou názornou představu o vektorovém součinu v $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ lze získat z obr. 2.6.

2.33 Poznámka. Názorná geometrická interpretace vektorového součinu v $\mathbb{R}^2$ je zcela jednoduchá: vektor $\times(u)$ dostaneme, „otočíme-li vektor u o úhel $\pi/2$ ve směru hodinových ručiček“. Měla by tedy platit rovnost

$$\langle u, v \rangle = \langle \times(u), \times(v) \rangle. \tag{2.19}$$

Analytický důkaz je triviální, protože pro $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ platí $\times(u) = (u_2, -u_1)$, $\times(v) = (v_2, -v_1)$.

Uvažujme nyní v $\mathbb{R}^n$ nadrovinu A. Nechť $\alpha_i \in [0, \pi/2]$ je úhel, který svírá normála k A s osou x_i a $c_i = \cos\alpha_i$. Úhel α_i je tedy také úhel (srov. [Bi; Def. 20.20]), který svírá nadrovina A a nadrovina $S_i := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$. Je-li $0 \neq w = (w_1, \ldots, w_n)$ normálový vektor k A, pak zřejmě $c_i = |w_i|/\|w\|$, takže

$$(c_1)^2 + \cdots + (c_n)^2 = 1. \tag{2.20}$$

Uvažujme dále „projekci“ $\pi^{(i)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ danou předpisem

$$\pi^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

a projekci $P^{(i)} : \mathbb{R}^n \to S_i$, kde

$$P^{(i)}(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Zobrazení $\varphi_i := \pi^{(i)} \restriction_{S_i}$, $\varphi : S_i \to \mathbb{R}^{n-1}$ je zřejmě unitární bijekce (pomocí níž se obvykle S_i ztotožňuje s $\mathbb{R}^{n-1}$). Podle Poznámky 2.10 platí $\kappa(\varphi_i) = 1$. Z rovnosti $\pi^{(i)} = \varphi_i \circ P^{(i)}$ a Tvrzení 2.12 tedy máme $\kappa(\pi^{(i)} \restriction_A) = \kappa(P^{(i)} \restriction_A)$. Pomocí vektorového součinu nyní dokážeme tvrzení, které je pro $n = 2$ a $n = 3$ „geometricky zřejmé“.

2.34 Tvrzení. *Nechť A je nadrovina v $\mathbb{R}^n$ a nechť c_i, $\pi^{(i)}$, $P^{(i)}$ jsou definovány jako výše. Pak*

$$\kappa(\pi^{(i)} \restriction_A) = \kappa(P^{(i)} \restriction_A) = c_i. \tag{2.21}$$

Důkaz. Je-li $u^1, \ldots, u^{n-1}$ báze zaměření A a $w := u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$, podle (2.7), (2.2) a Tvrzení 2.31 (ii) platí

$$\kappa(\pi^{(i)} \restriction_A) = \frac{\operatorname{vol}(\pi^{(i)}(u^1), \ldots, \pi^{(i)}(u^{n-1}))}{\operatorname{vol}(u^1, \ldots, u^{n-1})} = \frac{|\det[\pi^{(i)}(u^1), \ldots, \pi^{(i)}(u^{n-1})]|}{\|w\|}. \tag{2.22}$$

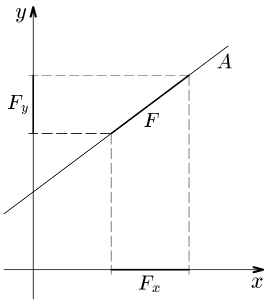
Protože $c_i = |w_i|/\|w\|$ a podle definice w máme

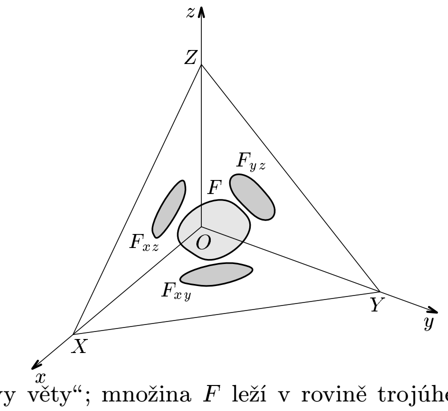
$$w_i = \det[e_i, u^1, \ldots, u^{n-1}] = (-1)^{i+1} \det[\pi^{(i)}(u^1), \ldots, \pi^{(i)}(u^{n-1})] \tag{2.23}$$

po dosazení do (2.22) dostáváme dokazovanou rovnost.

2.35 Poznámka. Z rovnosti (2.23) je vidět, jaký je geometrický význam znaménka $\operatorname{sgn}(w_i)$. Máme-li totiž na zaměření V nadroviny A zadánu orientaci tak, že $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ je kladná báze V (srov. Dodatek 6.2), pak z (2.23) vyplývá, že $(\pi^{(i)}(u^1), \ldots, \pi^{(i)}(u^{n-1}))$ je kladná (resp. záporná) báze $\mathbb{R}^{n-1}$ (tj. $\pi^{(i)} \restriction_A : A \to \mathbb{R}^{n-1}$ zachovává (resp. mění) orientaci), právě když $(-1)^{i+1} w_i > 0$ (resp. $(-1)^{i+1} w_i < 0$). Poznamenejme ještě, že číslo $w_i/\|w\|$ je kosinus úhlu z $[0, \pi]$, který svírájí vektory w, e_i, a tedy orientované prostory A a $S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$, orientujeme-li A normálovým vektorem w. Číslo $(-1)^{i+1} w_i$ je kosinus úhlu, který svírá A s S_i, pokud v S_i za kladnou bázi zvolíme $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n$.

Okamžitým důsledkem Tvrzení 2.34 je následující „zobecnění Pythagorovy věty“.





Obr. 2.8. Ke „zobecnění Pythagorovy věty“; množina F leží v rovině trojúhelníku XYZ.

2.36 Věta. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je afinní prostor dimenze $n-1$ a nechť $F \subset A$ je uzavřená množina, pro kterou $\mu_{n-1}(F) < \infty$. Pak*

$$(\mu_{n-1}(F))^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\lambda_{n-1}(\pi^{(i)}(F))\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\mu_{n-1}(P^{(i)}(F))\Big)^2. \tag{2.24}$$

Důkaz. Podle (2.21) platí $\lambda_{n-1}\left(\pi^{(i)}(F)\right) = c_i \mu_{n-1}(F)$, takže (2.24) plyne okamžitě z (2.20).

Je-li $k = 1$ a F je úsečka $\overline{ab}$, pak (2.24) je rovnost $\|b-a\|^2 = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$, což je běžné zobecnění Pythagorovy věty. Projekce množiny F v případech $k = 1$, $n = 2$ a $k = 2$, $n = 3$ jsou znázorněny na obr. 2.8. Je-li F trojúhelník XYZ na obr. 2.8, vzorec (2.24) přejde v rovnost

$$(\mu_2(XYZ))^2 = (\mu_2(X0Y))^2 + (\mu_2(X0Z))^2 + (\mu_2(Y0Z))^2.$$

2.37 Poznámka. Přirozená analogie předchozí věty platí pro afinní prostory A libovolné dimenze $1 \le k < n$. Na pravé straně příslušného vzorce je pak součet čtverců k-rozměrných měr projekcí na všechny „k-rozměrné souřadnicové roviny“. Při důkazu je nutno užít Binet-Cauchyův vzorec o determinantu součinu obdélníkových matic (srov. [Kop], [LM]).

2.8 Lokální koeficient změny k-rozměrné míry a jeho výpočet

Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$ je parametrizace jednoduché k-plochy. Jestliže φ je afinní, víme, že existuje „koeficient změny k-rozměrné míry“ $\kappa = \kappa(\varphi)$, pro který platí $\mu_k(\varphi(B)) = \kappa \cdot \lambda_k(B)$ pro každou borelovskou $B \subset G$. Pro φ, která není afinní, již takový koeficient existovat nemusí. Víme však, že pro $t_0 \in G$ je $\kappa(\varphi'(t_0))$ „lokální koeficient změny k-rozměrné míry“: je-li $B \subset G$ borelovská množina, která je „hodně blízko“ bodu t_0, pak $\mu_k(\varphi(B)) \approx \kappa(\varphi'(t_0)) \cdot \lambda_k(B)$. To jsme použili při heuristickém odvozování vzorce pro obsah plochy. Nyní, když jsme tento vzorec použili v definici k-rozměrné míry, můžeme ovšem tuto „přibližnou rovnost“ po upřesnění dokázat:

2.38 Tvrzení. *Nechť G, φ jsou jako výše a $t_0 \in G$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřené okolí $U \subset G$ bodu t_0 takové, že pokud $B \subset U$ je borelovská množina a $\lambda_k(B) > 0$, pak*

$$\left| \frac{\mu_k(\varphi(B))}{\lambda_k(B)} - \kappa(\varphi'(t_0)) \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Protože funkce

$$\kappa(\varphi'(t)) = \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_k}\right)}$$

je zřejmě spojitá, lze zvolit okolí $U \subset G$ bodu t_0 tak, aby pro každé $t \in U$ platily nerovnosti $\kappa(\varphi'(t_0)) - \varepsilon < \kappa(\varphi'(t)) < \kappa(\varphi'(t_0)) + \varepsilon$. Je-li $B \subset U$ borelovská množina a $\lambda_k(B) > 0$, pak

$$\lambda_k(B) \cdot (\kappa(\varphi'(t_0)) - \varepsilon) \le \int_B \kappa(\varphi'(t))\, \mathrm{d}t \le \lambda_k(B) \cdot (\kappa(\varphi'(t_0)) + \varepsilon),$$

takže

$$\kappa(\varphi'(t_0)) - \varepsilon \le \frac{\mu_k(\varphi(B))}{\lambda_k(B)} \le \kappa(\varphi'(t_0)) + \varepsilon.$$

Umíme-li vypočítat „lokální koeficient“ $\kappa(\varphi'(t))$ parametrizace $\varphi: G \to \mathbb{R}^n$ jednoduché k-plochy P, výpočet plošného integrálu 1. druhu $\int_P f \, \mathrm{dS}$ se redukuje na výpočet Lebesgueova integrálu $\int_G f(\varphi(t)) \cdot \kappa(\varphi'(t))\, \mathrm{d}t$.

2.39 Poznámka.

(i) Někdy se píše $\mathrm{dS} = \kappa(\varphi'(t))\, \mathrm{d}t$ a tento výraz se nazývá „element plochy“. Místo o výpočtu „lokálního koeficientu“ se pak hovoří o výpočtu „elementu plochy“.

(ii) Pro zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ má význam „lokálního koeficientu změny k-rozměrné míry“ absolutní hodnota jacobiánu: $\kappa(\varphi'(t_0)) = |J_\varphi(t_0)|$. Proto někteří autoři číslu $\kappa(\varphi'(t_0))$ pro $\varphi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ říkají „k-rozměrný jacobián“.

Protože $\varphi'(t)\, e_i = \dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial t_i}$, platí podle Tvrzení 2.11

$$\kappa(\varphi'(t)) = \operatorname{vol}\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_k}\right) = \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_k}\right)}. \tag{2.25}$$

Tento vzorec (který jsme již použili) je univerzální. V následujících speciálních případech ukážeme, jak jej lze převést na vzorec jiný (často jednodušší). Příslušné vzorce pro $\int_P f \,\mathrm{dS}$ však psát nebudeme.

Případ $k = 1$.

V tomto případě $\dfrac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} = \varphi'(t) \in \mathbb{R}^n$, takže

$$\kappa(\varphi'(t)) = \sqrt{\Gamma(\varphi'(t))} = \sqrt{\langle \varphi'(t), \varphi'(t)\rangle} = \|\varphi'(t)\|. \tag{2.26}$$

Případ $k = n - 1$.

V tomto případě lze $\kappa(\varphi'(t))$ vyjádřit pomocí vektorového součinu. Podle Tvrzení 2.31 (ii) totiž máme

$$\kappa(\varphi'(t)) = \mathrm{vol}\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}\right) = \left\|\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}\right\|. \tag{2.27}$$

Pro zkrácení zápisů zavádíme označení

$$w_\varphi(t) := \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}, \tag{2.28}$$

při kterém tedy platí

$$\kappa(\varphi'(t)) = \|w_\varphi(t)\|. \tag{2.29}$$

Podle definice vektorového součinu můžeme souřadnice $w_\varphi(t)$ jednoduše vyjádřit pomocí jacobiánů:

$$(w_\varphi(t))_i = \det\left[e_i, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial t_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \frac{\partial\varphi_n(t)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n(t)}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n)}{D(t_1, \dots, t_{n-1})}(t).$$

Platí tedy

$$\kappa(\varphi'(t)) = \|w_\varphi(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n)}{D(t_1, \dots, t_{n-1})}(t)\right)^2}. \tag{2.30}$$

Je užitečné si rozmyslet, jakým způsobem odpovídá vzorec (2.30) Větě 2.36 a jaký vzorec pro výpočet $\kappa(\varphi'(t))$ opovídá v případě obecného $1 \le k < n$ dalšímu zobecnění Pythagorovy věty zmíněnému v Poznámce 2.37.

Případ $n = 3$, $k = 2$.

V klasické diferenciální geometrii se pro parametrizaci φ jednoduché 2-plochy v $\mathbb{R}^3$ často používá zápis

$$\varphi\colon (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Pak na G podle (2.30) platí

$$\kappa(\varphi') = \sqrt{\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2}. \tag{2.31}$$

Použijeme-li (2.25), dostáváme

$$\kappa(\varphi') = \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)} = \sqrt{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|^2 - \left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\rangle^2}. \tag{2.32}$$

Často se používá označení

$$\begin{aligned}
E = g_{11} &:= \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\
F = g_{12} = g_{21} &:= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}, \\
G = g_{22} &:= \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.
\end{aligned}$$

Zde E, F, G jsou tzv. Gaussovy koeficienty (koeficienty první základní kvadratické formy plochy). Při tomto označení má (2.32) tvar

$$\kappa(\varphi') = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{g_{11}\cdot g_{22} - g_{12}^2},$$

formálně:

$$\mathrm{dS} = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{g_{11}\cdot g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Případ explicitně zadané $(n-1)$-plochy.

Nyní předpokládejme, že P je explicitně zadaný kus $(n-1)$-dimenzionální C^1 plochy v $\mathbb{R}^n$. Pak existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $1 \le i \le n$ a funkce f třídy C^1 na G, pro kterou

$$P = \{(x_1, \dots, x_n)\colon\ x_i = f(x^{(i)})\},$$

kde jsme použili označení $x^{(i)} := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Ukážeme, jak počítat plošný integrál 1. druhu přes plochu P pomocí funkce f. Plochu P přirozeně parametrizujeme regulárním homeomorfismem $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) := (t_1, \dots, t_{i-1}, f(t), t_{i+1}, \dots, t_{n-1}).$$

Jacobiho matice φ má pak tvar

$$[\varphi'(t)] = \left[\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial f(t)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial f(t)}{\partial t_{i-1}} & \frac{\partial f(t)}{\partial t_i} & \dots & \frac{\partial f(t)}{\partial t_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a platí

$$w_\varphi(t) = (-1)^{i+1}\left(-\frac{\partial f(t)}{\partial t_1}, \dots, -\frac{\partial f(t)}{\partial t_{i-1}}, 1, -\frac{\partial f(t)}{\partial t_i}, \dots, -\frac{\partial f(t)}{\partial t_{n-1}}\right). \tag{2.33}$$

Tento vzorec lze přímočaře odvodit z definice vektorového součinu. Přehlednější je však tato úvaha: $[\varphi'(t)]$ má hodnost $n-1$ a vektor $w_\varphi(t)$ je kolmý na všechny její sloupce. Krátký elementární výpočet okamžitě tedy dává, že $w_\varphi(t)$ je násobkem vektoru $\left(-\frac{\partial f(t)}{\partial t_1}, \dots, -\frac{\partial f(t)}{\partial t_{i-1}}, 1, -\frac{\partial f(t)}{\partial t_i}, \dots, -\frac{\partial f(t)}{\partial t_{n-1}}\right)$. Vyškrtneme-li z $[\varphi'(t)]$ i-tý řádek, dostáváme jednotkovou matici, takže platí $(w_\varphi(t))_i = (-1)^{i+1}$, z čehož pak okamžitě vyplývá (2.33). Dostáváme tedy

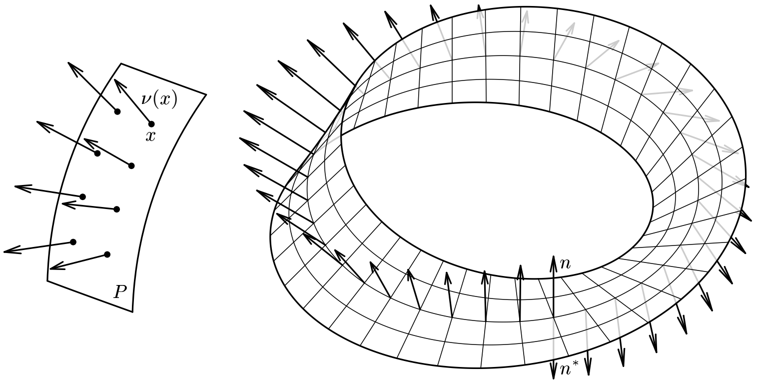
$$\kappa(\varphi'(t)) = \|w_\varphi(t)\| = \sqrt{1 + \sum_{j\neq i}\left(\frac{\partial f(t)}{\partial t_j}\right)^2}. \tag{2.34}$$

2.9 Orientace $(n-1)$-rozměrných ploch pomocí normálového pole

Definovat pojem orientace obecné k-plochy není snadné. (srov. ???). Pojem orientace $(n-1)$-plochy však lze snadno, přesně a názorně definovat pomocí pojmu *spojitého jednotkového normálového pole.*

2.40 Poznámka. Pojem „vektorové pole v na množině $A \subset \mathbb{R}^n$“ je v klasické analýze jen jiný název pro zobrazení $v\colon A \to \mathbb{R}^n$. (Tato terminologie se používá zejména tehdy, kdy je užitečné si představovat „pole vázaných vektorů“ $\{\overrightarrow{x, x+v(x)}\colon x \in A\}$.)

Nechť P je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že ν je spojité jednotkové normálové pole na P, jestliže $\nu\colon P \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení takové, že pro každé $x \in P$ je



OBR. 2.9.

$\nu(x)$ jednotkový normálový vektor k ploše P v bodě x. Jedno takové normálové pole ν k ploše P je znázorněno na obr. 2.9 vlevo.

Nechť P je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že P je *orientovatelná plocha*, jestliže na ní existuje spojité jednotkové normálové pole. Pokud jsme na ní jedno takové pole zvolili, řekneme, že P je *orientovaná plocha*. (Chceme-li o orientaci plochy hovořit jako o matematickém objektu, můžeme ji ztotožnit s tímto zvoleným spojitým jednotkovým normálovým polem.)

2.41 Tvrzení. *Nechť P je souvislá orientovatelná $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$. Pak ji lze orientovat právě dvěma způsoby. Je-li ν jedno spojité jednotkové normálové pole na P, pak to druhé je $-\nu$.*

Důkaz. Nechť ν je jedno spojité jednotkové normálové pole na P. Pak zřejmě $\nu^* := -\nu$ je také takové pole. Uvažujme nyní libovolné spojité jednotkové normálové pole $\widetilde{\nu}$ na P, bod $a \in A$ a funkce $d(x) = \|\nu(x) - \widetilde{\nu}(x)\|$, $d^*(x) = \|\nu^*(x) - \widetilde{\nu}(x)\|$. Funkce d, d^* jsou zřejmě spojité na souvislé množině P a nabývají pouze hodnoty 0 a 2; jsou tedy konstantní. Protože zřejmě buď $\widetilde{\nu}(a) = \nu(a)$ nebo $\widetilde{\nu}(a) = \nu^*(a)$, platí $\widetilde{\nu} = \nu$ nebo $\widetilde{\nu} = \nu^*$.

2.42 Poznámka. Je snadno vidět, že *nesouvislou* orientovatelnou $(n-1)$-plochu v $\mathbb{R}^n$ můžeme orientovat aspoň čtyřmi způsoby.

Ve starší literatuře se také říká, že souvislá orientovatelná plocha „má dvě strany“ a orientace je výběrem jedné z těchto dvou stran. To odpovídá názorné představě, že jednotkový normálový vektor $\nu(x)$ „chodí“ po jedné straně plochy P, na druhou stranu (po které „chodí“ $\nu^*(x) = -\nu(x)$) se však nikdy nedostane.

Nejznámější neorientovatelnou (jednostrannou) souvislou plochou je Möbiův list zobrazený vpravo na obr. 2.9. Zde je znázorněno, jak se jednotkový normálový vektor n v bodě a „spojitě přemístil“ do opačné polohy $n^* = -n$; z toho snadno vyplývá (pomocí modifikace úvahy z předchozího důkazu), že spojité jednotkové normálové pole na Möbiově listu neexistuje.

Snadno je vidět, že každá *jednoduchá* $(n-1)$-plocha je orientovatelná:

2.43 Tvrzení. *Nechť P je jednoduchá $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je její parametrizace. Pro $t \in G$ a $x \in P$ položme*

$$w_\varphi(t) := \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1} \times \cdots \times \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}} \quad \text{a} \quad \nu_\varphi(x) := \frac{w_\varphi(\varphi^{-1}(x))}{\|w_\varphi(\varphi^{-1}(x))\|}.$$

Pak ν_φ je spojité jednotkové normálové pole na P.

Důkaz. Protože φ je třídy C^1, z Poznámky 2.28 (iii) ihned vyplývá, že zobrazení $w_\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojité. Protože $\left(\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_{n-1}}\right)$ je báze tečného prostoru $T_x(P)$, z Tvrzení 2.31 vyplývá, že pro každé $t \in G$ je $w_\varphi(t)$ nenulový normálový vektor k ploše P v bodě $\varphi(t)$. Závěr tvrzení nyní vyplývá z toho, že φ je homeomorfismus G na $\varphi(G)$.

Orientaci určenou polem ν_φ nazýváme *orientací určenou parametrizací* φ. Je-li P orientovaná a její orientace je táž, jako orientace určená parametrizací φ, řekneme, že parametrizace φ je *kladná*. Je-li orientace P táž, jako orientace určená polem $-\nu_\varphi$, říkáme, že parametrizace φ je *záporná.*

2.44 Poznámka. Nechť P je souvislá jednoduchá $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$ orientovaná spojitým jednotkovým normálovým polem ν, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je její parametrizace a $t_0 \in G$. Pak z Tvrzení 2.41 a Tvrzení 2.43 okamžitě vyplývá, že φ je kladná (resp. záporná) parametrizace, právě když $w_\varphi(t_0) = \nu(\varphi(t_0))$ (resp. $w_\varphi(t_0) = -\nu(\varphi(t_0))$).

Budeme potřebovat také následující snadné tvrzení.

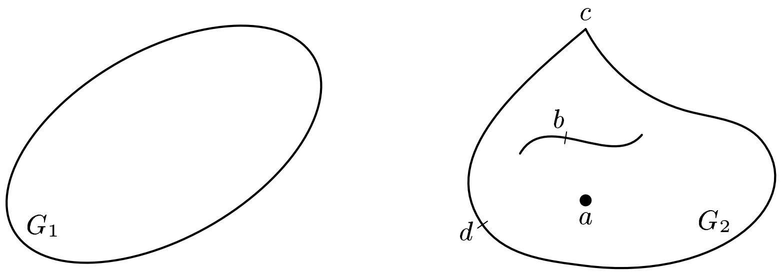
2.45 Tvrzení. *Nechť P je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, ν je spojité jednotkové normálové pole na P a $Q \subset P$ je také $(n-1)$-plocha. Pak $\nu\restriction_Q$ je spojité jednotkové normálové pole na Q. (Orientace P tedy na Q kanonicky indukuje orientaci.)*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat, že pro každý bod $a \in Q$ platí $\nu(a) \perp T_a(Q)$. To však platí, protože podle definice tečného prostoru zřejmě $T_a(Q) \subset T_a(P)$.

(Protože oba tečné prostory mají stejné dimenze, nutně se rovnají. Také není těžké ukázat, že Q je vždy relativně otevřená v P; to však potřebovat nebudeme.)

2.10 Regulární hranice otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^n$

Většina otevřených podmnožin $G \subset \mathbb{R}^n$, které jsou důležité pro aplikace, má hranici, která je „skoro hladká“: je sjednocením $(n-1)$-plochy a množiny N, která má nulovou $(n-1)$-rozměrnou míru. (Tuto vlastnost mají G_1 i G_2 z obr. 2.10).



Obr. 2.10.

Ve formulaci Gaussovy věty se však připouštějí jen některé takové množiny. Abychom je popsali, potřebujeme následující definici.

2.46 Definice. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $x \in \partial G$. Řekneme, že x je regulární hraniční bod, jestliže platí:*

(i) *Existuje $\delta > 0$ takové, že $U_\delta(x) \cap \partial G$ je jednoduchá $(n-1)$-rozměrná plocha.*
(ii) $x \notin \operatorname{int}(\overline{G})$.

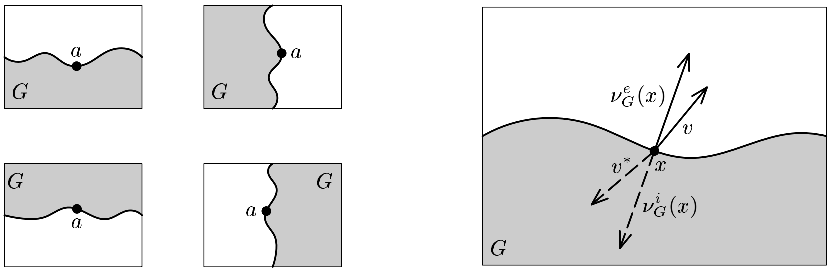
Množinu všech regulárních hraničních bodů budeme značit $\partial_* G$ a nazývat ji regulární hranicí množiny G.

2.47 Příklad. Nechť $G_1 \subset \mathbb{R}^2$, $G_2 \subset \mathbb{R}^2$ jsou množiny z obr. 2.10. Pak zřejmě platí $\partial G_1 = \partial_* G_1$. Pro bod $c \in \partial G_2$ neplatí (i), ale platí (ii); pro $b \in \partial G_2$ platí (i), ale neplatí (ii); pro $a \in \partial G_2$ neplatí ani (i), ani (ii).

Je snadno vidět, že *regulární hranice $\partial_* G$ je buď prázdná množina nebo $(n-1)$-plocha.* Situace v okolí regulárního hraničního bodu a vypadá velmi jednoduše. Pro případ $n = 2$ jsou možné právě 4 typy chování (které jsou znázorněny na obr. 2.11 vlevo), pro obecné n je $2n$ analogických typů. Toto tvrzení nebudeme potřebovat, a proto ani precizovat; bude nám stačit Tvrzení 2.50.

2.48 Definice. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $x \in \partial G$. Řekneme, že vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$*

(i) *míří v bodě x ven z G, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $x + tv \notin \overline{G}$ pro každé $t \in (0, \delta)$;*



OBR. 2.11.

(ii) *míří v bodě x do G, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $x + tv \in G$ pro každé $t \in (0, \delta)$.*

2.49 Definice. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $x \in \partial_* G$ a $\nu \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že ν je vnější (resp. vnitřní) jednotkový normálový vektor ke G v bodě x, jestliže*

(i) *ν je jednotkový normálový vektor k $\partial_* G$ v bodě x a*
(ii) *ν míří ven z G (resp. ν míří do G).*

Ilustrace k následujícímu tvrzení je na obr. 2.11 vpravo.

2.50 Tvrzení. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $x \in \partial_* G$. Pak platí:*

(i) *Existuje právě jeden vnější jednotkový normálový vektor ke G v bodě x (který budeme označovat symbolem $\nu_G^e(x)$) a právě jeden vnitřní jednotkový normálový vektor ke G v bodě x ($\nu_G^i(x) = -\nu_G^e(x)$).*
(ii) *Jestliže $v \in \mathbb{R}^n$ a $\langle v, \nu_G^e(x) \rangle > 0$, pak v míří ven z G. Jestliže $v \in \mathbb{R}^n$ a $\langle v, \nu_G^e(x) \rangle < 0$, pak v míří do G.*
(iii) *Jednotkové normálové pole ν_G^e je spojité na ploše $\partial_* G$.*

Důkaz. (Stručný.) Nejdříve dokážeme, že existuje otevřené okolí U bodu x a na U „rozhraničující funkce“ h, tj. C^1 funkce na U taková, že $\operatorname{grad} h(x) \neq 0$ pro $x \in U$ a

$$G \cap U = \{t\colon\ h(t) < 0\}, \qquad \partial G \cap U = \{t\colon\ h(t) = 0\}. \tag{2.35}$$

Zvolme otevřené okolí V bodu x takové, že $\partial G \cap V$ je kus $(n-1)$-rozměrné C^1 plochy zadaný difeomorfismem, tj. existuje otevřená množina $H \subset \mathbb{R}^n$ a difeomorfismus $\psi\colon H \to \mathbb{R}^n$ takový, že

$$\partial G \cap V = \psi(H \cap \{(x_1, \dots, x_n)\colon\ x_n = 0\}). \tag{2.36}$$

Nechť $y := \psi^{-1}(x)$ a $\delta > 0$ je tak malé, že $U^* := U_\delta^\infty(y) \subset H$. Položme

$$U := \psi(U^*), \quad M_1 := G \cap U, \quad M_2 := U \setminus \overline{G};$$

z Definice 2.46 (ii) plyne, že $M_2 \neq 0$. Dále označme

$$h^*(y_1,\dots,y_n) := y_n, \quad I_1 := \{y \in U^* : h^*(y) < 0\}, \quad I_2 := \{y \in U^* \colon\ h^*(y) > 0\}.$$

Zobrazení $\psi \restriction_{I_1 \cup I_2}$ je homeomorfismus prostoru $I_1 \cup I_2$ na $M_1 \cup M_2$, intervaly I_1, I_2 jsou souvislé a M_1, M_2 jsou neprázdné obojetné podmnožiny prostoru $M_1 \cup M_2$. Z toho snadno vyplývá, že buď $M_1 = \psi(I_1)$ nebo $M_2 = \psi(I_2)$. V prvním případě stačí zřejmě položit $h := h^* \circ \psi^{-1} \restriction_U$ a v druhém případě $h := -h^* \circ \psi^{-1} \restriction_U$.

Protože $\partial G \cap U$ je kus $(n-1)$-rozměrné C^1 plochy zadaný implicitně vazbovou funkcí h, je $\operatorname{grad} h(x)$ normálový vektor k $\partial_* G$ v bodě x (srov. Poznámka 1.28 (a)). Pro $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(x+tv) - h(x)}{t} = D_v h(x) = \langle v, \operatorname{grad} h(x)\rangle.$$

Z (2.35) a definice limity tedy vyplývá, že vektor v míří v bodě x ven z G (resp. do G), jestliže $\langle v, \operatorname{grad} h(x)\rangle > 0$ (resp. $\langle v, \operatorname{grad} h(x)\rangle < 0$). Vektory

$$\nu_G^e(x) := \frac{\operatorname{grad} h(x)}{\|\operatorname{grad} h(x)\|} \quad \text{a} \quad \nu_G^i(x) := -\frac{\operatorname{grad} h(x)}{\|\operatorname{grad} h(x)\|} \tag{2.37}$$

jsou tedy (jediné) vnější a vnitřní jednotkové normálové vektory ke G v bodě x a platí také (ii). Z (2.37) vyplývá, že ν_G^e je lokálně spojité na $\partial_* G$, takže platí též (iii).

Na $\partial_* G$ budeme většinou volit orientaci zadanou spojitým jednotkovým normálovým polem ν_G^e; v tom případě budeme říkat, že plocha $\partial_* G$ je *orientovaná vnější normálou.*

2.11 Tok vektorového pole orientovanou plochou a Gaussova věta

2.51 Definice. *Nechť $P \subset G$ je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$ orientovaná spojitým jednotkovým normálovým polem ν. Nechť $F\colon P \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole. Existuje-li reálné číslo*

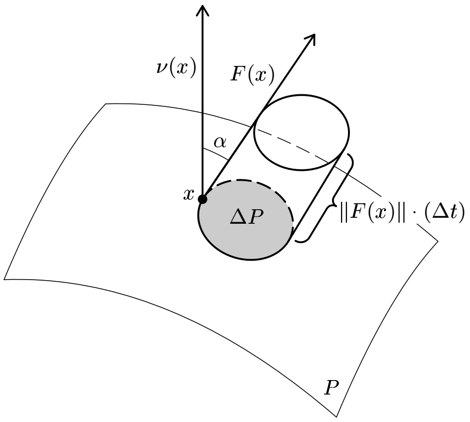
$$\int_P \overrightarrow{F}\, \mathrm{d}\overrightarrow{S} := \int_P \langle F(x), \nu(x)\rangle\ \mathrm{d}S(x),$$

nazýváme je tokem vektorového pole F orientovanou plochou P.

Tok vektorového pole orientovanou plochou se často nazývá *plošným integrálem 2. druhu.* Je-li tento plošný integrál definován, říkáme, že konverguje.

Právě zavedený pojem toku má pro $n = 3$ přirozenou hydrodynamickou interpretaci (je však důležitý i v jiných fyzikálních oborech).

Předpokládejme, že otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^3$ je zaplněna pohybující se nestlačitelnou kapalinou a $F(x)$ má význam vektorové rychlosti částice tekutiny v bodě x. (Předpokládáme tedy, že proudění je stacionární, tj. ustálené; rychlost částic v bodě x nezávisí na



Obr. 2.12.

čase.) Tok pole F plochou P má pak význam objemu kapaliny, který za jednotkový čas proteče plochou P. Přitom objem kapaliny, který proteče plochou „na stranu, do které míří ν“ se počítá se znaménkem $+$ a objem, který proteče plochou v opačném směru, se znaménkem $-$. Celkový tok může tedy být kladný, ale také záporný nebo nulový. Uvažujme nyní na ploše P velmi malou plošku ΔP s obsahem ΔS a zvolme $x \in \Delta P$ (viz obr. 2.12).

Částice kapaliny, které za velmi krátký čas Δt protekly ploškou ΔP, vyplní množinu, která je (za předpokladu hladkosti vektorového pole F) „k nerozeznání“ od „válcového tělesa“ s podstavou o obsahu ΔS a výškou $(\Delta t) \cdot \|F(x)\| \cdot |\cos\alpha|$, kde $\alpha \in [0, \pi]$ je úhel, který svírají vektory $\nu(x)$ a $F(x)$. Ploškou ΔP tedy za čas Δt proteče objem kapaliny ΔV, který má absolutní hodnotu $|\Delta V| \approx (\Delta S) \cdot (\Delta t) \cdot \|F(x)\| \cdot |\cos\alpha|$, přičemž se tento objem počítá se znaménkem $+$, pokud $\alpha \in [0, \pi/2]$ a se znaménkem $-$, pokud $\alpha \in (\pi/2, \pi]$, takže

$$\Delta V \approx (\Delta S) \cdot (\Delta t) \cdot \|F(x)\| \cdot \cos\alpha = (\Delta S) \cdot (\Delta t) \cdot \langle F(x), \nu(x) \rangle.$$

Za jednotkový čas tedy ploškou ΔP proteče objem kapaliny $\Delta T \approx (\Delta S) \cdot \langle F(x), \nu(x) \rangle$ a plošný integrál 1. druhu $\int_P \langle \nu(x), F(x) \rangle \, \mathrm{d}S(x)$ má význam celkového toku.

2.52 Poznámka. Celkový tok je (za vhodných předpokladů) limitou „integrálních součtů“ $\sum \langle F(x), \Delta S \cdot \nu(x) \rangle$. Z toho vychází označení toku, kde $\overrightarrow{F}\, \mathrm{d}\overrightarrow{S}$ je skalární součin a $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ se „heuristicky interpretuje“ jako nekonečně malý vektor $\Delta S \cdot \nu(x)$.

Výpočet toku přes jednoduchou orientovanou $(n-1)$-plochu v $\mathbb{R}^n$ zpravidla provádíme podle následujícího tvrzení (ve kterém $w_\varphi(t)$ má význam z Tvrzení 2.43, tj. $w_\varphi(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)$).

2.53 Tvrzení. *Nechť P je jednoduchá orientovaná $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$ a nechť $\varphi\colon G \to P$ je její kladná (nebo záporná) parametrizace. Nechť $F\colon P \to \mathbb{R}^n$ je bore-*

lovsky měřitelné vektorové pole. Pak

$$\int_P \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \pm \int_G \langle F(\varphi(t)), w_\varphi(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$
$$= \pm \int_G \det\left[F(\varphi(t)), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_{n-1}}(t)\right]\,\mathrm{d}t,$$

konverguje-li jeden z integrálů. Přitom znaménko + (resp. −) se bere, je-li parametrizace φ kladná (resp. záporná).

Důkaz. Podle Tvrzení 2.43 je plocha P orientovaná jednotkovým vektorovým polem $\nu_\varphi(x) := \pm\dfrac{w_\varphi(\varphi^{-1}(x))}{\|w_\varphi(\varphi^{-1}(x))\|}$. Pomocí Věty 2.23 a (2.29) dostáváme

$$\int_P \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} := \int_P \langle F(x), \nu_\varphi(x)\rangle\,\mathrm{d}S(x) = \int_G \left\langle F(\varphi(t)), \pm\frac{w_\varphi(t)}{\|w_\varphi(t)\|}\right\rangle \cdot \|w_\varphi(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

z čehož ihned plyne první z dokazovaných rovností. Druhá rovnost okamžitě vyplývá z Tvrzení 2.29.

2.54 Poznámka. V konkrétních příkladech počítáme tok vektorového pole F obecnou orientovanou $(n-1)$-plochou P (např. regulární hranicí $\partial_* G$) tak, že nalezneme vyjádření

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_u \cup N,$$

kde $P_1, \dots, P_u$ jsou jednoduché souvislé po dvou disjunktní plochy a $\mu_{n-1}(N) = 0$. Na ploše P_i uvažujme orientaci indukovanou orientací plochy P (viz Tvrzení 2.45). Pak zřejmě

$$\int_P \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_{P_1} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \dots + \int_{P_u} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}.$$

Je-li nyní $\varphi_i : G_i \to \mathbb{R}^n$ parametrizace P_i, pak φ_i je buď kladná nebo záporná parametrizace (viz Poznámka 2.44). Toky F přes plochy $P_1, \dots, P_u$ můžeme tedy počítat podle Tvrzení 2.53.

2.55 Příklad. Nechť $G = \{(x,y,z)\colon\ x^2 + y^2 < (1-z)^2,\ 0 < z < 1\}$. Pak G je vnitřek kužele s vrcholem $(0,0,1)$, jehož podstava je kruh v rovině xy o poloměru 1 a středu v počátku. Položme $D := \{(x,y)\colon\ x^2+y^2 < 1\}$ a definujme $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^3$ a $\omega\colon D \to \mathbb{R}^3$ předpisy

$$\varphi(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \omega(x,y) = (x,y,0).$$

Je snadné ověřit, že φ, ω jsou parametrizace disjunktních jednoduchých ploch $P_1 := \varphi(D)$, $P_2 := \omega(D)$ a není těžké dokázat, že $\partial_* G = P_1 \cup P_2$.

Počítejme tok vektorového pole $F(x,y,z) = (x,y,x+z)$ plochou $\partial_* G$, která je orientovaná vnější normálou.

Protože pro $(x,y) \in D$ vektor $w_\omega(x,y) = (1,0,0)\times(0,1,0) = (0,0,1)$ v bodě $\omega(x,y) = (x,y,0)$ zřejmě míří do G, je ω záporná parametrizace P_2. Platí tedy

$$\int_{P_2} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\int_D \langle F((\omega(x,y))), w_\omega(x,y)\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= -\int_D \langle (x,y,x), (0,0,1)\rangle\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_D x\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Abychom se vyhnuli odmocninám, položme $\eta(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ pro $(r,\alpha) \in \Omega := (0,1) \times (0,2\pi)$. Pak $\eta(\Omega) = D \setminus ([0,1] \times \{0\})$, takže $\psi := \varphi \circ \omega$ je parametrizace plochy $P_3 = P_1 \setminus A$, kde $A = \{(x,y,z)\colon\ y = 0,\ 0 \le x \le 1,\ z = 1 - x\}$. Zřejmě $\mu_2(A) = 0$, takže $\int_{P_1} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}\ \int_{P_3} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}$. Platí

$$\psi(r,\alpha) = (r\ \cos\alpha, r\ \sin\alpha, 1-r), \quad w_\psi(r,\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, -1) \times (-r\sin\alpha, r\cos\alpha, 0) = (r\ \cos\alpha, r\ \sin\alpha, r).$$

Protože v každém bodě P_3 zřejmě vektor $v = (0,0,1)$ míří ven z G a $\langle w_\psi(r,\alpha), v\rangle = r > 0$ pro $(r,\alpha) \in \Omega$, dostáváme, že ψ je kladná parametrizace P_3. Platí tedy

$$\begin{aligned}\int_{P_3} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \int_\Omega \langle F((\psi(r,\alpha))), w_\psi(r,\alpha)\rangle\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \int_\Omega \langle (r\ \cos\alpha, r\ \sin\alpha, 1-r+r\ \cos\alpha), (r\ \cos\alpha, r\ \sin\alpha, r)\rangle\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_\Omega (r + r^2\ \cos\alpha)\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \pi.\end{aligned}$$

Je tedy $\int_{\partial_* G} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \pi$.

Abychom mohli zformulovat základní (Gaussovu) větu o toku vektorového pole plochou, potřebujeme definovat pojem divergence vektorového pole.

2.56 Definice. *Nechť $F\colon G \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \dots F_n)$ je vektorové pole třídy C^1 na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in G$. Pak číslo*

$$\operatorname{div} F(x) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)$$

nazýváme divergencí vektorového pole F v bodě x.

Nyní již můžeme zformulovat Gaussovu větu, které se také někdy říká věta Gauss–Ostrogradského nebo věta o divergenci.

2.57 Věta. (Gaussova věta) *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená množina, pro kterou*

$$\partial G \in \mathcal{P}_{n-1}, \quad \mu_{n-1}(\partial G) < \infty \quad \text{a} \quad \mu_{n-1}(\partial G \setminus \partial_* G) = 0. \tag{2.38}$$

Nechť F je vektorové pole, které je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{G}$. Orientujeme-li plochu $\partial_* G$ vnější normálou, pak

$$\int_{\partial_* G} \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_{\partial G} \langle F(x), \nu(x)\rangle\ \mathrm{d}S(x) = \int_G \operatorname{div} F(x)\ \mathrm{d}x. \tag{2.39}$$

Poznamenejme, že první rovnost v (2.39) je zřejmá z definice toku a předpokladu $\mu_{n-1}(\partial G \setminus \partial_* G) = 0$.

Gaussova věta se někdy vyslovuje v následující „skalární formě“.

2.58 Věta. *Nechť G je jako v předchozí větě a $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ je pole jednotkových vnějších normálových vektorů ke G na $\partial_* G$. Nechť f je reálná funkce, která* *je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{G}$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\int_{\partial G} f \cdot \nu_i \, \mathrm{d}S = \int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x. \tag{2.40}$$

Je snadno vidět, že Věta 2.58 je v podstatě pouze přeformulací Věty 2.57. Víme-li totiž, že platí Věta 2.57, a aplikujeme ji na vektorové pole $F := f \cdot e_i$, dostaneme rovnost (2.40). Naopak, je-li F pole z Věty 2.57 pak rovnost (2.39) dostaneme, aplikujeme-li pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ Větu 2.58 na $f := F_i$ a příslušné rovnosti (2.40) sečteme.

Následující dvě tvrzení ukazují, jak počítat $\int_P f \cdot \nu_i \, \mathrm{dS}$ pro jednoduché a explicitně zadané plochy.

2.59 Tvrzení. *Nechť P je jednoduchá $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$ orientovaná jednotkovým normálovým polem ν a $\varphi\colon G \to P$ je její kladná (nebo záporná) parametrizace. Pak pro každou borelovsky měřitelnou funkci $f\colon P \to \mathbb{R}$ a $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\int_P f \cdot \nu_i \, \mathrm{dS} = \pm(-1)^{i+1} \int_G f(\varphi(t)) \cdot \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n)}{D(t_1, \dots, t_{n-1})}(t) \, \mathrm{d}t, \tag{2.41}$$

konverguje-li jeden z integrálů. Přitom znaménko $+$ (resp. $-$) se bere, je-li parametrizace φ kladná (resp. záporná).

Důkaz. Protože podle Tvrzení 2.43 platí $\nu_i(\varphi(t)) = \pm \dfrac{w_\varphi(t)}{\|w_\varphi(t)\|}$, dostáváme

$$\int_P f \cdot \nu_i \, \mathrm{dS} = \pm \int_G f(\varphi(t)) \cdot \frac{(w_\varphi(t))_i}{\|w_\varphi(t)\|} \cdot \|w_\varphi(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Nyní stačí použít vyjádření $(w_\varphi(t))_i$ ze vzorce za (2.29).

2.60 Tvrzení. *Nechť $1 \le i \le n$ a P je explicitně zadaný kus $(n-1)$-rozměrné C^1 plochy tvaru*

$$P = \{(x_1, \dots, x_n)\colon x_i = h(x^{(i)}),\ x^{(i)} \in G\},$$

kde jsme použili označení $x^{(i)} := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Pak platí:

(i) *Existuje právě jedno spojité jednotkové normálové pole ν^+ (resp. ν^-) na P takové, že $\nu_i^+(x) > 0,\ x \in P$ (resp. $\nu_i^-(x) < 0,\ x \in P$).*

(ii) *Pro každou borelovsky měřitelnou reálnou funkci f na P platí*

$$\int_P f \cdot \nu_i^\pm \, \mathrm{dS} = \pm \int_G f(x_1, \dots, x_{i-1}, h(x^{(i)}), x_{i+1}, \dots, x_n) \, \mathrm{d}x^{(i)}, \tag{2.42}$$

(konverguje-li jeden z integrálů), přičemž na obou stranách rovnosti se bere stejné znaménko ($+$ nebo $-$) a symbol $\mathrm{d}x^{(i)}$ nahrazuje $\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1} \, \mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n$.

Důkaz. Uvažujme parametrizaci φ jednoduché plochy P danou předpisem

$$\varphi(t) := (t_1, \dots, t_{i-1}, h(t), t_i, \dots, t_{n-1}), \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in G.$$

Pak podle (2.33) $(w_\varphi(t))_i = (-1)^{i+1}$. Položíme-li $\nu^+(x) := (-1)^{i+1} \dfrac{w_\varphi(\varphi^{-1}(x))}{\|w_\varphi(\varphi^{-1}(x))\|}$, je tedy ν^+ spojité jednotkové normálové pole na P a $\nu_i^+(x) = 1/\|w_\varphi(\varphi^{-1}(x))\| > 0$ pro $x \in P$. (Pro spojité jednotkové normálové pole $\nu^- := -\nu^+$ ovšem platí $\nu_i^-)(x) < 0,\ x \in P$.) Vzorec (2.42) stačí ověřit pro ν^+. Platí

$$\int_P f \cdot \nu_i^* \,\mathrm{dS} = \int_G f(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{\|w_\varphi(t)\|} \cdot \|w_\varphi(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_G f(\varphi(t)) \,\mathrm{d}t.$$

Označíme-li proměnné $t_1, \dots, t_{n-1}$ pořadě symboly $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, dostáváme vzorec (2.42).

Gaussovu větu lze vyslovit také v řeči diferenciálních forem. Teorie diferenciálních forem umožňuje dokázat velmi elegantní zobecnění Gaussovy věty – obecnou Stokesovu větu. Nyní budeme uvažovat jen nejjednodušší diferenciální formy (řádu $n-1$) v $\mathbb{R}^n$ tvaru

$$f(x)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n \;=\; f(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

kde f je reálná funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Při použití staršího zápisu vlevo se diferenciální forma chápe pouze jako „formální symbol“. V novějším pojetí je diferenciální forma přesně definovaný objekt; je to tenzorové pole (a $\wedge$ je symbol pro tzv. vnější součin tenzorů).

Integrál diferenciální formy $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n$ přes orientovanou $(n-1)$-plochu lze definovat pomocí integrálu 1. druhu takto.

2.61 Definice. *Nechť $1 \le i \le n$, f je funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $P \subset \Omega$ je $(n-1)$-plocha orientovaná jednotkovým normálovým polem ν. Pak klademe*

$$\int_P f(x)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n := (-1)^{i+1} \int_P f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}S, \tag{2.43}$$

má-li pravá strana smysl.

Integrálu z diferenciální formy přes orientovanou plochu se také často říká *plošný integrál 2. druhu.*

Motivace Definice 2.61 je (aspoň částečně) dána vzorcem (2.42). Koeficient $(-1)^{i+1}$ úzce souvisí se vzorcem (2.41) (z kterého ihned plyne následující tvrzení). Viz též Poznámka 2.64.

2.62 Tvrzení. *Nechť $1 \le i \le n$, f je funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $P \subset \Omega$ je jednoduchá orientovaná $(n-1)$-plocha a $\varphi\colon G \to P$ je její kladná parametrizace. Nechť $\omega = f(x)\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\ \mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n$. Pak*

$$\int_P \omega = \int_G f(\varphi(t)) \cdot \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n)}{D(t_1, \dots, t_{n-1})}(t)\ \mathrm{d}t, \tag{2.44}$$

konverguje-li jeden z integrálů.

V „řeči diferenciálních forem“ má Věta 2.58 následující tvar.

2.63 Věta. *Nechť otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je jako ve Větě 2.57. Plochu $\partial_* G$ orientujme vnější normálou. Nechť f je reálná funkce, která je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{G}$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\int_{\partial_* G} f(x)\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\ \mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n \ = \ (-1)^{i+1} \int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n. \tag{2.45}$$

2.64 Poznámka. (geometrický smysl integrálu z diferenciální formy) Popíšeme názorný geometrický význam integrálu $\int_P f(x)\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\ \mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n$. (Za jistých předpokladů kladených na P a f lze heuristickým úvahám níže dát přesný smysl.)

Uvažujme „projekci“ $\pi^{(i)}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ danou předpisem

$$\pi^{(i)}(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Rozložme P na konečně (nebo spočetně) mnoho borelovských množin $P_1, P_2, \dots$ s velmi malým diametrem a v každé z nich zvolme bod $\xi_k \in P_k$. Pak $\int_P f(x)\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\ \mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n$ je limitou „integrálních součtů“

$$\sum_k f(\xi_k) \cdot (\pm\lambda_{n-1}(\pi(P_k))),$$

kde $\pm\lambda_{n-1}(\pi(P_k))$ je „orientovaný $(n-1)$-rozměrný objem orientovaného průmětu $\pi^{(i)}(P_k)$“. To lze říci trochu srozumitelněji tak, že znaménko + (resp. -) se bere, pokud zobrazení $\pi^{(i)} \restriction_{P_k} : P_k \to \mathbb{R}^{n-1}$ „zachovává orientaci“ (resp. „mění orientaci“).

Zkusíme vysvětlit, jak tato názorná představa vede ke vzorci (2.43) (pro heuristické zdůvodnění vzorce (2.44) srov. text před (2.64)).

Protože P_k „nerozeznáme“ od množiny ležící v afinním prostoru $A := A_P^{af}(\xi_k)$ a podle Tvrzení 2.34 $\kappa(\pi^{(i)} \restriction_A) = c_i = |\nu_i(\xi_k)|$, usuzujeme, že

$$\lambda_{n-1}(\pi^{(i)}(P_k)) \approx |\nu_i(\xi_k)| \mu_{n-1}(P_k).$$

Orientujme A pomocí normálového vektoru $\nu(\xi_k)$ (srov. Dotatek 6.2.). Nahraďme nyní frázi „$\pi^{(i)} \restriction_{P_k}$ zachovává orientaci“ tvrzením $\pi^{(i)} \restriction_A$ zachovává orientaci, které podle Poznámky 2.35 platí, právě když $(-1)^{i+1}\nu_i(\xi_k) > 0$. Pak usuzujeme, že

$$\sum_k f(\xi_k) \cdot (\pm\lambda_{n-1}(\pi(P_k))) \approx \sum_k f(\xi_k) \cdot (-1)^{i+1} \nu_i(\xi_k)\, \mu_{n-1}(P_k) \approx (-1)^{i+1} \int_P f \cdot \nu_i\ \mathrm{d}S.$$

2.65 Poznámka. V teorii diferenciálních forem se definuje (vnější) diferenciál diferenciální formy

$$\omega \ = \ f(x)\ \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n$$

jako diferenciální forma

$$\mathrm{d}\omega := \mathrm{d}f(x) \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Neznáme-li teorii diferenciálních forem, nemá pro nás ovšem výraz napravo smysl. Zde poznamenejme pouze to, že

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n,$$

pro vnější součin $\wedge$ platí distributivní zákon a vnější součin je antisymetrický, tj.

$$\mathrm{d}x_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_l = -\mathrm{d}x_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_l$$

(takže $\mathrm{d}x_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_l = 0$). Počítáme-li zcela formálně podle těchto pravidel, snadno dostáváme, že

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = (-1)^{i+1}\,\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Rovnost (2.45) lze tedy psát ve tvaru

$$\int_{\partial_* G} \omega = \int_G \mathrm{d}\omega.$$

Rovnost z obecné Stokesovy věty v $\mathbb{R}^n$ má tentýž tvar, ale G je v ní orientovaná plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$ a $\partial_* G$ je její „okraj“, což je jistá orientovaná plocha dimenze $k-1$ v $\mathbb{R}^n$. Přitom ω je „obecná hladká diferenciální forma řádu $(k-1)$ v $\mathbb{R}^n$“. Pro další informace o diferenciálních formách viz oddíl 5.15.

Uveďme ještě vyjádření toku vektorového pole pomocí integrálů z diferenciálních forem.

Nechť $F = (F_1, \ldots, F_n)$ je spojité vektorové pole na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $P \subset \Omega$ je orientovaná $(n-1)$-plocha. Z Definice 2.51 a Definice 2.61 okamžitě dostáváme rovnost

(2.46)
$$\int_P \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_P F_1(x)\ \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n - \int_P F_2(x)\ \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_3 \ldots \mathrm{d}x_n + \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1} \int_P F_n(x)\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}.$$

Gaussovu větu nyní dokážeme pouze pro velmi speciální množiny G. Přitom však uvidíme základní pricip důkazu Gaussovy věty spočívající v použití Newton-Leibnizovy formule a Fubiniovy věty. Úplný důkaz lze nalézt v Dodatku 6.5. Pro zjednodušení vyjadřování zavedeme (jen pro potřebu následujícího výkladu) technický pojem i-speciální množiny.

2.66 Definice. *Nechť $1 \leq i \leq n$. Řekneme, že $G \subset \mathbb{R}^n$ je i-speciální množina, jestliže platí:*

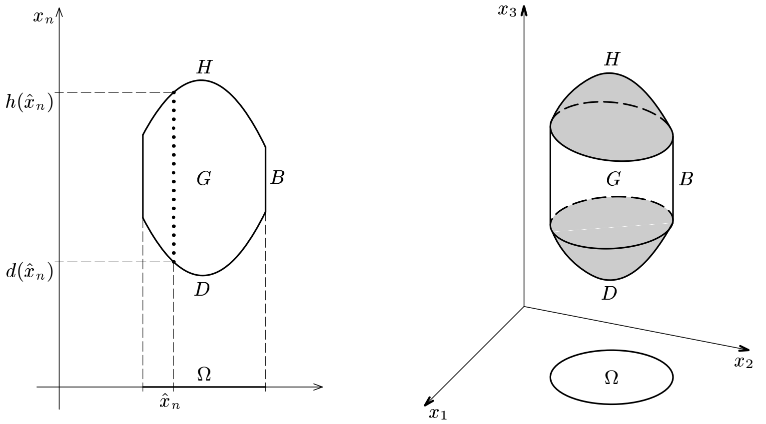
(i) *G je omezená otevřená množina.*

(ii) $\partial G \in \mathcal{P}_{n-1}$, $\quad \mu_{n-1}(\partial G) < \infty \quad$ a $\quad \mu_{n-1}(\partial G \setminus \partial_* G) = 0$.

(iii) *Existuje otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ a dvě funkce $d(t) < h(t)$ třídy C^1 na Ω takové, že*

$$G = \{(x_1, \ldots, x_n) \colon x^{(i)} \in \Omega,\ d(x^{(i)}) < x_i < h(x^{(i)})\},$$

kde jsme položili $x^{(i)} \colon = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.



OBR. 2.13. Z technických důvodů je na obrázku chyba: má být $x^{(n)}$ místo $\tilde{x}_n$

2.67 Tvrzení. *Nechť $1 \le i \le n$ a $G \subset \mathbb{R}^n$ je i-speciální množina. Nechť ν je pole vnějších jednotkových normálových vektorů na $\partial_* G$ a nechť f je reálná funkce, která je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{G}$. Pak*

$$\int_{\partial G} f \cdot \nu_i \, \mathrm{d}S = \int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x. \tag{2.47}$$

Důkaz. Pro zjednodušení zápisu budeme předpokládat, že $i = n$, důkaz v obecném případě je však zcela analogický. Kvůli zkrácení zápisu budeme dále místo $(x_1, \dots, x_{n-1})$ psát $x^{(n)}$, takže např. $(x_1, \dots, x_n) = (x^{(n)}, x_n)$.

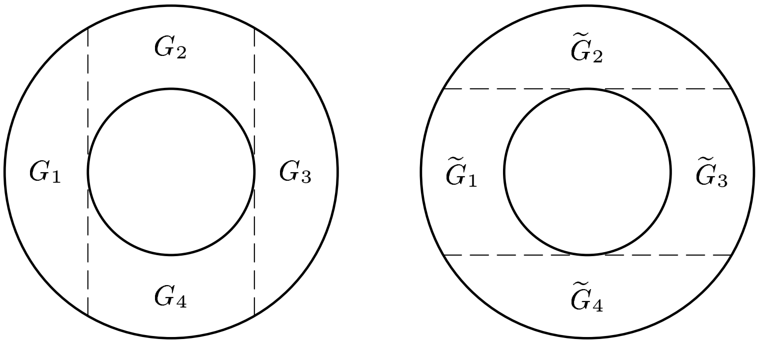
Je snadné ověřit, že $\partial G = H \cup D \cup B$, kde $B = \{x \in \partial G : x^{(n)} \in \partial\Omega\}$,
$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{(n)} \in \Omega,\ x_n = h(x^{(n)})\}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{(n)} \in \Omega,\ x_n = d(x^{(n)})\}$,
a platí inkluze $H \subset \partial_* G$, $D \subset \partial_* G$ (srov. obr. 2.13).

Je zřejmé, že v $x \in H$ míří vektor e_n ven z G a v $x \in D$ míří ven z G vektor $-e_n$. Z toho podle Tvrzení 2.50 vyplývá, že $\nu_n(x) = \langle \nu, e_n \rangle > 0$ pro $x \in H$ a $\nu_n(x) < 0$ pro $x \in D$. V bodě $x \in B \cap \partial_* G$ zřejmě nemíří do G žádný z vektorů e_n, $-e_n$, z čehož podle Tvrzení 2.50 vyplývá, že $\nu_n(x) = 0$. Platí tedy $\int_B f \cdot \nu_n \, \mathrm{dS} = 0$ a podle Tvrzení 2.60 dostáváme

$$\int_H f \cdot \nu_n \, \mathrm{dS} = \int_\Omega f(x^{(n)}, h(x^{(n)})) \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n-1},$$
$$\int_D f \cdot \nu_n \, \mathrm{dS} = -\int_\Omega f(x^{(n)}, d(x^{(n)})) \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n-1}.$$

(Lebesgueovy integrály vpravo totiž zřejmě konvergují.) Platí tedy

$$\int_{\partial G} f \cdot \nu_n \, \mathrm{dS} = \int_\Omega \Big(f(x^{(n)}, h(x^{(n)})) - f(x^{(n)}, d(x^{(n)})) \Big) \, \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n-1}. \tag{2.48}$$



Obr. 2.14.

Protože funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ je spojitá na kompaktní množině $\overline{G}$, je na ní integrovatelná, takže podle Fubiniovy věty máme

$$\int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\int_{d(x^{(n)})}^{h(x^{(n)})} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(n)}, x_n)\,\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}. \tag{2.49}$$

Protože podle Newton-Leibnizovy formule platí

$$\int_{d(x^{(n)})}^{h(x^{(n)})} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(n)}, x_n)\,\mathrm{d}x_n = f(x^{(n)}, h(x^{(n)})) - f(x^{(n)}, d(x^{(n)})),$$

ze vzorců (2.48) a (2.49) dostáváme dokazovanou rovnost (2.47).

2.68 Poznámka. Z předchozího tvrzení ihned vyplývá platnost Gaussovy věty pro množiny, které jsou i-speciální pro každé $i = 1, \ldots, n$. Tuto velmi speciální vlastnost mají například otevřené intervaly a otevřené koule. Většinu „obvyklých otevřených množin“ G pak lze pro každé $i = 1, \ldots, n$ „rozložit“ na konečně mnoho i-speciálních množin takovým způsobem, že pokud na každou z nich použijeme rovnost (2.47) a obdržené rovnosti sečteme, dostaneme vzorec (2.47) pro G (viz obr. 2.14, kde vlevo je znázorněn „rozklad“ mezikruží G na 2-speciální množiny a napravo na 1-speciální množiny). Pro takové množiny G platí tedy i Gaussova věta. Tuto úvahu lze v obvyklých příkladech přesně provést, ověřování předpokladů obecné Gaussovy věty je však nesrovnatelně pohodlnější.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená množina, pro kterou platí (2.38). Pak lze Gaussovu větu použít k *výpočtu $\lambda_n(G)$ pomocí plošného integrálu přes ∂G.*

Položíme-li například $f(x) := x_i$ $(1 \le i \le n)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1$, takže rovnost (2.40) má tvar

$$\lambda_n(G) = \int_{\partial G} x_i\,\nu_i(x)\,\mathrm{d}S(x) = (-1)^{i+1} \int_{\partial_* G} x_i\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \ldots \mathrm{d}x_n. \tag{2.50}$$

Pro vektorové pole $v(x) := \frac{x}{n}$ zase platí $\operatorname{div} v(x) = 1$, takže vzorec (2.39) má tvar

$$\lambda_n(G) = \frac{1}{n} \int_{\partial_* G} \overrightarrow{x} \, \mathrm{d}\overrightarrow{S(x)} = \frac{1}{n} \int_{\partial G} \langle x, \nu(x) \rangle \, \mathrm{d}S(x). \tag{2.51}$$

2.69 Příklad. Nechť $G := B(0,1)$ je jednotková koule v $\mathbb{R}^n$. Je snadné ověřit, že

$$\partial G = \partial_* G = \{x \colon \|x\| = 1\}$$

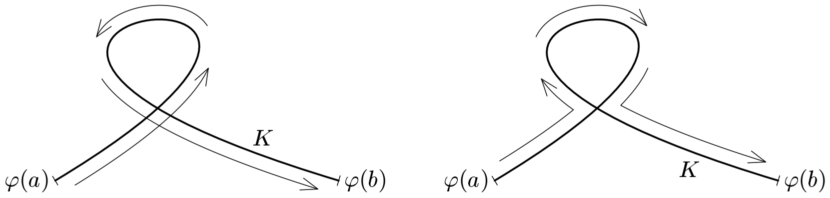
a $\nu(x) := x$ je jednotková vnější normála ke G v bodě $x \in \partial G$. Vzorec (2.51) má tedy tvar

$$\lambda_n\left(B(0,1)\right) = \frac{1}{n} \int_{\partial G} \langle x, x \rangle \, \mathrm{dS}(x) = \frac{1}{n} \, \mu_{n-1}\left(\partial \, B(0,1)\right).$$

Dostali jsme jednoduchý vztah mezi objemem jednotkové koule a plošným obsahem jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$.

2.70 Příklad. (obsah smyčky Descartova listu) Spočtěme podle (2.50) obsah $\lambda_2(G)$, kde $G = \{(x,y) \colon x^3 < 2xy,\ x > 0,\ y > 0\}$. Zřejmě G je otevřená a $\overline{G} \subset M := \{(x,y) \colon x^3 \leq 2xy,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Protože M má se sjednocením os společný pouze počátek, platí $\partial G = \overline{G} \setminus G \subset P \cup \{(0,0)\}$, kde $P = \{(x,y) \colon x^3 = 2xy, x > 0, y > 0\}$. Položíme-li $g(x,y) := x^3 + y^3 - 2xy$, snadno se spočte, že $\operatorname{grad} g(x,y) = (3x^2 - 2y, 3y^2 - 2x) \neq (0,0)$ pro $(x,y) \in P$, z čehož snadno plyne $P \subset \partial_* G$. Jestliže pro $(x,y) \in P$ položíme $t = \psi(x,y) = y/x$, snadno dostáváme, že ψ je bijekce P na $(0,\infty)$ a pro $\varphi := \psi^{-1}$ platí $\varphi(t) = (2t\,(1+t^3)^{-1}, 2t^2\,(1+t^3)^{-1})$, $t \in (0,\infty)$. Protože $\lim_{t \to 0+} \varphi(t) = (0,0)$ a ∂G je uzavřená, vidíme, že $\partial G = P \cup \{(0,0)\}$. (Není těžké dokázat, že $(0,0) \notin \partial_* G$, ale to nepotřebujeme.) Snadný výpočet dává, že $\varphi'(t) \neq 0$, $t > 0$. Protože $\psi = \varphi^{-1}$ je spojitá na P, je φ parametrizace jednoduché jednorozměrné plochy P. Platí $\varphi(1) = (1,1)$, $\varphi'(1) = (-1,1)$, $w_\varphi(1) = \times\, \varphi'(1) = (1,1)$, a protože $\operatorname{grad} g(1,1) = (1,1)$, vidíme, že $w_\varphi(1)$ směřuje v bodě $(1,1)$ ven z G, takže parametrizace φ plochy P (orientované vnější normálou) je kladná (srov. Poznámka 2.44). Platí tedy podle (2.50)

$$\lambda_2(G) = -\int_P y \, \mathrm{d}x = -\int_0^\infty \frac{2t^2}{1+t^3} \cdot \left(\frac{2t}{1+t^3}\right)' \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$



Obr. 2.15.

2.12 Křivkové integrály 1. a 2. druhu

Pojem křivky a cesty

Pojem křivky se v matematice používá v několika různých významech. Nejdůležitější tři z nich se pokusíme objasnit na názorném příkladu. Představme si, že jsme na tabuli ($\mathbb{R}^2$) nakreslili křivou čáru (která může „sama sebe protínat"). Křivkou se někdy rozumí:

(a) Výsledek naší činnosti, tedy množina (křivá čára) $K \subset \mathbb{R}^2$, kterou jsme nakreslili.

(b) Přesný popis naší činnosti, tedy přesný popis pohybu (*cesty*) hmotného bodu (konce křídy) v časovém intervalu $[a, b]$. Tento popis pohybu je dán zobrazením $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, kde $\varphi(t)$ je poloha hmotného bodu v čase t.

(c) Křivá čára $K \subset \mathbb{R}^2$ a informace, „jakým způsobem" jsme tuto čáru namalovali, přičemž nás nezajímá, kdy a jakou rychlostí jsme čáru malovali, ale pouze „směr, kterým bod (konec křídy) probíhal množinu K". Na obr. 2.15
jsou znázorněny pomocí šipek dva různé způsoby probíhání téže množiny K. Formalizací této představy dostáváme třetí význam pojmu křivky; někdy se hovoří o „orientované křivce"; srov. Poznámka 2.76.

2.71 Definice.

(i) *Cestou v $\mathbb{R}^n$ rozumíme spojité zobrazení $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Obor hodnot $\varphi([a, b])$ nazýváme geometrickým obrazem cesty a označujeme jej symbolem $\langle\varphi\rangle$.*

(ii) *Řekneme, že cesta $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je třídy C^1, má-li spojitou derivaci na $[a, b]$. Podrobněji řečeno: pro každý bod $t_0 \in [a, b]$ existuje limita*
$\varphi'(t_0) := \lim\limits_{t\to t_0, t\in[a,b]} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$ *a vektorová funkce $t \mapsto \varphi'(t)$ je spojitá na intervalu $[a, b]$.*

(iii) *Řekneme, že cesta $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech (třídy) C^1, jestliže existuje dělení $\{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že φ je třídy C^1 na každém intervalu $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, k$ (tj. $\varphi\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ je cesta třídy C^1).*
Jestliže navíc pro $t \in [a, b] \setminus \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ platí $\varphi'(t) \neq 0$, řekneme, že φ je skoro regulární cesta.

(iv) *Cesta φ se nazývá jednoduchá, je-li φ prostá; φ je uzavřená cesta, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$. Je-li φ uzavřená a $\varphi\restriction_{[a,b)}$ je prosté, říkáme, že φ je jednoduchá uzavřená cesta.*

2.72 Poznámka.

(i) Popisuje-li cesta $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ pohyb hmotného bodu v $\mathbb{R}^3$ a $t \in [a,b]$, pak $\varphi'(t)$ má význam vektorové okamžité rychlosti bodu v čase t a $\|\varphi'(t)\|$ má význam velikosti rychlosti (skalární rychlosti).

(ii) Je zřejmé, že cesta φ je skoro regulární právě tehdy, je-li po částech C^1 a φ má nenulovou derivace ve všech bodech, až na konečnou množinu.

2.73 Definice. *Řekneme, že $K \subset \mathbb{R}^n$ je křivka (po částech C^1 křivka, skoro regulární křivka, jednoduchá křivka, uzavřená křivka, jednoduchá uzavřená křivka), jestliže existuje cesta (po částech C^1 křivka, skoro regulární cesta, ... , jednoduchá uzavřená cesta) $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ jejímž geometrickým obrazem $\langle\varphi\rangle$ je K. Jestliže $\langle\varphi\rangle = K$, říkáme, že φ je parametrizací křivky K. Jednoduché křivce se říká oblouk.*

2.74 Poznámka.

(i) Podle Věty (?) a Věty (?) je každá křivka v $\mathbb{R}^n$ kompaktní souvislá množina. Jak ukázal Peano, čtverec $[0,1]^2$ je křivka; existuje cesta („Peanova křivka“) $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, jejímž geometrickým obrazem je tento čtverec. Není těžké dokázat, že každá jednoduchá a také každá skoro regulární křivka v $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, je řídká.

(ii) Terminologie kolísá; někdy se cestě říká „křivka“ a křivce „geometrický obraz křivky“.

(iii) Z Věty (?) vyplývá, že množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je oblouk, právě když je homeomorfní s intervalem $[0,1]$. Není obtížné dokázat, že množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je jednoduchá uzavřená křivka právě tehdy, když je homeomorfní s jednotkovou kružnicí v $\mathbb{R}^2$.

(iv) *Pojem skoro regulární křivky není běžný.* Skoro regulární cesta φ může mít v některých bodech t nulovou derivaci; v bodech $\varphi(t)$ pak nemusí mít křivka $\langle\varphi\rangle$ „polotečnu“ (srov. Příklad 2.75). Důvod pro práci se skoro regulárními křivkami je ten, že obvyklé parametrizace některých klasických křivek (srov. Příklad 2.93) mají v některých bodech nulovou derivaci. Kdybychom pracovali s obvyklejšími „po částech regulárními“ křivkami, museli bychom zbytečně měnit parametrizaci.

2.75 Příklad. Nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je graf funkce $f(x) = x\sin(\ln x)$, $x \in (0,1]$, $f(0) = 0$. Pak K „zřejmě“ nemá v bodě $(0,0)$ „polotečnu“ (tento pojem jsme nedefinovali). Přesto je K skoro regulární křivka; je snadné ověřit, že její parametrizace $\varphi(t) := (t^2, f(t^2))$, $t \in [0,1]$ je skoro regulární cesta.

2.76 Poznámka. (O „orientované křivce“) Řekneme, že cesty $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a $\psi\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ se liší nepodstatně (a píšeme $\varphi \sim \psi$), existuje-li spojitá rostoucí funkce ω zobrazující interval $[c,d]$ na $[a,b]$ taková, že $\psi = \varphi \circ \omega$. Je snadné ukázat, že $\sim$ je vztah ekvivalence; třídy této ekvivalence se někdy nazývají „orientovanými křivkami“ (nepodstatně se lišící cesty tedy určují jednu orientovanou křivku). Tím je upřesněn výklad (c) o třetím pojetí pojmu křivky.

Křivkový integrál 1. druhu

Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je cesta a f je reálná funkce na $\langle\varphi\rangle$. Myšlenka klasické definice křivkového integrálu 1. druhu $\int_\varphi f \,\mathrm{ds}$ je tato:

Uvažujme dělení $D = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ intervalu $[a,b]$, body $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ a integrální součet

$$\sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\xi_i)) \cdot (\Delta s)_i, \tag{2.52}$$

kde $(\Delta s)_i$ je délka cesty $\varphi\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$. Limita, ke které se blíží integrální součty (2.52), když norma dělení $\nu(D)$ jde k nule, je pak $\int_\varphi f\ \mathrm{ds}$.

Aby tato definice byla korektní, je třeba nejprve definovat pojem délky cesty a předpokládat, že φ má konečnou délku.

Je-li však vf třídy C^1, je možno uvážit, že pro dostatečně jemná dělení D je asi

$$(\Delta s)_i \approx \|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\| \approx \|\varphi'(\xi_i)\|\cdot(t_i-t_{i-1}),$$

takže $\int_\varphi f\ \mathrm{ds}$ je asi také limitou integrálních součtů

$$\textstyle\sum_{i=1}^k f(\varphi(\xi_i))\cdot\|\varphi'(\xi_i)\|\cdot(t_i-t_{i-1}).$$

Jsme tedy vedeni k následující definici.

2.77 Definice. *Nechť cesta $\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je po částech C^1 a f je reálná funkce definovaná na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^n$. Pak definujeme křivkový integrál 1. druhu $\int_\varphi f\ \mathrm{ds}$ rovností*

$$\int_\varphi f\ \mathrm{ds} := \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\|\varphi'(t)\|\ \mathrm{d}t,$$

konverguje-li Lebesgueův integrál napravo.

2.78 Poznámka. Nechť $\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je po částech C^1. Poznamenejme toto:

(i) Pro existenci $\int_\varphi f\ \mathrm{ds}$ je zřejmě nutné, aby hodnota $f(\varphi(t))$ byla definovaná pro λ_1-skoro všechna $t\in[a,b]$.

(ii) Je-li f spojitá reálná funkce na $\langle\varphi\rangle$, pak $\int_\varphi f\ \mathrm{ds}$ existuje. Jsou-li totiž $\{t_0,\dots,t_k\}$ body z Definice 2.71 (iii), pak konverguje každý z integrálů $\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t))\cdot\|\varphi'(t)\|\ \mathrm{d}t$, protože vektorovou funkci $\varphi'(t)$ a tedy i funkci $f(\varphi(t))\cdot\|\varphi'(t)\|$ lze spojitě rozšířit z (t_{i-1},t_i) na $[t_{i-1},t_i]$, $i=1,\dots,k$.

(iii) Křivkový integrál $\int_\varphi 1\ \mathrm{ds} = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\ \mathrm{d}t$ nazýváme délkou cesty φ. Lze ukázat, že tato definice splývá s obvyklou (mnohem obecnější) definicí délky cesty pomocí suprema délek „vepsaných lomených čar“.

Následující snadné tvrzení ukazuje vztah mezi křivkovým integrálem 1. druhu a plošným 1-rozměrným integrálem 1. druhu pro případ prosté (a „téměř prosté“) skoro regulární cesty.

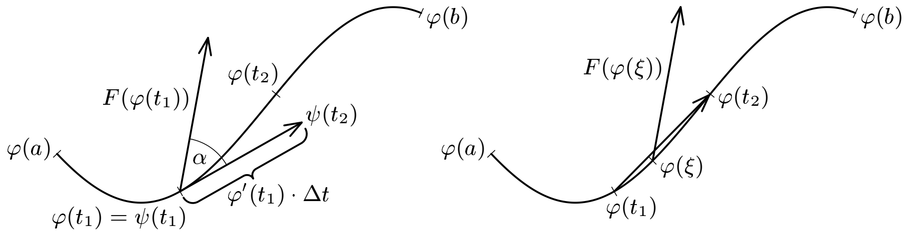
2.79 Tvrzení. *Nechť $\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je skoro regulární cesta, pro kterou existuje konečná množina $F\subset[a,b]$ taková, že φ je prostá na $[a,b]\setminus F$. Pak $\langle\varphi\rangle\in\mathcal{P}_1$ a pro každou reálnou funkci f (definovanou na podmnožině $\mathbb{R}^n$) platí*

$$\int_\varphi f\ \mathrm{ds} = \int_{\langle\varphi\rangle} f\ \mathrm{d}S_1,$$

má-li jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz. (Stručný.) Zřejmě existují body $t_0=a<t_1<\dots<t_k=b$ takové, že $\varphi\restriction_{[t_{i-1},t_i]}$ je prostá cesta třídy C^1, $\varphi'(t)\neq 0$ pro $t\in(t_{i-1},t_i)$ a množiny $P_i := \varphi((t_{i-1},t_i))$, $i=1,\dots,k$ jsou po dvou disjunktní. Podle Tvrzení 1.9 je každá P_i jednoduchá 1-plocha a podle (2.26) platí

$$\int_{P_i} f\ \mathrm{d}S_1 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t))\cdot\|\varphi'(t)\|\ \mathrm{d}t,$$



OBR. 2.16.

konverguje-li jeden z integrálů. Protože konečná množina je μ_1-nulová, je $\langle\varphi\rangle \in \mathcal{P}_1$ a

$$\int_{\langle\varphi\rangle} f \, \mathrm{d}S_1 = \sum_{i=1}^{k} \int_{P_i} f \, \mathrm{d}S_1 = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_\varphi f \, \mathrm{d}s,$$

je-li jeden z pěti výrazů konečný.

2.80 Důsledek. *Nechť φ_1, φ_2 jsou skoro regulární cesty, které jsou buď jednoduché nebo uzavřené jednoduché a $\langle\varphi_1\rangle = \langle\varphi_2\rangle$. Nechť f je funkce n proměnných. Pak $\int_{\varphi_1} f \, \mathrm{d}s = \int_{\varphi_2} f \, \mathrm{d}s$, má-li jedna strana rovnosti smysl.*

Křivkový integrál 2. druhu

2.81 Definice. *Nechť cesta $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech C^1 a F je vektorové pole definované na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^n$. Pak integrál (druhého druhu) vektorového pole F podél cesty φ definujeme rovností*

$$\int_\varphi F \, \mathrm{d}\varphi := \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \, \mathrm{d}t,$$

pokud Lebesgueův integrál napravo konverguje.

Křivkový integrál druhého druhu má důležité fyzikální interpretace, z nichž nejdůležitější je (pro $n = 3$) interpretace $\int_\varphi F \, d\varphi$ jako práce vykonaná silovým polem F po cestě φ.

Nechť φ a F jsou jako v Definici 2.81 Nechť $\varphi(t) \in \mathbb{R}^3$ má význam polohy hmotného bodu B v čase $t \in [a,b]$ a F má význam silového pole. Na hmotný bod B tedy v čase t silové pole F působí silou $F(\varphi(t))$. Ptáme se, jak velkou práci W vykoná silové pole F působením na bod B v časovém intervalu $[a,b]$. K heuristickému odvození uvažujme velmi krátký časový interval $[t_1,t_2] \subset [a,b]$ délky $\Delta t = t_2 - t_1$, na kterém je φ třídy C^1 (viz obr. 2.16) a předpokládejme, že vektorové pole F je spojité na $\langle\varphi\rangle$.

Spojitá vektorová funkce $F(\varphi(t))$ se na $[t_1,t_2]$ téměř nemění, takže ji nahradíme konstantní silou $F(\varphi(t_1))$. Dále pohyb bodu v časovém intervalu $[t_1,t_2]$ „nerozeznáme“ od rovnoměrného přímočarého pohybu, za který můžeme vzít například pohyb (popsaný cestou $\psi(t) = \varphi(t_1) + (t-t_1)\varphi'(t_1),\ t \in [t_1,t_2]$), při kterém je bod v čase t_1 v bodě $\varphi(t_1)$ a v časovém intervalu $[t_1,t_2]$ se pohybuje rychlostí $\varphi'(t_1)$. Práce, kterou vykoná síla $F(\varphi(t_1))$ při tomto rovnoměrném přímočarém pohybu, je podle středoškolské fyziky rovna

$$\|F(\varphi(t_1))\| \cdot \|\varphi'(t_1) \cdot \Delta t\| \cdot \cos\alpha = \Delta t \cdot \langle F(\varphi(t_1)), \varphi'(t_1)\rangle,$$

kde $\alpha \in [0,\pi]$ je úhel sevřený vektory $F(\varphi(t_1))$ a $\varphi'(t_1)$. Domníváme se proto, že pro práci ΔW vykonanou silovým polem F v časovém intervalu $[t_1, t_2]$ platí „přibližná rovnost“ $\Delta W \approx \Delta t \cdot \langle F(\varphi(t_1)), \varphi'(t_1)\rangle$. Je-li tedy $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ velmi jemné dělení intervalu $[a,b]$ takové, že φ je na každém $[t_{i-1}, t_i]$ třídy C^1, domníváme se, že

$$W \approx \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) \cdot \langle F(\varphi(t_{i-1})), \varphi'(t_{i-1})\rangle,$$

takže je přirozené předpokládat, že $W = \int_\varphi F\, d\varphi$.

2.82 Poznámka. Aproximujeme-li pohyb v intervalu $[t_1,t_2]$ rovnoměrným přímočarým pohybem, při kterém je bod v čase t_1 v bodě $\varphi(t_1)$ a v čase t_2 v bodě $\varphi(t_2)$, a silové pole konstantní silou $F(\varphi(\xi))$, kde $\xi \in [t_1,t_2]$ (srov. obr. 2.16), dostáváme

$$\Delta W \approx \langle F(\varphi(\xi)), \varphi(t_2) - \varphi(t_1)\rangle$$

a (pro dělení jako výše a body $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$)

$$W \approx \sum_{i=1}^{k} \langle F(\varphi(\xi_i), \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\rangle. \tag{2.53}$$

Práce W by tedy měla být limitou součtů z (2.53). Takto, tj. jako Stieltjesův integrál se $\int_\varphi F\, d\varphi$ definuje (srov. [Kr]) pro případ obecnějších cest. Této definici také zřejmým způsobem odpovídá značení integrálu. Lye ukáyat, že pro případ spojitého F a skoro regulární φ (s kterým vystačíme v obvyklých početních aplikacích) obě definice splývají, takže jsme zvolili tu elementárnější.

2.83 Poznámka. Je-li vektorové pole F spojité na $\langle\varphi\rangle$, snadno vidíme (srov. Poznámka 2.78(ii)), že integrál $\int_\varphi F\, \mathrm{d}\varphi$ existuje.

Nyní budeme vyšetřovat vztah mezi křivkovým integrálem 2. druhu a plošným 1-rozměrným integrálem 2. druhu pro případ jednoduché a jednoduché uzavřené cesty v $\mathbb{R}^n$; tedy vztah mezi „prací“ a „tokem“. Napřed zavedeme některá označení.

2.84 Definice. *Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je skoro regulární cesta, která je jednoduchá nebo jednoduchá uzavřená. Pak položíme*

$$D_{\varphi_*} := \{x \in (a,b)\colon\ \varphi'(x) \neq 0\}, \qquad \varphi_* := \varphi \restriction_{D_{\varphi_*}}, \qquad H_{\varphi_*} := \varphi(D_{\varphi_*}).$$

Jsou tedy D_{φ_*} a H_{φ_*} po řadě definiční obor a obor hodnot zobrazení φ_*. Je snadno vidět, že $\partial D_{\varphi_*} = [a,b] \setminus D_{\varphi_*}$ je konečná množina, $\varphi_* \in C^1(D_{\varphi_*})$ a $\varphi_*'(x) \neq 0$, $x \in D_{\varphi_*}$. Protože φ je jednoduchá nebo jednoduchá uzavřená, platí $H_{\varphi_*} \cap \varphi(\partial D_{\varphi_*}) = \emptyset$. Podle Tvrzení 1.9 *je tedy φ_* regulární homeomorfismus a H_{φ_*} je jednoduchá 1-plocha.*

2.85 Poznámka. Jednoduchá 1-plocha H_{φ_*} není jednoznačně určena křivkou $\langle\varphi\rangle$. Je-li například $\varphi^1(t) = (t^3, 0)$, $\varphi^2(t) = (t,0)$, $t \in [-1,1]$, pak $\langle\varphi^1\rangle = \langle\varphi^2\rangle$, ale $H_{\varphi^1_*} = H_{\varphi^2_*} \setminus \{(0,0)\}$.

2.86 Tvrzení. *Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je skoro regulární cesta, která je jednoduchá nebo jednoduchá uzavřená. Na jednoduché 1-ploše H_{φ_*} uvažujme orientaci určenou parametrizací φ_*. Nechť F je spojité vektorové pole na $\langle\varphi\rangle$. Položíme-li*

$$\Phi := \times(F) = (F_2, -F_1),$$

pak platí

$$\int_\varphi F\, \mathrm{d}\varphi = \int_{H_{\varphi_*}} \vec{\Phi}\, \mathrm{d}\vec{S}. \tag{2.54}$$

Důkaz. Podle Definice 2.81 platí

$$\int_\varphi F \,\mathrm{d}\varphi := \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle \,\mathrm{d}t$$

a podle Tvrzení 2.53

$$\int_{H_{\varphi*}} \vec{\Phi}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_{D_{\varphi*}} \langle \Phi(\varphi_*(t)), w_{\varphi*}(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Protože pro $t \in D_{\varphi*}$ platí (srov. 2.33)

$$\langle \Phi(\varphi_*(t)), w_{\varphi*}(t)\rangle = \langle \times\left(F(\varphi_*(t))\right), \times\left(\varphi_*'(t)\right)\rangle = \langle F(\varphi_*(t)), \varphi_*'(t)\rangle$$

a $[a,b] \setminus D_{\varphi*}$ je konečná množina, dostáváme (2.54).

Pod pojmem „křivkový integrál 2. druhu" se často rozumí integrál z diferenciální formy přes cestu. Budeme uvažovat diferenciální formy na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, které jsou tvaru

$$f_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n\,\mathrm{d}x_n, \tag{2.55}$$

kde $f_1, \ldots, f_n$ jsou reálné funkce na Ω.

Je-li φ po částech C^1 cesta v Ω ($\langle\varphi\rangle \subset \Omega$), pak klademe

$$\int_\varphi f_1\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n\,\mathrm{d}x_n := \int_\varphi f\,\mathrm{d}\varphi, \tag{2.56}$$

kde $f := (f_1, \ldots, f_n)$, existuje-li integrál vpravo.

Diferenciální formu (2.55) zde opět chápeme pouze jako „formální výraz". Pokud $f_j = 0$ na Ω, pak člen $f_j\,\mathrm{d}x_j$ ve výrazu (2.55) nepíšeme. Podle této úmluvy výrazem $f_i\,\mathrm{d}x_i$ $(1 \le i \le n)$ tedy rozumíme diferenciální formu (2.55), ve které $f_j = 0$ na Ω pro $j \ne i$.

Je-li tedy g spojitá funkce na Ω, platí podle této úmluvy a Definice 2.81

$$\int_\varphi g\,\mathrm{d}x_i = \int_a^b g(t)\cdot\varphi_i'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.57}$$

2.87 Poznámka. Nechť φ a φ_* jsou jako v Tvrzení 2.86 a f je spojitá funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která obsahuje $\langle\varphi\rangle$. Pak z (2.54) a (2.46) vyplývá, že

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}x_1 = \int_{H_{\varphi*}} f\,\mathrm{d}x_1, \qquad \int_\varphi f\,\mathrm{d}x_2 = \int_{H_{\varphi*}} f\,\mathrm{d}x_2,$$

(takže integrály z těchto diferenciálních forem přes cestu a příslušnou 1-rozměrnou orientovanou plochu se rovnají).

2.13 Greenova věta

Klasická formulace Greenovy věty je založena na dosti hlubokých poznatcích o topologii roviny. Proto začneme nepřesným heuristickým výkladem:

Pro „nepříliš složité“ jednoduché uzavřené křivky $K \subset \mathbb{R}^2$, které „umíme nakreslit jedním tahem“ se zdá být zřejmé, že:

(i) Křivka K rozděluje rovinu na dvě souvislé otevřené množiny, „vnitřní“ a „vnější“.
(ii) Jestliže φ je jednoduchá uzavřená cesta a $\langle\varphi\rangle = K$, pak jsou jen dvě možnosti: cesta φ je kladně orientovaná (tj. probíhá křivku K v kladném smyslu; proti směru hodinových ručiček) nebo je záporně orientovaná (tj. probíhá K v záporném smyslu; po směru hodinových ručiček).

Tvrzení (i) platí i pro zcela obecnou jednoduchou uzavřenou křivku K; to říká slavná Jordanova věta:

2.88 Věta. (Jordanova) *Nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka. Pak otevřená množina $\mathbb{R}^2 \setminus K$ má dvě komponenty, z nichž jedna (které říkáme vnitřek křivky K a značíme ji $\operatorname{Int} K$) je omezená a druhá (které říkáme vnějšek křivky K a značíme ji $\operatorname{Ext} K$) neomezená. Přitom platí $\partial(\operatorname{Int} K) = \partial(\operatorname{Ext} K) = K$.*

Poznamenejme, že platnost Jordanovy věty není vůbec samozřejmá; připouštíme totiž i takové křivky, které nemají tečnu v žádném bodě, takže se jistě vymykají naší geometrické intuici. Přesný důkaz Jordanovy věty (viz např. [Čer]) je obtížný. (Ani v případě, že K je skoro regulární, není důkaz snadný.)

Také tvrzení (ii) lze přesně formulovat a dokázat pro zcela obecné jednoduché uzavřené křivky K a cesty φ, ale již jen přesná definice kladně (záporně) orientované jednoduché uzavřené cesty φ vyžaduje nesnadné předběžné úvahy (srov. [Kr], [Čer]). Je-li však cesta φ skoro regulární, lze tyto pojmy ekvivalentně definovat podstatně elementárněji na základě představy, že „jdeme-li po $\langle\varphi\rangle$ v kladném smyslu, je $\operatorname{Int}\langle\varphi\rangle$ po naší levé ruce“(srov. obr. 2.17 vlevo). Platí totiž tvrzení:

2.89 Tvrzení. *Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená skoro regulární cesta a $G := \operatorname{Int}\langle\varphi\rangle$. Pak platí právě jedno z následujících tvrzení:*

(K) *Je-li $t \in (a,b)$ a $\varphi'(t) \neq 0$, pak vektor $\times(\varphi'(t))$ míří v bodě $\varphi(t)$ ven z G a vektor $-\times(\varphi'(t))$ míří v bodě $\varphi(t)$ do G.*
(Z) *Je-li $t \in (a,b)$ a $\varphi'(t) \neq 0$, pak vektor $\times(\varphi'(t))$ míří v bodě $\varphi(t)$ do G a vektor $-\times(\varphi'(t))$ míří v bodě $\varphi(t)$ ven z G.*

Řekneme, že cesta φ je kladně (resp. záporně) orientovaná, platí-li (K) (resp. (Z)).

Na základě Věty 2.88 a Tvrzení 2.89 již můžeme Greenovu větu formulovat:

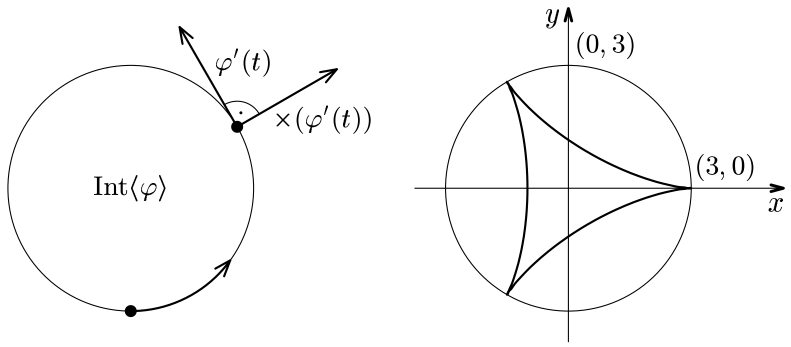
2.90 Věta. *Nechť φ je jednoduchá uzavřená skoro regulární cesta v $\mathbb{R}^2$. Nechť $F = (F_1, F_2)$ je vektorové pole, které je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$. Pak*

$$\int_\varphi F = \pm \int_{\operatorname{Int}\varphi} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\, \mathrm{d}x. \tag{2.58}$$

Přitom znaménko $+$ (resp. $-$) se bere, je-li φ kladně (resp. záporně) orientovaná.

Tato věta je snadným důsledkem Gaussovy věty. Chceme-li se ale obejít bez Věty 2.88 a Tvrzení 2.89, musíme předpoklady věty formulovat jinak:

2.91 Věta. *Nechť φ je jednoduchá uzavřená skoro regulární cesta v $\mathbb{R}^2$ a $G \subset \mathbb{R}^n$ je taková otevřená omezená množina, že $\langle\varphi\rangle = \partial G$ a platí jedna z podmínek (K), (Z) (z Tvrzení 2.89).*



Obr. 2.17.

Nechť $F = (F_1, F_2)$ je vektorové pole, které je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{G}$. Pak

$$\int_\varphi F = \pm \int_G \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \, \mathrm{d}x. \tag{2.59}$$

Přitom znaménko + (resp. −) se bere, platí-li podmínka (K) (resp. (Z)).

Důkaz. (Náznak.) Nechť φ_* a H_{φ_*} jsou jako v Definici 2.84. Předpokládejme, že platí (K). Protože $\langle\varphi\rangle \setminus H_{\varphi_*} = \partial G \setminus H_{\varphi_*}$ je konečná množina, pro každý bod $x \in H_{\varphi_*}$ existuje jeho otevřené okolí U, pro které $U \cap \partial G = U \cap H_{\varphi_*}$. Protože H_{φ_*} je jednoduchá 1-plocha, je také $U \cap H_{\varphi_*}$ jednoduchá 1-plocha. Z podmínky (K) ihned vyplývá, že pro $x = \varphi_*(t) \in H_{\varphi_*}$ platí také podmínka (ii) z Definice 2.46, a že $w_{\varphi_*}(t) = \times(\varphi'(t))$ míří v bodě x ven z G. Je tedy $H_{\varphi_*} \subset \partial_* G$ a φ_* je kladná parametrizace 1-plochy H_{φ_*}, kterou uvažujeme orientovanou vnější normálou.

Protože množiny $\partial G \setminus \partial_* G$, $\partial_* G \setminus H_{\varphi_*}$ jsou konečné (a tudíž μ_1-nulové), můžeme použít Gaussovu větu pro vektorové pole

$$\Phi := \times(F) = (F_2, -F_1)$$

a dostáváme

$$\int_{H_{\varphi_*}} \overrightarrow{\Phi} \, \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_{\partial_* G} \overrightarrow{\Phi} \, \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_G \operatorname{div} \Phi \, \mathrm{d}x = \int_G \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \, \mathrm{d}x.$$

Protože podle (2.54) platí

$$\int_{H_{\varphi_*}} \overrightarrow{\Phi} \, \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \int_\varphi F \, \mathrm{d}\varphi,$$

je důkaz proveden. Platí-li podmínka (Z), je důkaz analogický.

Větu 2.90 zřejmě dostáváme jako okamžitý důsledkem Věty 2.91 (použijeme-li ovšem také Větu 2.88 a Tvrzení 2.89).

Věta 2.90 (kterou jsme však plně nedokázali) je zřejmě výhodnější v konkrétních aplikacích, protože se podstatně snadněji ověřují její předpoklady (srov. Příklad 2.93).

Za použití symboliky diferenciálních forem (viz (2.56)) můžeme vzorec (2.59) zapsat ve tvaru

$$\int_\varphi F_1 \mathrm{d}x_1 + F_2 \mathrm{d}x_2 = \pm \int_G \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \, \mathrm{d}x. \tag{2.60}$$

Užijeme-li tento vzorec pro vektorová pole $F := (f, 0)$ a $\tilde{F} := (0, f)$ (kde f je funkce třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{G}$), dostáváme rovnosti

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}x_1 = \pm \int_G \left(-\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_\varphi f\,\mathrm{d}x_2 = \pm \int_G \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x. \tag{2.61}$$

(Tyto rovnosti odpovídají vzorcům (2.45) a nejlépe se pamatují pomocí Poznámky 2.65.)

Pro funkce $f(x_1, x_2) = x_2$ a $f(x_1, x_2) = x_1$ dostáváme klasické vzorce

$$\pm\lambda_2(G) = -\int_\varphi x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_\varphi x_1\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2}\int_\varphi x_1\,\mathrm{d}x_2 - x_2\,\mathrm{d}x_1. \tag{2.62}$$

2.92 Poznámka. Při ověřování předpokladů Věty 2.91 musíme nejen dokázat rovnost $\langle\varphi\rangle = \partial G$, ale také podmínku (K) (resp. (Z)). Místo přímého ověřování podmínky (K) můžeme ale postupovat také tak, že nejprve ověříme podmínku

(R) $\quad H_{\varphi_*} \cap \operatorname{int}(\overline{G}) = \emptyset$.

Pak (jako v důkazu Věty 2.91) dostáváme, že $H_{\varphi_*} \subset \partial_* G$, takže podmínku (K) (resp. (Z)) lze formulovat takto:

φ_* je kladná (resp. záporná) parametrizace 1-plochy H_{φ_*}, (kterou uvažujeme orientovanou vnější normálou).

K ověření této podmínky stačí napsat D_{φ_*} jako disjunktní sjednocení otevřených intervalů $I_1, \dots, I_s$ (což jistě lze) a dokázat podmínku

(K^*) (resp. (Z^*)) Existují body $t_k \in I_k$ a vektory $v_k \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, s$ takové, že v_k míří v bodě $\varphi(t_k)$ ven z G (resp. do G) a $\langle v_k, w_\varphi(t_k)\rangle > 0$.

Místo (K) tedy stačí ověřit (R) a (K^*), což může být ve složitějších případech o dost snazší.

2.93 Příklad. (Steinerova hypocykloida) Uvažujme cestu

$$\varphi(t) := (2\cos t + \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

a počítejme obsah množiny ohraničené křivkou $\langle\varphi\rangle$.

a) Okamžitě je vidět, že φ je uzavřená cesta třídy C^1 a snadný výpočet dává, že φ je skoro regulární ($\varphi'(t) = 0$ právě pro $t = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, 2\pi$). Ukažme, že $\varphi =: (\varphi_1, \varphi_2)$ je jednoduchá uzavřená:

Ztotožníme-li $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$, lze psát $\varphi(t) = 2e^{it} + e^{-2it}$. Předpokládejme, že $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$, $t_1 \neq t_2$ a $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Položíme-li $v := e^{it_1}$, $w := e^{it_2}$, dostáváme

$$2v + \frac{1}{v^2} = 2w + \frac{1}{w^2}, \qquad \frac{v+w}{v^2w^2} = 2,$$

takže $|v + w| = 2$, což zřejmě dává spor.

b) Podle klasické formy Greenovy věty (Věta 2.90) použité na vektorové pole $F(x_1, x_2) = (0, x_1)$ dostáváme

$$\lambda_2(\operatorname{Int}\varphi) = \int_{\operatorname{Int}\varphi} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\,\mathrm{d}x = \pm\int_\varphi F\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \varphi_1(t)\,\varphi_2'(t) = \pm 2\pi.$$

Tento výpočet okamžitě dává, že φ je kladně orientovaná a $\lambda_2(\operatorname{Int}\varphi) = 2\pi$, protože apriori víme, že $\lambda_2(\operatorname{Int}\varphi) > 0$.

c) Křivka $\langle\varphi\rangle$ (tzv. Steinerova hypocykloida) je zobrazena na obr. 2.17 vpravo. (Geometrický názor jsme zatím ale vůbec nepoužili.) Uveďme dvě interpretace této křivky:

(1) Bod $H := (0, 0)$ je hvězda. Planeta P se pohybuje jednotkovou úhlovou rychlostí kolem H po kružnici s poloměrem 2 v kladném smyslu, přičemž v čase 0 je v bodě $(2, 0)$. Měsíc M se pohybuje kolem P úhlovou rychlostí 2 po kružnici s poloměrem 1 v záporném smyslu, přičemž v čase 0 je v bodě $(3, 0)$. Pak se měsíc M pohybuje po křivce $\langle\varphi\rangle$.

(2) Název „hypocykloida“ odpovídá následující interpretaci: Uvažujme kružnici k o poloměru 1, která má v čase 0 střed v bodě $(0, 2)$ a její bod B (který je v čase 0 v bodě $(0, 3)$. Nechť K je kružnice o středu $(0, 0)$ a poloměru 3. Kutálí-li se nyní kružnice k po kružnici K (je jedno, v jakém smyslu), opíše bod B křivku $\langle\varphi\rangle$. Nakonec ještě poznamenejme, že

$$G = \operatorname{Int}\varphi = \{(x, y)\colon (x^2 + y^2)^2 + 8x(3y^2 - x^2) + 18(x^2 + y^2) - 27 < 0\}.$$

d) Ověřit předpoklady Věty 2.91 není vůbec snadné.

2.94 Příklad. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je množina omezená křivkou $\langle\varphi\rangle$, kde $\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (částí cykloidy) a osou x. Představme si G jako hmotnou dvourozměrnou desku s plošnou hustotou 1 a počítejme její těžiště. (Srov. Dodatek 6.6; zde je $\mu = C_G \cdot \lambda_2$.) Pro souřadnice x_t, y_t těžiště tedy platí

$$x_t = (1/\lambda_2(G)) \int_G x \; \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad y_t = (1/\lambda_2(G)) \int_G y \; \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ze symetrie cykloidy podle přímky $x = \pi$ lze usoudit, že $x_t = \pi$ (a lze to snadno potvrdit výpočtem). Spočítejme y_t pomocí Greenovy věty. Zde (na rozdíl od předchozího příkladu) nedá příliš práce přesně ověřit předpoklady Věty 2.91. Protože φ_1 je rostoucí na $[0, 2\pi]$, snadno vidíme, že $\langle\varphi\rangle$ je graf spojité funkce $g := \varphi_2 \circ (\varphi_1)^{-1}$, která je kladná na $(0, 2\pi)$. Odtud ihned plyne, že $G = \{(x, y)\colon\ x \in (0, 2\pi), 0 < y < g(x)\}$ je otevřená množina. Dodefinujeme-li φ na $(2\pi, 4\pi]$ předpisem $\varphi(t) = (4\pi - t, 0]$, snadno se ověří rovnost $\partial G = \langle\varphi\rangle$ a $\langle\varphi\rangle \cap \operatorname{int} \overline{G} = \emptyset$. Dále platí podmínka (Z) (k ověření je možno použít Poznámku 2.92; snadno vidíme že v bodech $\varphi((0, \pi))$ míří ven z G vektor e_2 a v bodech $\varphi((\pi, 2\pi))$ vektor $-e_2$). Můžeme tedy podle (2.62) a (2.61) počítat

$$\lambda_2(G) = \int_\varphi y \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \,\mathrm{d}t = 3\pi,$$

$$\int_G y \; \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\varphi \frac{1}{2} y^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \,\mathrm{d}t = \frac{5\pi}{2}.$$

Dostáváme $y_t = 5/6$.

2.95 Poznámka.

(i) Greenova věta se někdy formuluje také pro souvislé omezené otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^2$, jejichž hranice je konečným sjednocením jednoduchých uzavřených křivek. Přesná formulace předpokladů pak opět závisí na tom, užíváme-li Větu 2.88, Tvrzení 2.89 (a jejich zobecnění) nebo ne. V jednoduchých konkrétních příkladech můžeme pro takové množiny užít Gaussovu věty místo Greenovy věty.

(i) Zhruba lze říci, že Gaussova věta v $\mathbb{R}^2$ „ekvivalentní“ Greenově větě. Není to však zcela pravda. V Příkladu 2.93 bychom při výpočtu podle Gaussovy věty měli problémy s přesným ověřením předpokladů. V Příkladu 2.70 bychom zase při výpočtu podle Greenovy věty museli měnit nejpřirozenější parametrizaci φ regulární hranice (protože φ je definovaná na $(0, \infty)$, takže ji nelze rozšířit na uzavřenou cestu).

2.14 O Stokesově větě

Název oddílu odpovídá tomu, že v něm podáme jen úvodní nesystematické informace o Stokesově větě a o jejím elegantním a důležitém zobecnění – obecné Stokesově větě. K formulaci klasické Stokesovy věty potřebujeme pojem rotace vektorového pole.

2.96 Definice. *Nechť $F = (F_1, F_2, F_3)$ je vektorové pole třídy C^1 na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Pak klademe*

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

2.97 Poznámka.

(i) Je zřejmé, že $\operatorname{rot} F$ je spojité vektorové pole na G. Místo rotace se někdy říká „vír“; pak se píše $\operatorname{curl} F$ místo $\operatorname{rot} F$. (Pokud $F(x)$ má smysl rychlosti proudící tekutiny v bodě x, vektor $\operatorname{rot} F$ dává odpověď na otázku, zda v bodě x je „vír“, a jaké má tento vír vlastnosti.)

(ii) Pro zapamatování je vhodné vycházet ze „symbolické rovnosti“

$$\operatorname{rot} F = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}) \times (F_1, F_2, F_3) = \begin{vmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & F_1 \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & F_2 \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & F_3 \end{vmatrix}.$$

2.98 Věta. (klasická Stokesova věta) *Nechť $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je skoro regulární jednoduchá uzavřená cesta, která je kladně orientovaná. Položme $G := \operatorname{Int} \varphi$. Nechť Ψ je regulární difeomorfismus z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$, který je definován na otevřené množině obsahující $\overline{G}$. Položme*

$$\varphi^* := \Psi \circ \varphi, \qquad P := \Psi(G)$$

a na 2-ploše P uvažujme orientaci určenou parametrizací $\Psi \restriction_G$.

Nechť dále F je vektorové pole, které je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{P}$. Pak

$$\int_{\varphi^*} F \, \mathrm{d}\varphi^* = \int_P \overrightarrow{\operatorname{rot} F} \, \mathrm{d}\overrightarrow{S}. \tag{2.63}$$

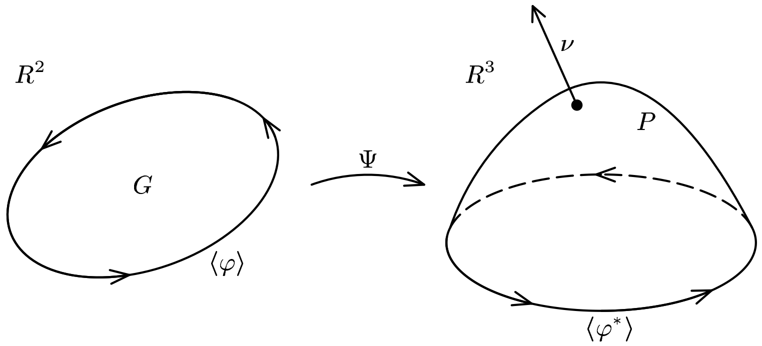
V této situaci je přirozené nazývat křivku $\langle\varphi^*\rangle$ (orientovanou parametrizací φ^*) „okrajem“ plochy P. Na obr. 2.18 „je vidět“, že křivka $\langle\varphi^*\rangle$ je „kladně orientovaná vzhledem k orientované ploše“ P. To se někdy populárně vysvětluje takto: pokud $\mathbb{R}^3$ ztotožníme s „naším fyzikálním prostorem tak, že přirozená orientace $\mathbb{R}^3$ splývá s pravotočivou orientací fyzikálního prostoru (srov. Dodatek 6.2) a jdeme-li po $\langle\varphi^*\rangle$ ve směru daném parametrizací φ^* tak, že směr od nohou k hlavě odpovídá směru normálového pole orientujícího P, pak plocha P je po naší levé ruce. (Pro přesnou definici okraje plochy ve velmi obecných situacích viz [ČM], [LM], [Kow], [KST]).

V případě, že Ψ je třídy C^2, není obtížné Větu 2.98 (pomocí přímočarých, ale trochu nepřehledných výpočtů) dokázat pomocí Greenovy věty (viz [Ko; Věta 15.8.] nebo [KST; Věta 1.9.]).

Zobecněním klasické Stokesovy věty je elegantní a důležitá *obecná Stokesova věta*, která hovoří o integraci diferenciálních forem (viz. [Kow], [LM], [KST]).

Následující nesystematické poznámky o diferenciálních formách nám pouze umožní vyslovit (bez důkazu) jistou formu obecné Stokesovy věty a naznačit, jak z ní plyne klasická Stokesova věta.

Začněme heuristickou poznámkou o názorném geometrickém smyslu integrálu z diferenciální formy (o kterém se v moderních učebnicích ne vždy hovoří). Půjde o zobecnění Poznámky 2.64.



Obr. 2.18.

Již dříve (Definice 2.61) jsme definovali integrál diferenciální formy tvaru

$$\omega \;=\; f(x)\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i-1}\wedge\mathrm{d}x_{i+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

(kterou jsme zapisovali bez symbolů $\wedge$) přes orientovanou $(n-1)$-plochu a v Poznámce 2.64 jsme se zmínili o názorné geometrické interpretaci tohoto integrálu.

Nyní budeme uvažovat $1\le k<n$ a diferenciální formu (kterou zatím chápeme jako formální výraz)

$$\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

(kde $1\le i_1<\cdots<i_k\le n$ a f je reálná funkce na otevřené množině $G\subset\mathbb{R}^n$). Položme si otázku, jak definovat $\int_P\omega$, jestliže $P\subset G$ je orientovaná k-plocha (srov. Dodatek 6.2). Pro jednoduchost uvažujme případ, kdy P je jednoduchá k-plocha orientovaná parametrizací $\varphi\colon D\to P$ $(D\subset\mathbb{R}^k)$. (Pro každé $t\in D$ je tedy $(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t),\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t))$ kladná báze tečného prostoru $T_{\varphi(t)}(P)$.)

Názorný geometrický smysl integrálu $\int_P\omega$ je zcela analogický případu $k=n-1$ (srov. Poznámka 2.64):

Uvažujme projekci $\pi\colon(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$. Rozložme P na konečně (nebo spočetně) mnoho borelovských množin $P_1,P_2,\ldots$ s velmi malým diametrem a v každé z nich zvolme bod $\xi_j\in P_j$. Pak $\int_P\omega$ je limitou „integrálních součtů“

$$\sum_j f(\xi_j)\cdot(\pm\lambda_k(\pi(P_j))),$$

kde znaménko $+$ se bere, pokud zobrazení $\pi\restriction_{P_j}$ „zachovává orientaci“. Označme $D_j:=\varphi^{-1}(P_j)$, $\eta_j:=\varphi^{-1}(\xi_j)$ a $\psi:=\pi\circ\varphi=(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})$. Pak $\pi(P_j)=\psi(D_j)$, takže lze očekávat, že

$$\lambda_k(\pi(P_j))=\lambda_k(\psi(D_j))\approx|J_\psi(\eta_j)|\cdot\lambda_k(D_j)=\left|\frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{D(t_1,\ldots,t_k)}(\eta_j)\right|\cdot\lambda_k(D_j)$$

Přitom lze očekávat, že znaménko $+$ bereme, pokud zúžení π na $T_{\xi_j}(P)$ zachovává orientaci, tj. pokud $\left(\pi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\eta_j)\right),\ldots,\pi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(\eta_j)\right)\right)$ je kladná báze prostoru $\mathbb{R}^k$. To však platí právě tehdy, když $\frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{D(t_1,\ldots,t_k)}(\eta_j)>0$. Zdá se být tedz věrohodné, že

$$\int_P\omega\approx\sum_j f(\xi_j)\cdot(\pm\lambda_k(\pi(P_j)))\approx\sum_j f(\varphi(\eta_i))\,\frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{D(t_1,\ldots,t_k)}(\eta_j)\cdot\lambda_k(D_j).$$

Je tedy přirozené definovat

(2.64) $$\int_P f(x)\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}:=\int_D f(\varphi(t))\cdot\frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{D(t_1,\ldots,t_k)}(t)\;\mathrm{d}t,$$

konverguje-li Lebesgueův integrál napravo.

Jde o přímé zobecnění vzorce (2.44). Tato skutečnost a výše provedené heuristické úvahy napovídají (a není těžké to přesně dokázat), že definice je korektní, tj. nezávisí na výběru kladné parametrizace φ orientované jednoduché k-plochy P.

Libovolnou diferenciální formu řádu $1 \le k \le n$ na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ lze psát právě jedním způsobem v *kanonickém tvaru*

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1,\ldots,i_k}(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \tag{2.65}$$

kde $a_{i_1,\ldots,i_k}(x)$ jsou funkce na G. Jsou-li tyto funkce třídy C^p $(0 \le p \le \infty)$ na G, říkáme, že ω je třídy C^p na G. Formy tvaru (2.65) se sčítají a násobí reálným číslem přirozeným způsobem a klademe

$$\int_P \omega := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \int_P a_{i_1,\ldots,i_k}(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}. \tag{2.66}$$

Je však nutno uvažovat diferenciální formy zapsané i v jiných tvarech, například ve tvaru

$$\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

kde nyní $1 \le i_1 \le n, \ldots, 1 \le i_k \le n$ jsou *zcela libovolné indexy.* Integrál i takové diferenciální formy definujeme rovností (2.64). V případě, že v zápisu ω „jsou dva stejné diferenciály“, tj. $i_r = i_s$ pro některou dvojici $1 \le r < s \le k$, je $\frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{D(t_1,\ldots,t_k)}(t) = 0$ na D, takže $\int_P \omega = 0$ pro každou orientovanou jednoduchou k-plochu $P \subset G$. Je proto přirozené ω považovat za nulovou diferenciální formu. (Zde vycházíme z dosti přirozeného předpokladu, že *pokud dvě diferenciální k-formy mají stejný integrál přes všechny jednoduché k-plochy, pak se rovnají.*)

Jsou-li dále $i_1, \ldots, i_k$ indexy z $\{1, \ldots, n\}$ a pro indexy $j_1, \ldots, j_k$ platí $j_k = i_{\pi(k)}$, kde $\pi\colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ je permutace, pak podle známých vlastností determinantů na G platí

$$\frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_k})}{D(t_1,\ldots,t_k)} = (-1)^{\operatorname{sgn}(\pi)} \frac{D(\varphi_{j_1},\ldots,\varphi_{j_k})}{D(t_1,\ldots,t_k)}.$$

Platí tedy (pro libovolnou funkci f na G a libovolnou P)

$$\int_P f(x) \cdot \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_k} = (-1)^{\operatorname{sgn}(\pi)} \int_P f(x) \cdot \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \tag{2.67}$$

jakmile má jedna strana rovnosti smysl. Proto je přirozené postulovat rovnost

$$f(x) \cdot \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_k} = (-1)^{\operatorname{sgn}(\pi)} f(x) \cdot \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

Je tedy zřejmé, jak se libovolná diferenciální forma tvaru $\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ převede na kanonický tvar (například $f(x) \cdot \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 = -f(x) \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$).

K formulaci jakékoliv verze obecné Stokesovy věty je nutno ještě definovat („vnější“) diferenciál k-formy třídy C^1. Pro případ k-formy třídy C^1 na G, jejíž kanonický tvar je

$$\omega = f(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

je jejím diferenciálem $(k+1)$-forma tvaru

$$\mathrm{d}\omega := \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

což je ovšem rovnost, jejíž pravou stranu jsme ještě nedefinovali. Položíme-li však

$$\mathrm{d}f := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}x_n \tag{2.68}$$

a předpokládáme „asociativitu vnějšího součinu“, máme

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\,\mathrm{d}x_n \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \tag{2.69}$$

přičemž nyní má výraz napravo již zřejmý smysl (formy se převedou na kanonický tvar a sečtou). Má-li tedy obecná k-forma třídy C^1 na $G \subset \mathbb{R}^n$ kanonický tvar (2.65), můžeme definovat

$$\mathrm{d}\omega := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{d}\left(a_{i_1,\dots,i_k}(x)\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\right). \tag{2.70}$$

2.99 Příklad. Na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$ uvažujme diferenciální formu třídy C^1 tvaru

$$\omega := F_1\,\mathrm{d}x_1 + F_2\,\mathrm{d}x_2 + F_3\,\mathrm{d}x_3.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&+ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right) \wedge \mathrm{d}x_3 = \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Při označeních z Věty 2.98 lze pak psát (srov (2.56) a (2.46))

$$\int_{\varphi^*} F\,\mathrm{d}\varphi^* = \int_{\varphi^*} \omega, \qquad \int_P \overrightarrow{\operatorname{rot} F}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_P \mathrm{d}\omega,$$

takže rovnost ((?)) z klasické Stokesovy věty lze přepsat do tvaru

$$\int_{\varphi^*} \omega = \int_P \mathrm{d}\omega.$$

Nyní bez důkazu uvedeme jednu (dosti speciální) verzi obecné Stokesovy věty v $\mathbb{R}^n$.

2.100 Věta. *Nechť $1 < k < n$ a otevřená omezená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ splňuje předpoklady (Gaussovy) Věty 2.57 a nechť $P_1 \subset \partial_* G, \dots, P_s \subset \partial_* G$ jsou jednoduché $(k-1)$-plochy (orientované vnější normálou) takové, že $\mu_{k-1}\left(\partial G \setminus \bigcup_{i=1}^s P_i\right) = 0$. Nechť φ_i je kladná parametrizace plochy P_i, $i = 1, \dots, s$.*

Nechť $H \supset \overline{G}$ je otevřená množina a $\Psi\colon H \to \mathbb{R}^n$, je regulární homeomorfismus. Na jednoduché k-ploše $\Psi(G)$ uvažujme orientaci indukovanou parametrizací $\Psi\restriction_G$ a na jednoduché $(k-1)$-ploše $\Psi(P_i)$ uvažujme orientaci indukovanou parametrizací $\Psi \circ \varphi_i$ $(i = 1, \dots, s)$.

Nechť ω je diferenciální forma řádu k, která je třídy C^1 na otevřené množině obsahující $\Psi(\overline{G})$. Pak

$$\sum_{i=1}^s \int_{\Psi(P_i)} \omega = \int_{\Psi(G)} \mathrm{d}\omega. \tag{2.71}$$

Na základě výpočtů z Příkladu 2.99 není těžké ukázat, že klasická Stokesova věta je důsledkem Věty 2.100.

V předchozím textu jsme již vysvětlili, jak se s diferenciálními formami v $\mathbb{R}^n$ počítá. Výklad však byl dosti vzdálený přesné matematické teorii; dokonce jsme ani přesně nedefinovali, co to diferenciální forma je. Proto se pokusíme krátce vysvětlit *obvyklý moderní přístup.*

Nechť $(f_1, \dots, f_n)$ je kanonická duální báze v $(\mathbb{R}^n)^*$, $1 \le k \le n$ a jsou dány indexy $1 \le i_1 \le n, \dots, 1 \le i_k \le n$. Nechť $\pi := (f_{i_1}, \dots, f_{i_k})$, takže $\pi\colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$.

Nyní definujme funkci

$$f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}\colon (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$$

předpisem

$$(f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k})(v_1,\ldots,v_k) := \det[\pi(v_1),\ldots,\pi(v_k)] = \det(f_{i_r}(v_s))_{r,s=1}^k.$$

Z vlastností determinantu je snadno vidět, že $f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k} \in {}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$: je to k-lineární forma na $\mathbb{R}^n$. Navíc je vidět, že $f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}$ je *antisymetrická* k-lineární forma. Množina všech antisymetrických k-lineárních forem na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru V se obvykle označuje symbolem $\Lambda^k(V^*)$ a jeho prvky se nazývají k-kovektory nebo k-krát kovariantní antisymetrické tenzory (antisymetrické tenzory typu $(0,k)$). Platí tedy $f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k} \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$. Tento k-kovektor $f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}$ má jednoduchou geometrickou interpretaci:

Uvažujme projekci $\pi = (f_{i_1},\ldots,f_{i_k})$, libovolný bod $a\in\mathbb{R}^n$ a vektory $v_1,\ldots v_k\in\mathbb{R}^n$. Pak $(f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k})(v_1,\ldots,v_k)$ má význam „orientovaného objemu“(orientovaného) rovnoběžnostěnu

$$\pi\left(\mathcal{R}_a(v_1,\ldots,v_k)\right) = \mathcal{R}_{\pi(a)}(\pi(v_1),\ldots,\pi(v_k)),$$

tj. číslu $\pm\operatorname{vol}(\pi(v_1),\ldots,\pi(v_k))$, kde znaménko $+$ (resp. $-$) se bere, jestliže $(\pi(v_1),\ldots,\pi(v_k))$ je kladná (resp. záporná) báze $\mathbb{R}^k$ (pokud nejde o bázi, a tedy ani o rovnoběžnostěn, je zkoumaná hodnota nulová).

Ukazuje se, že každý prvek $w\in\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ lze psát jednoznačně ve tvaru (kde $a_{i_1,\ldots,i_k}\in\mathbb{R}$)

$$w = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1,\ldots,i_k}\cdot f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}.$$

Diferenciální k-forma na otevřené množině $G\subset\mathbb{R}^n$ se obvykle definuje jako zobrazení (tenzorové pole) $\omega\colon G\to\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ a diferenciální forma $\omega = \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ je konstantní zobrazení, pro které $\omega(x) = f_{i_1}\wedge\cdots\wedge f_{i_k}, \quad x\in G$.

Při tomto obvyklém moderním pojetí opět dostáváme, že každou k-formu na G lze jednoznačně psát v (kanonickém tvaru) (2.65).

Pro diferenciální formu v tomto tvaru můžeme vzorce (2.66) a (2.64) přepsat ve tvaru

$$\int_\varphi \omega = \int_D \omega(\varphi(t))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t),\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial t_k}(t)\right)\,\mathrm{d}t \tag{2.72.}$$

Tento vzorec lze tedy přijmout za definici integrálu z diferenciální formy přes jednoduchou plochu, pokud diferenciální formu chápeme jako tezorové pole.

3. Dodatky

3.1 Orientace vektorového prostoru

Již na střední škole se užívá pojem orientované úsečky a pojem orientovaného úhlu. V obou případech platí, že daný objekt lze orientovat právě dvěma způsoby, a že orientace nějak souvisí s „udáním směru". V matematice zavádíme pojem orientace řady jiných objektů. Intuitivně je jasný pojem orientované jednoduché uzavřené křivky – orientace nám udává volbu jednoho ze dvou možných „smyslů (směrů) jejího probíhání". Totéž platí o orientaci jednorozměrného prostoru $\mathbb{R}$. O něco obtížnější je pojem orientace roviny $\mathbb{R}^2$. Asi nejnázornějším způsobem zadání orientace v rovině je zadání orientace (tj. smyslu probíhání) kružnice nebo jiné jednoduché uzavřené křivky. Tato metoda má však své nevýhody: její přesná formulace není snadná a navíc ji nelze použít při definici orientace prostoru $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 3$.

Tyto nevýhody nemá nejčastěji používaný způsob zadání orientace pomocí volby báze (vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$). Musíme ovšem určit, kdy dvě báze (v_1, v_2) a (w_1, w_2) prostoru $\mathbb{R}^2$ určují stejnou orientaci. Intuitivní odpověď je přirozená: je to tehdy, když smysl probíhání trojúhelníku o vrcholech $0, v_1, v_2$ (daný pořadím vrcholů) je stejný jako smysl probíhání trojúhelníku o vrcholech $0, w_1, w_2$. Tuto odpověď lze formalizovat, nelze ji ale použít pro vyšší dimenze.

Než vyslovíme obvyklou definici souhlasnosti dvou bazí (tj. toho, že určují stejnou orientaci prostoru), provedeme následující úvahu. Z elementární geometrie víme, že dva shodné geometrické útvary U_1, U_2 v rovině nebo v prostoru mohou být „přímo shodné" nebo „nepřímo shodné". Nepřímo shodné jsou například dvě boty ze stejného páru. Jsou shodné, ale „jinak orientované". Jsou-li U_1, U_2 přímo shodné, můžeme U_1 přemístit na U_2 spojitým pohybem (stačí provést několik otočení), pokud jsou však nepřímo shodné, možné to není (nevystačíme s otáčeními, ale potřebujeme alespoň jedno „zrcadlení").

Pro dvě ortonormální báze v $\mathbb{R}^2$ již idea „spojitého pohybu" dává odpověď, kterou lze použít i pro vyšší dimenze: dvě (uspořádané) ortonormální báze (v_1, v_2) a (w_1, w_2) jsou souhlasné, jestliže lze jednu spojitým pohybem převést na druhou. Pro obecné báze je nutno ideu spojitého pohybu nahradit ideou „spojité deformace" (homotopie). Definice homotopičnosti dvou bazí (viz Tvrzení 3.3) je velmi přirozená. Pokud s ní však chceme pracovat, neobejdeme se bez teorie determinantů, kterou také užívá následující (hůře motivovaná) standardní definice.

3.1 Definice. *Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor. Řekneme, že jeho báze $(v_1, \dots, v_n)$ a $(w_1, \dots, w_n)$ jsou souhlasné (souhlasně orientované, ekvivalentní), jestliže determinant matice přechodu od báze $(v_1, \dots, v_n)$ k bázi $(w_1, \dots, w_n)$ je kladný. Pro souhlasné báze budeme psát $(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n)$. Nejsou-li báze souhlasně orientované, říkáme, že jsou opačně orientované.*

Připomeňme, že matice přechodu $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$ od báze $(v_1, \dots, v_n)$ k bázi $(w_1, \dots, w_n)$ je určena vztahy $w_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} v_i,\ j = 1, \dots, n$ a je vždy regulární. Dále je známo, že inverzní matice P^{-1} je maticí přechodu od báze $(w_1, \dots, w_n)$ k bázi $(v_1, \dots, v_n)$. Protože $\det P = \det P^{-1},$ relace

$\sim$ je symetrická.

3.2 Poznámka. Někteří autoři (srov. [Be]) nazývají maticí přechodu inverzní matici P^{-1} (případně transponovanou matici P'). To však zřejmě nemá vliv na definici souhlasnosti bazí.

Velmi jednoduchá algebraická Definice 3.1 je ekvivalentní intuitivně pochopitelnější geometrické („homotopické“) definici:

3.3 Tvrzení. *Dvě báze $(v_1, \dots, v_n)$, $(w_1, \dots, w_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou souhlasné, právě když jsou homotopické, tj. existují spojitá zobrazení*

$$u_1\colon\ [0,1]\ \to \mathbb{R}^n, \dots, u_n\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

taková, že

(i) pro každé $t \in [0,1]$ je $(u_1(t), \dots, u_n(t))$ báze $\mathbb{R}^n$ a
(ii) $(u_1(0), \dots, u_n(0)) = (v_1, \dots, v_n)$, $\quad (u_1(1), \dots, u_n(1)) = (w_1, \dots, w_n)$.

Důkaz toho, že dvě homotopické báze jsou souhlasné, je snadný. Důkaz obrácené implikace je pracnější, ale také není obtížný.

Nechť dále V je konečně dimenzionální vektorový prostor a $B(V)$ množina všech (uspořádaných) bází prostoru V. Jsou-li $B_1, B_2, B_3 \in B(V)$ tři báze a P_{ij} je matice přechodu od báze B_i k bázi B_j, je známo, že $P_{13} = P_{12} \cdot P_{23}$ (viz [Bi; Věta 10.15]), takže $\det P_{13} = \det P_{12} \cdot \det P_{23}$. Relace $\sim$ je tedy také tranzitivní; protože je zřejmě reflexivní, je to relace ekvivalence na $B(V)$.

Přímým výpočtem determinantu matice přechodu se snadno ověří následující tvrzení:

3.4 Tvrzení. *Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je báze vektorového prostoru V a $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ je permutace. Pak platí:*

(i) Báze $(v_1, \dots, v_n)$ a $(v_{\pi(1)}, \dots v_{\pi(n)})$ jsou souhlasné právě když $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$.
(ii) Báze $(v_1, \dots, v_n)$ a $(-v_1, \dots, v_n)$ jsou opačně orientované.

Snadno vidíme, že (pokud V není triviální) vztah ekvivalence $\sim$ má právě dvě třídy ekvivalence. (Je-li $(v_1, \dots, v_n)$ báze V, pak není ekvivalentní s $(-v_1, \dots, v_n)$ a každá třetí báze je zřejmě ekvivalentní právě s jednou z nich.) Vybereme-li jednu z těchto tříd, říkáme, že jsme prostor V orientovali. Chceme-li o orientaci mluvit jako o matematickém objektu, ztotožňujeme ji s touto třídou $\mathcal{O} \in B(V)/\!\sim$ a orientovaným prostorem V rozumíme dvojici $(V, \mathcal{O})$. Orientaci $\mathcal{O}$ pak nazýváme kladnou orientací a tu druhou (opačnou) nazýváme zápornou orientací. Báze patřící do $\mathcal{O}$ nazýváme kladné (kladně orientované) a ty druhé záporné.

Orientaci na V zadáváme nejčastěji výběrem jedné báze, kterou prohlásíme za kladnou. V $\mathbb{R}^n$ vybíráme zpravidla orientaci, která je určena (obsahuje) kanonickou bázi; tuto orientaci nazýváme *přirozená (kanonická, standardní) orientace* prostoru $\mathbb{R}^n$.

Je ihned vidět, že báze $(v_1, \dots, v_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ s přirozenou orientací je kladná, právě když $\det[v_1, \dots, v_n] > 0$.

3.5 Poznámka. (orientace v reálném světě) Tato poznámka je ovšem nematematická: hovoří o našem „reálném světě“. Vybereme-li ve vesmíru jeden bod (například severní pól), který prohlásíme za počátek, a vzdálenost jistých dvou bodů prohlásíme za jednotkovou, můžeme (na nejjednodušší intuitivní úrovni) náš „fyzikální prostor, ve kterém žijeme“ interpretovat jako unitární prostor. Pro fyzikální teorie, ale také pro běžné lidské dorozumívání, je důležité tento unitární prostor orientovat. Za kladnou orientaci se bere většinou „pravá (pravotočivá)“ orientace, záporná orientace se pak nazývá „levá (levotočivá)“. Abychom někomu sdělili, kterou orientaci jsme prohlásili za kladnou, musíme se odvolat na nějakou „fyzikální skutečnost“, kterou zná. Člověku (který ví co je levá a pravá ruka) stačí říci, že kladnou (pravotočivou) bází je trojice (v_1, v_2, v_3), pokud v_1 má směr upažené ukazující pravé ruky, v_2 má směr ukazující levé předpažené ruky a v_3 má směr trupu od nohou k hlavě.

3.2 O pojmu k-rozměrné míry v $\mathbb{R}^n$

Pro řadu aplikací je „minimální σ-algebra $\mathcal{P}_k$, na které jsme zde k-rozměrnou míru μ_k v $\mathbb{R}^n$ definovali, příliš malá.

Například v teorii konvexních množin je nutno definovat $\mu_2(A)$, jestliže $A = \partial K$, kde $K \subset \mathbb{R}^3$ je omezená otevřená konvexní množina. Není těžké dokázat, že taková A obecně neleží v $\mathcal{P}_2$; její plošný obsah však lze definovat (pomocí Lebesgueovy míry λ_3) rovností

$$\mu_2(A) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \lambda_3(U_\varepsilon(A)), \tag{3.1}$$

kde $U_\varepsilon(A)$ je ε-ové okolí množiny A, tj. $U_\varepsilon(A) := \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$.

Intuitivně pochopitelný vzorec (3.1) (na základě něhož je definován tzv. Minkowského objem) však nelze použít pro výpočet plošného obsahu dostatečně obecných množin.

V teorii diferenciálních rovnic a ve variačním počtu se nejčastěji pracuje s pojmem Hausdorffovy k-rozměrné míry, jejíž teorie je však dosti obtížná a definice nepříliš názorná.

Pojem k-rozměrné míry značně osvětlila Kolmogorovova práce z r. 1932, ve které jsou formulovány (v trochu jiné formě) následující jednoduché axiomy pro k-rozměrnou míru.

3.6 Definice. *Řekneme, že míra μ definová na σ-algebře $\mathcal{A}$ podmnožin $\mathbb{R}^n$ splňuje Kolmogorovovy axiomy (pro k-rozměrnou míru), jestliže platí:*

(A_1) Je-li $M \in \mathcal{A}$, $f : M \to \mathbb{R}^n$ je c-lipschitzovské zobrazení a $f(M) \in \mathcal{A}$, pak

$$\mu((f(M)) \le c^k \mu(M).$$

(A_2) $\quad \mu\left([0,1]^k \times \{0\}^{n-k}\right) = 1.$

Tyto dva axiomy ovšem neříkají nic o tom, jak velká je σ-algebra $\mathcal{A}$; ani triviální případ $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ není vyloučen. Většina měr studovaných v geometrické teorii míry splňuje axiomy (A_1), (A_2) a navíc také třetí axiom, hovořící o tom, že $\mathcal{A}$ je velmi bohatá:

(A_3) Míra μ je zúplněním míry definované na σ-algebře všech borelovských podmnožin $\mathbb{R}^n$.

Míry, které splňují axiomy (A_1), (A_2) i (A_3) je přirozené nazývat k-rozměrnými mírami v Kolmogorovově smyslu; mezi ně patří i nejznámější k-rozměrná Hausdorffova míra. Všechny takové míry jsou rozšířením „minimální“ k-rozměrné míry μ_k. To okamžitě plyne z následující věty, která podává velmi jednoduchou „axiomatickou definici“ míry μ_k na $\mathcal{P}_k$.

3.7 Věta. *Na σ-algebře $\mathcal{P}$ existuje právě jedna míra, která splňuje Kolmogorovovy axiomy (A_1), (A_2). Touto mírou je μ_k.*

Důkaz této věty není snadný. Jeho základní myšlenka spočívá v pozorování, že Kolmogorovovy axiomy (A_1), (A_2) „vysvětlují“ nejméně jasný krok v heuristickém odvození základního vzorce (2.11) pro výpočet jednoduché plochy, totiž „důvod“, proč platí přibližná rovnost (2.10).

Tam jsme se omezili na nejasné konstatování, že je to proto, že množiny $\varphi(G_j)$ a $P_j = \alpha_j(G_j)$ si jsou „k nerozeznání podobné“, což bylo znázorněno na obr. 2.5, na kterém je vidět, že rovnoběžník $\alpha_j(G_j)$ „velmi dobře aproximuje“ „křivočarý rovnoběžník“ $\varphi(G_j)$.

Zde je ovšem podstatné, že plocha $\alpha_j(G_j)$ dobře aproximuje plochu P_j nejenom „ve smyslu polohy“, ale také „ve smyslu směru“.

To můžeme částečně vysvětlit na příkladu délky (tj. 1-rozměrné míry) grafů funkcí na $(0,1)$. Pro velká n graf funkce $f_n(x) = n^{-1} \cdot \sin nx$ jistě velmi dobře aproximuje graf funkce $f(x) = 0$ „ve smyslu polohy“, ale ne „ve smyslu směru“ (protože $f_n'(x) = \cos nx$ a $f'(x) = 0$). Není proto důvod si myslet, že by se při $n \to \infty$ délky grafů funkcí f_n blížily k délce grafu f a také tomu tak není.

Pokud položíme $g_n(x) = n^{-2} \cdot \sin nx$, pak $g_n'(x) = n^{-1} \cdot \cos nx$, takže pro velká n graf funkce g_n dobře aproximuje graf f nejen „ve smyslu polohy“, ale také „ve smyslu směru“, takže lze očekávat, že délky grafů g_n konvergují k délce grafu f (a také tomu tak je).

Zcela upřesnit předchozí ideu o aproximaci „ve smyslu směru“ však není snadné.

Je diskutabilní, nakolik je Kolmogorovův axiom (A1) „intuitivně zřejmý“. Pokud jej však přijmeme za správný, dává nám přesný prostředek, jak o dvou „k nerozeznání podobných množinách“ A, $B \in \mathcal{A}$ přesně dokázat, že $\mu_k(A) \approx \mu_k(B)$. Najdeme-li totiž pro velmi malá ε bijekci $f\colon A \to B$, která je $(1+\varepsilon)$-lipschitzovská a má také $(1+\varepsilon)$-lipschitzovskou inverzi $f^{-1}\colon B \to A$, podle axiomu (A1) platí

$$\mu_k(B) \le (1+\varepsilon)^k \mu_k(A), \qquad \mu_k(A) \le (1+\varepsilon)^k \mu_k(B).$$

Víme-li ještě, že $0 < \mu_k(A) < \infty$, můžeme psát $\mu_k(A) \approx \mu_k(B)$.

Pro případ $A := \alpha_j(G_j)$ a $B := \varphi(G_j)$ máme k dispozici přirozenou bijekci $f\colon A \to B$, $f(x) := \varphi(\alpha_j^{-1}(x))$. Dokážeme-li nyní, že má-li G_j velmi malý diametr, jsou f i f^{-1} $(1+\varepsilon)$-lipschitzovská s velmi malým $\varepsilon > 0$, dostáváme přibližnou rovnost $\mu_k(\alpha_j(G_j)) \approx \mu_k(\varphi(G_j))$. Na základě této myšlenky lze dokázat Větu 3.7.

Poznemenejme ještě, že pokud hladkou plochu $P \subset \mathbb{R}^3$ aproximujeme vepsanou po částech afinní („mnohostěnnou“) plochou M velmi dobře „ve smyslu polohy“(což zřejmě nastane, pokud „stěny“ této plochy jsou velmi malé), neplyne z toho automaticky, že by M také dobře aproximoval P „ve smyslu směru“, a proto může mít M podstatně větší plošný obsah než P. Na této skutečnosti je založen slavný *Schwartzův příklad* (srov. [Kop], [Fi]), který ukazuje, že plošný obsah hladké plochy nelze jednoduše definovat jako limitu plošných obsahů vepsaných po částech afinních ploch. (Pro křivky analogický příklad neexistuje.)

Nakonec ještě poznamenejme, že všechny k-rozměrné míry v $\mathbb{R}^n$ v Kolmogorovově smyslu mají stejnou hodnotu pro všechny borelovské množiny B, které jsou k-rektifikovatelné, tj. pro které existují lipschitzovská zobrazení $f_i\colon [0,1]^k \to \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, taková, že $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i([0,1]^k)$. Na některých „fraktálních“ množinách se však různé k-rozměrné míry mohou lišit.

3.3 Důkaz věty o existenci a jednoznačnosti μ_k

3.8 Tvrzení. *Nechť P, Q jsou jednoduché k-plochy v $\mathbb{R}^n$ $(1 \le k \le n)$, které se nedotýkají v bodě $a \in P \cap Q$ (tj. $T_a(P) \ne T_a(Q)$). Pak existuje otevřené okolí U bodu a takové, že $U \cap (P \cap Q)$ je podmnožinou nějaké $(k-1)$-plochy.*

Důkaz. (Stručný.) Je snadno vidět, že existuje otevřené okolí $\widetilde{V}$ bodu a takové, že $\widetilde{V} \cap P$ a $\widetilde{V} \cap Q$ jsou implicitně zadané kusy k-rozměrných C^1 ploch tvaru

$$\widetilde{V} \cap P = \{x \in \widetilde{V} : g_1(x) = 0, \dots, g_{n-k}(x) = 0\},$$
$$\widetilde{V} \cap Q = \{x \in \widetilde{V} : h_1(x) = 0, \dots, h_{n-k}(x) = 0\},$$

kde všechny g_i a h_i jsou třídy $C^1(\widetilde{V})$ a pro každé $x \in \widetilde{V}$ platí

$$\mathrm{h}([\operatorname{grad} g_1(x), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(x)]) = \mathrm{h}([\operatorname{grad} h_1(x), \dots, \operatorname{grad} h_{n-k}(x)]) = n-k.$$

Protože $T_a(P) \ne T_a(Q)$, platí

$$\operatorname{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(a)\} \ne \operatorname{Lin}\{\operatorname{grad} h_1(a), \dots, \operatorname{grad} h_{n-k}(a)\},$$

takže existuje $j \in \{1, \dots, n-k\}$ takové, že

$$\mathrm{h}([\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(a), \operatorname{grad} h_j(a)]) = n - k + 1.$$

Existuje tedy otevřené okolí $U \subset \widetilde{V}$ bodu a takové, že

$$\mathrm{h}([\operatorname{grad} g_1(x), \dots, \operatorname{grad} g_{n-k}(x), \operatorname{grad} h_j(x)]) = n - k + 1 \quad \text{pro} \quad x \in U,$$

takže pro $k > 1$ je

$$Z := \{x \in U : g_1(x) = 0, \dots, g_{n-k}(x) = 0,\ h_j(x) = 0\}$$

implicitně zadaný kus $(k-1)$-rozměrné plochy obsahující $P \cap Q \cap U$.

Je-li $k = 1$, z Věty (?) snadno vyplývá, že U lze zvolit tak, že $U \cap Z = \{a\}$.

3.9 Lemma. *Nechť P, Q jsou jednoduché k-plochy v $\mathbb{R}^n$ $(1 \le k \le n)$ a D je množina všech bodů $x \in P \cap Q$, ve kterých se P a Q dotýkají (tj. $T_x(P) = T_x(Q)$). Pak pro každý bod $d \in D$ existuje jeho otevřené okolí U takové, že pro každou borelovskou množinu $B \subset D \cap U$ platí $\mu_k^P(B) = \mu_k^Q(B)$.*

Důkaz. (Stručný.) Nechť φ a ψ jsou pořadě parametrizace P a Q a $d \in D$. Zvolme indexy $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ takové, že $\dfrac{D(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{D(t_1, \dots, t_k)}(d) \neq 0$. Pro jednoduchost značení (bez újmy na obecnosti) předpokládejme, že $i_1 = 1, \dots, i_k = k$. Projekce $\pi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ tedy zobrazuje $T_d(P)$ na $\mathbb{R}^k$; protože platí $T_d(P) = T_d(Q)$, snadno dostáváme, že také $\dfrac{D(\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})}{D(t_1, \dots, t_k)}(d) \neq 0$. Stejně jako v důkazu Tvrzení 1.15 dostáváme, že existují otevřená okolí U_1, U_2 bodu d taková, že $U_1 \cap P$, $U_2 \cap Q$ jsou explicitně zadané kusy k-rozměrných C^1-ploch (parametrizované souřadnicemi $x_1, \dots, x_k$). Odtud lze snadno usoudit, že existují otevřené okolí U bodu d, otevřené okolí W bodu $(d_1, \dots, d_k)$ a C^1 zobrazení $f : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, $g : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ taková, že pro $F(w) := (w, f(w))$ a $G(w) := (w, g(w))$ platí $F(W) = P \cap U$ a $G(W) = Q \cap U$. Nechť je dána borelovská množina $B \subset D \cap U$. Množina $C := \pi(B) = F^{-1}(B) = G^{-1}(B)$ je zřejmě také borelovská. Protože pro každé $c \in C$ platí

$$F'(c)(\mathbb{R}^k) = T_{F(c)}(P) = T_{G(c)}(Q) = G'(c)(\mathbb{R}^k)$$

a

$$F'(c)t = (t, f'(c)t), \quad G'(c)t = (t, g'(c)t),$$

snadno vidíme, že $f'(c) = g'(c)$, a tedy i $F'(c) = G'(c)$. Protože zřejmě platí $\mu_k^{P \cap U}(B) = \mu_k^P(B)$ a $\mu_k^{Q \cap U}(B) = \mu_k^Q(B)$, dostáváme

$$\mu_k^P(B) = \int_{F^{-1}(B)} \kappa(F'(t))\, \mathrm{d}\lambda_k(t) = \int_{G^{-1}(B)} \kappa(G'(t))\, \mathrm{d}\lambda_k(t) = \mu_k^Q(B).$$

3.10 Lemma. *Nechť P, Q jsou jednoduché k-plochy v $\mathbb{R}^n$ a $A \subset P \cap Q$ je borelovská množina. Pak*

$$\mu_k^P(A) = \mu_k^Q(A). \tag{3.2}$$

Důkaz. (Stručný.) Nechť D je množina těch bodů $x \in A$, ve kterých se P a Q dotýkají, tj. $T_x(P) = T_x(Q)$. Položme $N := A \setminus D$. Nechť φ a ψ jsou pořadě parametrizace P a Q. Je snadno vidět, že

$$N = \{x \in A :\ h\left[\frac{\partial\varphi(\varphi^{-1}(x))}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(\varphi^{-1}(x))}{\partial t_k}, \frac{\partial\psi(\psi^{-1}(x))}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\psi(\psi^{-1}(x))}{\partial t_k}\right] > k\}$$

je množina otevřená v A. Platí tedy $N = A \cap G$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, takže N i D jsou borelovské.

Uvažujme nyní borelovské míry ω a ω^* na metrickém prostoru N, které jsou definovány rovnostmi

$$\omega(B) := \mu_k^P(B),\ \omega^*(B) := \mu_k^Q(B), \qquad B \in \mathcal{B}(N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \exp(N).$$

a borelovské míry ν a ν^* na D definované rovnostmi

$$\nu(B) := \mu_k^P(B),\ \nu^*(B) := \mu_k^Q(B), \qquad B \in \mathcal{B}(D) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \exp(D).$$

Podle Tvrzení 3.8 a Tvrzení 2.19 dostáváme, že ω a ω^* jsou lokálně nulové; podle Tvrzení 3.19 jsou tedy nulové. Míry ν a ν^* se podle Lemmatu 3.9 lokálně rovnají, takže se podle Tvrzení 3.19 rovnají. Platí tedy

$$\mu_k^P(A) = \omega(N) + \nu(D) = \omega^*(N) + \nu^*(D) = \mu_k^Q(A).$$

Označme symbolem $\mathcal{P}_k^*$ systém všech borelovských množin $B \subset \mathbb{R}^n$, které lze pokrýt spočetně mnoha jednoduchými k-plochami. Je zřejmé, že $\mathcal{P}_k^*$ je σ-okruh, tj. obsahuje $\emptyset$ a je uzavřený na množinové rozdíly a spočetná sjednocení. Dále je vidět, že $\mathcal{P}_k^*$ je nejmenší σ-okruh, který obsahuje každou borelovskou podmnožinu každé jednoduché k-plochy, takže $\mathcal{P}_k^* \subset \mathcal{P}_k$. Ovšem $\mathcal{P}_k$ obsahuje také doplňky prvků z $\mathcal{P}_k^*$; množiny jiných typů již neobsahuje; to m.j. ukazuje následující lemma.

3.11 Lemma. *Označme $(\mathcal{P}_k^*)^c := \{\mathbb{R}^n \setminus M : M \in \mathcal{P}_k^*\}$. Pak platí následující tvrzení.*

(i) $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^* \cup (\mathcal{P}_k^*)^c$ *a* $\mathcal{P}_k^* \cap (\mathcal{P}_k^*)^c = \emptyset$.
(ii) Je-li $B \in \mathcal{P}_k^*$, pak existuje její rozklad $B = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$ na disjunktní borelovské množiny B_i takové, že každá B_i je podmnožinou nějaké jednoduché k-plochy P_i a $\mu_k^{P_i}(B_i) < \infty$.
(iii) Splňuje-li μ na $\mathcal{P}_k$ vzorec (2.13)*, pak pro každou $D \in (\mathcal{P}_k^*)^c$ platí $\mu(D) = \infty$.*

Důkaz. (Stručný.) (i) Pouze z toho, že $\mathcal{P}_k^*$ je σ-okruh, snadno plyne, že $\mathcal{P}_k^* \cup (\mathcal{P}_k^*)^c$ je σ-algebra. Platí tedy $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^* \cup (\mathcal{P}_k^*)^c$. Z Tvrzení 1.21 vyplývá, že $\lambda_n(B) = 0$ pro každou množinu $B \in \mathcal{P}_k^*$, takže $\lambda_n(D) = \infty$ pro každou $D \in (\mathcal{P}_k^*)^c$. Platí tedy $\mathcal{P}_k^* \cap (\mathcal{P}_k^*)^c = \emptyset$.

(ii) Z definice $\mathcal{P}_k^*$ a σ-konečnosti měr $\mu_k^{P_i}$ (viz 2.15) vyplývá, že existují borelovské množiny A_i takové, že každá A_i je podmnožinou nějaké jednoduché k-plochy P_i a $\mu_k^{P_i}(A_i) < \infty$. Nyní stačí položit $B_1 := A_1$ a $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$ pro $i > 1$.

(iii) Podle (ii) platí $\lambda_n(\mathbb{R}^n \setminus D) = 0$. Z Fubiniovy věty (v prostoru $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ s λ_n) ihned vyplývá, že pro λ_{n-k} skoro všechny body $u \in \mathbb{R}^{n-k}$ platí $\lambda_k\left((\mathbb{R}^n \setminus D)^{u,*}\right) = 0$. Zvolme jeden takový bod u a položme $P := \{u\} \times \mathbb{R}^k$ a $B := \{u\} \times D^{u,*}$. Zřejmě $B \subset D$ je borelovská množina a $\mu_k^P(B) = \infty$. Tudíž $\mu(D) \geq \mu(B) = \mu_k^P(B) = \infty$.

Nyní již můžeme dokázat Větu 2.17 o existenci a jednoznačnosti míry μ_k na $\mathcal{P}_k^n$.

Důkaz Věty 2.17 (Stručný.) Z Lemmatu 3.11 okamžitě vidíme, že pokud hledaná míra μ_k na $\mathcal{P}_k$ existuje, je určena jednoznačně; je totiž definována nutně takto:

(i) Pro $B \in (\mathcal{P}_k^*)^c$ platí $\mu_k(B) = \infty$.
(ii) Pro $B \in \mathcal{P}_k^*$ platí

$$\mu_k(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_k^{P_i}(B_i), \tag{3.3}$$

kde každá B_i je borelovská podmnožina nějaké jednoduché k-plochy P_i, $\mu_k^{P_i}(B_i) < \infty$ a $B_1, B_2, \ldots$ tvoří disjunktní rozklad množiny B.

Budeme tedy pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{P}_k$ definovat číslo $\mu_k(B)$ podle (i) a (ii). Aby však tato definice byla korektní, musíme dokázat, že součet v (3.3) nezávisí ani na rozkladu B (tj. na volbě množin B_i), ani na volbě P_i. Nechť je tedy dán jiný takový rozklad množiny B tvořený množinami $B_i^* \subset P_i^*$. Podle Lemmatu 3.10 platí pro $i, j \in \mathbb{N}$ rovnost $\mu_k^{P_i}(B_i \cap B_j^*) = \mu_k^{P_j^*}(B_i \cap B_j^*)$, takže

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_k^{P_i}(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_k^{P_i}(B_i \cap B_j^*) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_k^{P_j^*}(B_i \cap B_j^*) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_k^{P_j^*}(B_j^*).$$

Máme tedy na $\mathcal{P}_k$ korektně definovanou množinovou funkci μ_k. Důkaz toho, že μ_k je skutečně míra, je nyní (s použitím základních poznatků o zobecněných řadách čísel) zcela snadné.

3.4 Důkaz Gaussovy věty

Nejprve si uvědomíme to, že při důkazu Tvrzení 2.67 jsme dokázali následující tvrzení.

3.12 Lemma. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená množina, funkce $d(x) < h(x)$ jsou třídy C^1 na Ω a (zřejmě otevřená) množina*

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : d(x) < y < h(x)\}$$

je omezená. Označíme-li

$$D := \{(x, y) \colon\ y = d(x)\}, \qquad H := \{(x, y) \colon\ y = h(x)\},$$

pak $D \subset \partial_* G$, $H \subset \partial_* G$ a pro každou funkci f, která je třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{G}$, platí

$$\int_{D \cup H} f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}S = \int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

kde ν je pole vnějších jednotkových normálových vektorů na $\partial_* G$.

Stačí si uvědomit, že předpoklady $\partial G \in \mathcal{P}_{n-1}$ a $\mu_k(\partial G \setminus \partial_* G) = 0$ jsme v důkazu Tvrzení 2.67 potřebovali jen k tomu, abychom mohli napsat $\int_B f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}S = 0$. Předpoklad $\mu_k(\partial G) < \infty$ jsme nepotřebovali vůbec, pro platnost *obecné* Gaussovy věty je však nezbytný.

Důkaz (skalární formy) obecné Gaussovy věty povedeme tak, že množinu G „rozložíme“ na spočetně mnoho otevřených množin, na které lze použít předchozí lemma; sečtením rovností (3.4) pak dostaneme dokazovanou rovnost.

Přesný důkaz vyžaduje řadu úvah, proto některé zformulujeme ve formě lemmat. Nejdříve však uděláme několik úmluv:

Budeme jako obvykle psát $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$; pro $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $y \in \mathbb{R}$ je tedy $(x, y) \in \mathbb{R}^n$. Na všech eukleidovských prostorech budeme uvažovat maximovou normu. Řekneme-li, že $M \subset \mathbb{R}^n$ je graf C^1 funkce f, myslíme tím, že existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ a funkce $f \in C^1(G)$, pro které $M = \{(x, y) \colon y = f(x)\}$.

Symbolem π budeme značit projekci $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\pi(x, y) = x$.

3.13 Lemma. *Nechť P je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$ a pro bod $c = (a, b) \in P$ platí, že $e_n \notin T_c(P)$. Pak existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$, pro která $P \cap (U_\delta(a) \times U_\Delta(b))$ je graf nějaké funkce $f \in C^1(U_\delta(a))$.*

Důkaz. (Stručný.) Bez újmy na obecnosti lze zřejmě předpokládat, že $P = \{z\colon g(z) = 0\}$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $g \in C^1(G)$ a $\operatorname{grad} g(z) \neq 0$, $z \in G$. Protože $e_n \notin T_c(P)$, platí $\frac{\partial g(c)}{\partial x_n} \neq 0$, takže závěr lemmatu plyne z věty o implicitních funkcích.

3.14 Lemma. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha a $M \subset P$ je borelovská množina taková, že*

(i) $e_n \notin T_z(P)$ *pro každý bod $z \in M$ a*
(ii) $\lambda_{n-1}(\pi(M)) = 0$.

Pak $\mu_{n-1}(M) = 0$.

Důkaz. (Stručný.) Podle Lemmatu 3.13 ke každému $x \in M$ existuje jeho otevřené okolí U_x, pro které je $U_x \cap P$ grafem C^1 funkce. S pomocí Poznámky (?) snadno vidíme, že lemma stačí dokázat v případě, když P je graf nějaké funkce $f \in C^1(G)$ (kde $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$) je otevřená. Položíme-li $\varphi(x) := (x, f(x))$, $x \in G$, je φ zřejmě parametrizace P a $\varphi(\pi(M)) = M$. Platí tedy

$$\mu_{n-1}(M) = \mu_{n-1}(\varphi(\pi(M)) = \int_{\pi(M)} \kappa(\varphi'(x))\,\mathrm{d}x = 0.$$

3.15 Lemma. *Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha a $S := \{z \in P\colon e_n \in T_z(P)\}$. Pak $\lambda_{n-1}(\pi(S)) = 0$.*

Důkaz. Použijeme-li Poznámku (?) analogicky jako v předchozím důkazu, ihned vidíme, že lemma stačí dokázat v případě, že P je jednoduchá $(n-1)$-plocha. Zvolme parametrizaci $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon G \to \mathbb{R}^n$ plochy P a položme $T: := \varphi^{-1}(S)$. Označíme-li $\psi := \pi \circ \varphi$, pak zřejmě $\psi \in C^1(G)$, $\psi(T) = \pi(S)$ a pro každé $t \in T$ platí $J_\psi(t) = 0$. Poslední tvrzení plyne například z toho, že $\psi'(t) = \pi \circ \varphi'(t)$, takže $\psi'(t)(v) = 0$ pro ten (nutně nenulový) vektor $v \in \mathbb{R}^{n-1}$, pro který $\varphi'(t)(v) = e_n$. Podle Tvrzení 3.26 (verze Sardovy věty) platí $\lambda_{n-1}(\pi(S)) = \lambda_{n-1}(\psi(T)) = 0$.

3.16 Lemma. *Nechť $N \subset \mathbb{R}^n$, $N \in \mathcal{P}_{n-1}$ a $\mu_{n-1}(N) = 0$. Pak $\lambda_{n-1}(\pi(N)) = 0$.*

Důkaz. (Stručný.) Podle Lemmatu 3.11 $N \in \mathcal{P}^*_{n-1}$, takže ji lze pokrýt jednoduchými $(n-1)$-plochami $P_1, P_2, \dots$. Stačí tedy dokázat $\lambda_{n-1}(\pi(N \cap P_i)) = 0$, $i \in \mathbb{N}$. Zovolme tedy $i \in \mathbb{N}$ a parametrizaci $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ plochy P_i. Protože $\mu_{n-1}(N \cap P_i) = \int_{\varphi^{-1}(N \cap P_i)} \kappa(\varphi'(t))\,\mathrm{d}t = 0$, nutně $\lambda_{n-1}(T) = 0$, kde $T := \varphi^{-1}(N \cap P_i)$. Zobrazení $\psi := \pi \circ \varphi$ je zřejmě třídy C^1 na G a $\psi(T) = \pi(N \cap P_i)$. Podle Tvrzení 3.27 platí $\lambda_{n-1}(\pi(N \cap P_i)) = \lambda_{n-1}(\psi(T)) = 0$.

3.17 Lemma. *Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená omezená množina, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ a nechť $F^{a,*} = \{y \in \mathbb{R}\colon (x, y) \in F\}$ je neprázdná konečná množina, která je tvořena body $b_1 < b_2 < \dots < b_r$. Pak pro každou r-tici čísel $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_r > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in U_\delta(a)$ platí*

$$F^{x,*} \subset (b_1 - \Delta_1, b_1 + \Delta_1) \cup \dots \cup (b_r - \Delta_r, b_r + \Delta_r).$$

Důkaz. Předpokládejme, že že pro nějaká čísla $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_r > 0$ příslušné $\delta > 0$ neexistuje. Pak lze najít posloupnost bodů $x_n \to a$ a posloupnost čísel $y_n \notin (b_1 - \Delta_1, b_1 + \Delta_1) \cup \dots \cup (b_r - \Delta_r, b_r + \Delta_r)$ tak, že $(x_n, y_n) \in F$. Protože F je kompaktní, existuje vybraná posloupnost $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (a, y) \in F$. Zřejmě platí $y \notin (b_1 - \Delta_1, b_1 + \Delta_1) \cup \dots \cup (b_r - \Delta_r, b_r + \Delta_r)$, což je ale spor s tím, že $y \in F^{a,*} = \{b_1, \dots, b_r\}$.

Víme, že stačí dokázat „skalární formu“ Gaussovy věty (Větu 2.58), jejíž znění zopakujeme:

3.18 Věta. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená množina, pro kterou*

$$\partial G \in \mathcal{P}_{n-1}, \quad \mu_k(\partial_* G) < \infty, \quad \mu_k(\partial G \setminus \partial_* G) = 0$$

a $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ je pole jednotkových vnějších normálových vektorů na $\partial_* G$. Nechť f je funkce třídy C^1 na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{G}$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\int_{\partial G} f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}S = \int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Důkaz. Pro jednoduchost zápisu předpokládejme, že $i = n$; důkaz obecného případu je zcela analogický. Zopakujme, že klademe $\pi(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_{n-1})$. Položme

$$S := \{x \in \partial_* G : \nu_n(x) = 0\} \quad \text{a} \quad N := \partial G \setminus \partial_* G.$$

Množina S je zřejmě uzavřená v borelovské (viz Tvrzení 1.21) množině $\partial_* G$, takže je také borelovská; množina N je zřejmě kompaktní. Z Lemmatu 3.15 snadno vyplývá, že $\lambda_{n-1}(\pi(S)) = 0$ a z Lemmatu 3.16 ihned plyne, že $\lambda_{n-1}(\pi(N)) = 0$. Z definice otevřené množiny snadno vyplývá, že $\pi(G)$ je otevřená množina. Snadno je vidět, že množina $N \cup S$ je uzavřená v množině ∂G, takže je kompaktní. Je tedy kompaktní i množina $\pi(N \cup S) = \pi(N) \cup \pi(S)$, takže množina $C := \pi(G) \setminus (\pi(N) \cup \pi(S))$ je otevřená. Nechť $\{C_\alpha : \alpha \in A\}$ je (prostý) systém všech komponent množiny C; A je zřejmě spočetná. Označme $V := C \times \mathbb{R}$ a $V_\alpha := C_\alpha \times \mathbb{R}$.

Protože $\lambda_{n-1}(\pi(N) \cup \pi(S)) = 0$, platí podle Fubiniovy věty $\lambda_n(G \setminus V) = 0$, takže

$$\int_G \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \int_V \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = \sum_{\alpha \in A} \int_{G \cap V_\alpha} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

(Integrál vlevo zřejmě konverguje, protože jde o integrál ze spojité omezené funkce přes omezenou otevřenou množinu.)

Nyní ukážeme, že

$$\int_{\partial G} f \cdot \nu_n \,\mathrm{d}S = \int_{\partial G \cap V} f \cdot \nu_n \,\mathrm{d}S = \sum_{\alpha \in A} \int_{\partial G \cap V_\alpha} f \cdot \nu_n \,\mathrm{d}S. \tag{3.7}$$

K tomu si předně uvědomíme, že integrál zcela vlevo konverguje, protože funkce $f \cdot \nu_n$ je omezená a spojitá (a tedy borelovsky měřitelná) na množině $\partial_* G \in \mathcal{P}_{n-1}$, $\mu_{n-1}(\partial_* G) < \infty$ a $\mu_{n-1}(\partial G \setminus \partial_* G) = 0$. Dále snadno vidíme, že

$$\partial G \setminus V = N \cup S \cup M, \quad \text{kde} \quad M := \{z \in \partial_* G \setminus S \colon \pi(z) \in \pi(N) \cup \pi(S)\}.$$

Protože podle předpokladu $\mu_{n-1}(N) = 0$, podle Lemmatu 3.14 platí $\mu_{n-1}(M) = 0$ a $\nu_n(z) = 0$ pro $z \in S$, dostáváme

$$\int_{\partial G \setminus V} f \cdot \nu_n \,\mathrm{d}S = \int_N f \cdot \nu_n \,\mathrm{d}S + \int_S f \cdot \nu_n \,\mathrm{d}S + \int_M f \cdot \nu_n \,\mathrm{d}S = 0,$$

takže platí první rovnost v (3.7). Druhá rovnost je zřejmá.

Stačí tedy pro každé $\alpha \in A$ dokázat, že

$$\int_{\partial G \cap V_\alpha} f \cdot \nu_i \,\mathrm{d}S = \int_{G \cap V_\alpha} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

Zvolme tedy $\alpha \in A$ a pro každý bod $x \in C_\alpha$ zkoumejme řez $(\partial G)^{x,*}$. Je-li $y \in (\partial G)^{x,*}$, zřejmě platí $(x,y) \in \partial G_* \setminus S$, takže $\nu_n(x,y) = \langle e_n, \nu(x,y)\rangle \neq 0$. Podle Tvrzení 2.50 (iii) tedy jeden z vektorů e_n, $-e_n$ míří v bodě (x,y) ven z G a druhý do G. Z toho snadno vyplývá, že každý bod množiny $(\partial G)^{x,*}$ je izolovaný. Protože $(\partial G)^{x,*}$ je zřejmě kompaktní, je nutně konečná. Označme její prvky

$$p_1(x) < p_2(x) < .... < p_{r(x)}(x),$$

položme (závislost množin T_i na x pro přehlednost zápisu nevyznačujeme)

$$T_0 := \{x\} \times (-\infty, p_1(x)),\ T_{r(x)} := \{x\} \times (p_{r(x)}(x), \infty) \ \text{ a}$$
$$T_i := \{x\} \times (p_i(x), p_{i+1}(x)) \ \text{ pro } \ i = 1, \dots, r(x) - 1.$$

Protože $T_i \cap \partial G = \emptyset$, zřejmě buď $T_i \subset G$ nebo $T_i \cap \overline{G} = \emptyset$. Protože G je omezená, je nutně $T_0 \cap \overline{G} = \emptyset$, takže v bodě $(x, p_1(x))$ vektor $-e_n$ míří ven z G a e_n do G. Postupně dostáváme

$$T_1 \subset G,\ T_2 \cap \overline{G} = \emptyset,\ T_3 \subset G,\ T_4 \cap \overline{G} = \emptyset, \dots .$$

Protože zřejmě $T_{r(x)} \cap \overline{G} = \emptyset$, je nutně $r(x)$ sudé číslo. Označíme-li $s(x) = r(x)/2$ a

$$p_1(x) =: d_1(x),\ p_2(x) =: h_1(x),\ p_3(x) =: d_2(x),\ p_4(x) =: h_2(x), \dots$$
$$\dots, p_{r(x)-1}(x) =: d_{s(x)}(x),\ p_{r(x)}(x) =: h_{s(x)}(x),$$

platí zřejmě $G^{x,*} = \bigcup_{i=1}^{s(x)} (d_i(x), h_i(x))$.

Nyní ukažme, že pro každé $a \in C_\alpha$ existuje $\omega > 0$ takové, že $U_\omega(a) \subset C_\alpha$, pro každé $x \in U_\omega(a)$ platí $r(x) = r(a)$ a funkce $p_1, \dots, p_{r(a)}$ jsou třídy C^1 na $U_\omega(a)$.

K tomu nejdříve pomocí Lemmatu 3.13 zvolme čísla $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_{r(a)} > 0$ a číslo $\eta > 0$ takové, že $U_\eta(a) \subset C_\alpha$, intervaly $(p_i(a) - \Delta_i, p_i(a) + \Delta_i)$, $i = 1, \dots, r(a)$ jsou po dvou disjunktní a každá z množin

$$\partial G \cap (U_\eta(a) \times (p_i(a) - \Delta_i, p_i(a) + \Delta_i)), \qquad i = 1, \dots, r(a),$$

je grafem funkce z $C^1(U_\eta(a))$. Užijeme-li Lemma 3.17 pro $F := \partial G$, $r := r(a)$, $b^i := p_i(a)$, dostaneme jisté $\delta > 0$. Je snadno vidět, že pak stačí položit $\omega := \min(\delta, \eta)$.

Ukázali jsme tedy, že funkce $r(x)$ je lokálně konstantní na souvislé množině C_α, je tedy na C_α konstantní s hodnotou $r_\alpha =: 2s_\alpha$.

Pro $i = 1, \dots, s_\alpha$ položme $G_i := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \colon d_i(x) < y < h_i(x)\}$,

$$D_i := \{(x,y)\colon y = d_i(x)\}, \quad H_i := \{(x,y)\colon y = h_i(x)\}.$$

Z předchozích úvah je zřejmé, že

$$G \cap V_\alpha = \bigcup_{i=1}^{s_\alpha} G_i, \qquad \partial G \cap V_\alpha = \partial G_* \cap V_\alpha = \bigcup_{i=1}^{s_\alpha} (D_i \cup H_i)$$

a pro $z \in D_i \cup H_i = \partial_* G_i \cap V_\alpha$ je $\nu(z)$ jednotková vnější normála ke G_i v bodě z. Použijeme-li tedy Lemma 3.12 na množiny $G_1, \dots, G_{s_\alpha}$ a příslušné rovnosti (3.4) sečteme, dostáváme (3.8), čímž je důkaz ukončen.

3.5 Některé věty z teorie míry a integrálu

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, tj. $\mathcal{A} \subset \exp X$ je σ-algebra podmnožin množiny X a μ je (nezáporná) míra na $\mathcal{A}$. Pak je pro některé funkce $f: X \to \mathbb{R}^*$ definován abstraktní Lebesgueův integrál $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}^*$ (viz [LM] nebo [Ru2]); v tom případě říkáme, že tento integrál existuje. Je-li tento integrál konečný, říkáme, že konverguje.

Integrál $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ se však definuje i pro některé funkce f, které nejsou definovány na celém X; stačí, aby existovala množina $A \subset D_f$, která je měřitelná (tj. patří do $\mathcal{A}$), a pro kterou $\mu(X \setminus A) = 0$ (v případě, že μ je úplná míra, jde o funkce, pro které $\mu(X \setminus D_f) = 0$). Položíme-li pak $\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_A f \,\mathrm{d}\mu$, lze snadno dokázat, že definice je korektní: nezáleží na výběru množiny A. (Lze ukázat, že při této definici $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\widehat{\mu}$, má-li jeden z integrálů smysl, přičemž $\widehat{\mu}$ je zúplnění míry μ.)

Je-li X metrický prostor, pak σ-algebru borelovských podmnožin X budeme značit $\mathcal{B}(X)$. Míry na $\mathcal{B}(X)$ budeme nazývat *borelovskými mírami* na X. (Terminologie kolísá, někteří autoři nazývají borelovskými mírami míry definované aspoň na $\mathcal{B}(X)$.)

Symboly λ_n a λ_n^b rozumíme Lebesgueovu míru a borelovskou Lebesgueovu míru na $\mathbb{R}^n$. Pro integrál funkce f vzhledem k λ_n používáme většinou klasické značení $\int_M f(x) \,\mathrm{d}x$ (nebo také $\int_M f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ pro $n = 2$).

3.19 Tvrzení. *Nechť μ, ν jsou borelovské míry na separabilním metrickém prostoru X. Nechť μ a ν se lokálně rovnají (tj. pro každý bod $x \in X$ existuje jeho otevřené okolí U_x takové, že $\mu(B) = \nu(B)$ pro každou borelovskou množinu $B \subset U_x$). Pak $\mu = \nu$.*

Speciálně, je-li μ lokálně nulová, pak je nulová.

Důkaz. Podle Lindelofovy věty existuje posloupnost (x_n) taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n}$. Pro každou $B \in \mathcal{B}(X)$ nyní z rozkladu

$$B = (B \cap U_{x_1}) \cup ((B \cap U_{x_2}) \setminus U_{x_1}) \cup ((B \cap U_{x_3}) \setminus (U_{x_1} \cup U_{x_2})) \cup \dots$$

ihned vyplývá $\mu(B) = \nu(B)$.

3.20 Věta. (o obrazu míry) *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $(Y, \mathcal{T})$ je měřitelný prostor (tj. $\mathcal{T}$ je σ-algebra) a $f: X \to Y$ je měřitelné zobrazení (tj. $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, kdykoliv $E \in \mathcal{T}$). Položíme-li*

$$\nu(E) := \mu(f^{-1}(E)), \qquad E \in \mathcal{T},$$

pak ν je míra na $\mathcal{T}$; tuto míru označujeme $f(\mu)$ a říkáme ji obraz míry μ při zobrazení f.

Je-li $g: Y \to \mathbb{R}^*$ $\mathcal{T}$-měřitelná funkce, pak

$$\int_Y g \,\mathrm{d}f(\mu) = \int_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu,$$

jakmile má jedna strana rovnosti smysl.

3.21 Věta. (o neurčitém integrálu) *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $f \geq 0$ je nezáporná $\mathcal{A}$-měřitelná funkce. Položíme-li*

$$\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu, \qquad A \in \mathcal{A},$$

pak ν je míra na $\mathcal{A}$; tuto míru označujeme $f \cdot \mu$ a říkáme ji neurčitý integrál f podle μ.

Je-li $g\colon X \to \mathbb{R}^*$ $\mathcal{A}$-měřitelná funkce, pak

$$\int_X g \, \mathrm{d}(f \cdot \mu) = \int_X g \cdot f \, \mathrm{d}\mu,$$

jakmile má jedna strana rovnosti smysl.

3.22 Poznámka.

(i) Míře $f \cdot \mu$ je také přirozené říkat „míra s hustotou f“ (srov. [LM; 8.19]; je to jediná míra na $\mathcal{A}$, jejíž Radon-Nikodýmova hustota vzhledem k μ je f (tj. $\frac{\mathrm{d}(f \cdot \mu)}{\mathrm{d}\mu} = f$). O míře $f \cdot \mu$ se také hovoří jako o součinu funkce f a míry μ. Někdy (srov. [Ru2; str. 36] se používá zápis $\mathrm{d}(f \cdot \mu) = f \, \mathrm{d}\mu$.

(ii) Důkazy předchozích vět jsou snadné a vedou se stejným standardním postupem; tvrzení se postupně dokáže pro g, která je: a) charakteristická funkce, b) jednoduchá nezáporná funkce, c) nezáporná funkce, d) obecná měřitelná funkce. (Srov. Věta 1.29 z [Ru2] a [LM], 8.23).)

V Kapitole 5 se podstatně využívá následující klasická věta o substituci pro Lebesgueův integrál. Její důkaz je dosti obtížný; lze jej nalézt např. v [J II] nebo [Ru2]. Podstatně obecnější větu lze nalézt v [LM] (Věta 34.18) nebo ve [Fe].

3.23 Věta. (věta o substituci) *Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^k$ je prosté regulární zobrazení. Nechť f je funkce z $\varphi(G)$ do $\mathbb{R}^*$. Pak*

$$\int_{\varphi(G)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_G f(\varphi(t)) \cdot |J_\varphi(t)| \, \mathrm{d}t,$$

jakmile jeden z integrálů existuje.

3.24 Poznámka. Zobrazení φ je difeomorfizmus (viz Věta (?)), takže množina $\varphi(G)$ je otevřená. Aby integrály mohly existovat, je ovšem nutné, aby f byla definována ve skoro všech bodech množiny $\varphi(G)$.

Z Věty 3.23, Tvrzení 3.29 a Tvrzení 2.6 snadno vyplývá následující tvrzení.

3.25 Tvrzení. *Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ je izometrie a $B \in \mathbb{R}^k$ je borelovská množina. Pak $\lambda_k(\varphi(B)) = \lambda_k(B)$.*

Následující tvrzení je nejjednodušší speciální případ tzv. Sardovy věty.

3.26 Tvrzení. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení třídy C^1. Nechť $S := \{x \in G\colon J_\varphi(x) = 0\}$. Pak $\lambda_k(\varphi(S)) = 0$.*

Toto tvrzení okamžitě vyplývá z [LM; Věta 10.4] (případ $k = n$ a $\sigma = \lambda_k$). Pro přímý důkaz (který je podstatně jednodušší než důkaz věty o substituci) viz [ČM; Věta 10.4] nebo [FM; Věta 5.35].

Dalším tvrzením, které potřebujeme pro důkaz Gaussovy věty je toto:

3.27 Tvrzení. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení třídy C^1, $M \subset G$ a $\lambda_k(M) = 0$. Pak $\lambda_k(\varphi(M)) = 0$.*

Důkaz. (Náznak.) Nechť S je jako v Tvrzení 3.26. Snadno vidíme, že S je uzavřená množina, φ je na otevřené množině $H := G \setminus S$ regulární. Pro každý bod $x \in H$ existuje podle Věty (?) jeho otevřené okolí U_x, na kterém je φ regulární a prosté. Podle Věty 3.23 (kde za f vezmeme charakteristickou funkci množiny $\varphi(U_x \cap M)$) dostáváme $\lambda_k(\varphi(U_x \cap M)) = 0$. Pomocí Poznámky (?) snadno dostáváme $\lambda_k(\varphi(M \setminus S)) = 0$. Podle Tvrzení 3.26 však také $\lambda_k(\varphi(S)) = 0$, takže jsme hotovi. Poznamenejme, že důkaz lze vést snadno přímo bez dosti hluboké věty o substituci; stačí využít toho, že φ je lokálně lipschitzovské.

V této publikaci při různých heuristických úvahách tvrdíme, že jisté „integrální součty“ konvergují k některému integrálu. Protože používáme Lebesgueův integrál, který není definován jako limita integrálních součtů, pro lepší pochopení těchto úvah uvádíme následující snadné tvrzení.

3.28 Tvrzení. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, μ je konečná borelovská míra v $\mathbb{R}^n$ soustředěná v G (tj. $\mu(\mathbb{R}^n \setminus G) = 0$) a nechť f je stejnoměrně spojitá funkce na G. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že kdykoliv zvolíme rozklad G na borelovské množiny $B_1, \dots, B_s$ a body $\xi_i \in B_i$, $i = 1, \dots, s$ tak, že $\operatorname{diam} B_i < \delta$, $i = 1, \dots, s$, pak*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\mu - \sum_{i=1}^{s} f(\xi_i)\, \mu(B_i) \right| < \varepsilon \tag{3.9}$$

Důkaz. (Náznak.) Nechť $\varepsilon > 0$; k číslu $\varepsilon^* := \varepsilon(\mu(G) + 1)^{-1}$ zvolme $\delta > 0$ z definice stejnoměrné spojitosti. Nechť nyní $B_1, \dots, B_s$ je libovolný příslušný rozklad G. Protože zřejmě

$$\sum_{i=1}^{s} \mu(B_i) \inf_{x \in B_i} f(x) \le \int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\mu \le \sum_{i=1}^{s} \mu(B_i) \sup_{x \in B_i} f(x),$$

závěr tvrzení plyne z toho, že podle definice δ se „horní součet“ liší od „dolního součtu“ nejvýše o ε a číslo $\sum_{i=1}^{s} f(\xi_i)\, \mu(B_i)$ leží mezi nimi.

Každá míra μ na σ-algebře borelovských podmnožin $\mathbb{R}^3$ modeluje rozložení hmoty (nebo kladného elektrického náboje) v prostoru. Ke klasických fyzikálním aplikacím matematiky (které lze pochopit na základě středosškolské fyziky) patří výpočet těžiště a gravitačního (resp. elektrostatického) pole. Níže uvedeme (a částečně motivujeme) příslušné definice, které jsou užity v Příkladech 2.26 a 2.94.

Gravitační (elektrostatické) pole Je-li rozložení hmoty v prostoru dáno konečnou borelovskou mírou μ v $\mathbb{R}^3$, pak příslušné gravitační pole je vektorové pole $F(x)$, kde $F(x)$ je síla, kterou uvažovaná hmota působí na hmotný bod jednotkové hmotnosti umístěný v bodě x. Zkoumejme $F(a)$, kde $a = (a_1, a_2, a_3)$ a pro jednoduchost předpokládejme, že existují čísla $\delta > 0, K > 0$ takové, že μ je soustředěná v množině $M := B(a, K) \setminus B(a, \delta)$ (tj. $\mu(\mathbb{R}^3 \setminus M) = 0$) a gravitační konstanta je 1. Rozdělíme-li nyní M na konečně mnoho borelovských množin $M^1, \dots, M^s$ s velmi malým diametrem a zvolíme body $\xi^i \in M^i$, pak (známe-li Newtonův gravitační zákon) jistě očekáváme, že pro gravitační sílu $\Delta F^i(a)$, kterou působí hmota obsažená v množině M^i na jednotkový hmotný bod umístěný v a, platí

$$\Delta F^i(a) \approx \frac{\mu(M^i)}{\|\xi^i - a\|^2} \cdot \frac{\xi^i - a}{\|\xi^i - a\|} = \frac{\xi^i - a}{\|\xi^i - a\|^3} \mu(M^i).$$

Je tedy přirozené očekávat (srov. Tvrzení 3.28), že pro vektor $F(a)$ a jeho složky $F_i, i = 1, 2, 3$ platí rovnosti

$$F(a) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x-a}{\|x-a\|^3}\, \mathrm{d}\mu(x), \qquad F_i(a) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x_i-a}{\|x-a\|^3}\, \mathrm{d}\mu(x). \tag{3.10}$$

Stejným vzorcem definujeme $F(a)$, kdykoliv má integrál napravo smysl.

Těžiště. Ve fyzice má v různých (statických i kinematických) úvahách základní význam pojem těžiště tělesa (soustavy těles). Je-li příslušné rozložení hmoty dáno konečnou mírou μ, je její těžiště $T(\mu)$ definováno rovností

$$T(\mu) := \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} x \,\mathrm{d}\mu(x),$$

konverguje-li integrál vpravo. Vektorová funkce $f(x) = x = (x_1, x_2, x_3)$ se ovšem „integruje po složkách“, takže pro souřadnice T_1, T_2, T_3 těžiště platí

$$T_i = \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} x_i \,\mathrm{d}\mu(x), \qquad 1 \le i \le 3. \tag{3.11}$$

Zcela analogicky se těžiště míry definuje (a platí zřejmé zobecnění (3.11)) v obecném $\mathbb{R}^n$.

3.6 O pojmech z lineární algebry

V této publikaci používáme řadu pojmů a výsledků z lineární algebry. Zde nejdříve připomeneme potřebnou obvyklou terminologii a pak zavedeme několik (nepříliš běžných) označení pro potřeby této publikace. Nakonec zopakujeme potřebná fakta týkající se afinních prostorů a afinních zobrazení.

Označení obvyklá v analýze

Pod pojmem *lineární prostor* se v analýze rozumí vektorový prostor (nad tělesem $\mathbb{T}$, kde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{T} = \mathbb{C}$).

Lineární zobrazení je obvyklé označení pro homomorfizmus vektorového (lineárního) prostoru do vektorového (lineárního) prostoru. Místo monomorfismu, epimorfismu a izomorfizmu budeme hovořit o prostém, surjektivním a bijektivním lineárním zobrazení. Pro lineární zobrazení $L: X \to Y$ klademe $\mathrm{Im}(L) := L(X)$ a $\mathrm{Ker}(L) := L^{-1}(\{0\})$.

Lineární obal podmnožiny M lineárního prostoru (který se v algebře většinou označuje $\langle M \rangle$ nebo $[M]$) se v analýze zpravidla označuje symbolem Lin M.

Značení skalárního součinu i v analýze hodně kolísá, zde používáme symbol $\langle x, y \rangle$.

Nechť U, V jsou dva unitární prostory nad týmž tělesem. Řekneme, že $f: U \to V$ je *unitární zobrazení*, jestliže zachovává skalární součin, tj. $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro všechna $x, y \in U$. Každé unitární zobrazení je lineární a prosté (viz [Be], [Bi]).

3.29 Tvrzení. *Nechť U a V jsou reálné unitární prostory. Pak bijekce $g: U \to V$ je izometrie (ve smyslu teorie metrických prostorů), právě když je tvaru $g(x) = f(x) + a$, kde $f: U \to V$ je unitární bijekce a $a \in V$.*

Důkaz lze nalézt v [D II] (par. 3 za Větou 112) pro případ $U = V = \mathbb{R}^n$. Pak stačí použít Větu 14.18 z [Bi].

Množina $\mathbb{R}^n$ (s obvyklou strukturou) se nazývá eukleidovským prostorem, místo o $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ někdy hovoříme o rovině a reálné přímce.

Kanonickou bázi v $\mathbb{R}^n$ značíme vždy $(e_1, \ldots, e_n)$. Hodnost matice A značíme symbolem $\mathrm{h}(A)$. Kroneckerův symbol δ_{ij} je definován rovnostmi $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$.

Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ většinou ztotožňujeme s maticí typu $n \times 1$; někdy ale také s maticí typu $1 \times n$. Pro bilineární formu f na $\mathbb{R}^n$ s maticí A lze tedy psát $f(x,y) = \langle x, A \cdot y\rangle$, ale také $f(x,y) = x \cdot A \cdot y^T$.

Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je afinní podprostor $\mathbb{R}^n$, je-li tvaru $A = a+V := \{a+v\colon\ v \in V\}$, kde V je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$. Lineární prostor V (který je afinním prostorem A jednoznačně určen) se nazývá *zaměření* afinního prostoru A. Dimenzí afinního prostoru rozumíme dimenzi jeho zaměření; jednorozměrný afinní prostor se nazývá přímka, dvourozměrný rovina a $(n-1)$-rozměrný afinní podprostor $\mathbb{R}^n$ se nazývá nadrovina.

Několik speciálních označení

Nulový vektor lineárního prostoru X budeme zpravidla značit symbolem 0 (jen výjimečně 0_X, pokud by mohlo dojít k omylu).

Jsou-li $v_1, \ldots, v_k$ prvky prostoru $\mathbb{R}^n$, rozumíme symbolem $[v_1, \ldots, v_k]$ matici typu $n \times k$, jejíž i-tý sloupcový vektor je v_i. Je-li $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení, označujeme jeho matici (typu $m \times n$) symbolem $[L]$. (Platí tedy $L(x) = [L] \cdot x$.)

c) Afinní podprostory eukleidovských prostorů a afinní zobrazení

V této publikaci nepotřebujeme pojem abstraktního afinního prostoru (viz [Bi; str. 128]), stačí nám pojem afinního podprostoru $\mathbb{R}^n$.

Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je afinní podprostor $\mathbb{R}^n$, je-li tvaru $A = a+V := \{a+v\colon\ v \in V\}$, kde V je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$.

Lineární prostor V, který je afinním prostorem A jednoznačně určen, se nazývá *zaměření* afinního prostoru A. Je-li V zaměření A, platí $A = b + V$ pro každý bod $b \in A$. Dimenzí afinního prostoru rozumíme dimenzi jeho zaměření, jednorozměrný afinní prostor nazýváme přímka, dvourozměrný rovina a $(n-1)$-rozměrný podprostor $\mathbb{R}^n$ se nazývá nadrovina.

Nechť $A_1 \subset \mathbb{R}^n$, $A_2 \subset \mathbb{R}^m$ jsou afinní prostory a V_1, V_2 jsou jejich zaměření. Řekneme, že zobrazení $f\colon A_1 \to A_2$ je *afinní zobrazení*, existují-li lineární zobrazení $f_z\colon V_1 \to V_2$ a body a_1, a_2 takové, že

$$f(x) = a_2 + f_z(x - a_1). \tag{*}$$

Zobrazení f_z je jednoznačně určeno zobrazením f a vzorec (*) platí, právě když $a_2 = f(a_1)$.

Z Tvrzení 3.29 snadno vyplývá, že zobrazení $f\colon A_1 \to A_2$ je izometrie, právě když je afinní a zobrazení f_z je unitární bijekce unitárního prostoru V_1 na unitární prostor V_2.

Jsou-li $A_1 \subset \mathbb{R}^n$, $A_2 \subset \mathbb{R}^m$, $A_3 \subset \mathbb{R}^k$ afinní prostory a $f\colon A_1 \to A_2, g\colon A_2 \to A_3$ jsou afinní zobrazení, pak i jejich složení $g \circ f$ je afinní zobrazení.

3.7 Úmluvy a terminologie

Některé obvyklé úmluvy

a) Při definování nového pojmu má tradičně „implikace význam ekvivalence“. Například fráze „řekneme, že platí V, jestliže platí W“ vyjadřuje to, že podle definice $V \iff W$.

b) Mluvíme-li o výrokové funkci (predikátu) $V(x)$ jako o pravdivém výroku, myslíme tím, že $V(x)$ platí obecně (tj. pro všechna x z dohodnutého oboru). Řekneme-li například, že platí výrok $x > 3 \Longrightarrow x^2 > 9$; z kontextu je zřejmé, že dohodnutý obor je $\mathbb{R}$.

c) Často místo „$V(x)$ platí pro všechna $x \in M$“ píšeme jen „$V(x),\ x \in M$“.

d) Oba zápisy $A := B$, $B =: A$ říkají, že A definujeme touto rovností.

e) V případě, že *nepřesnost nemůže vést k omylům*, se často úmyslně používají nepřesné zápisy, které jsou ale přehlednější než zápisy zcela přesné. Například se často vynechávají závorky: pro $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se píše $f(x,y)$ místo $f((x,y))$; místo $f'(x)(v)$ se píše pouze $f'(x)v$ apod. Také bez častého „ztotožňování“ (např. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ s $\mathbb{R}^{n+m}$ nebo prvků prostoru $L^p(X,\mu)$ s funkcemi) by (zcela přesné) zápisy byly dosti nepřehledné. Dalším formálně nepřesným značením je klasický zápis funkcí. Hovoříme například o funkcích $f(x)$, $\sin x$, x^2 (místo o funkcích f, sin, $x \mapsto x^2$). Také funkci $(x,y) \mapsto y^3 x$ označujeme často symbolem $y^3 x$, pokud je z kontextu jasné, že jde o funkci dvou proměnných (a ne o číslo nebo třeba o funkci $x \mapsto y^3 x$). Toto klasické značení často ulehčuje čtení; ve složitějších situacích, kdy může dojít k omylu (jako v Kapitole 3), je nutno používat značení formálně přesné.

Některá obvyklá označení

Symbol $[a,b]$ označuje uzavřený interval v $\mathbb{R}$ s koncovými body $a < b$.

Klademe $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a na $\mathbb{R}^*$ definujeme obvyklé operace a uspořádání.

Uzavřeným (resp. otevřeným) intervalem v $\mathbb{R}^n$ rozumíme množinu $I_1 \times \cdots \times I_n$, kde všechny intervaly I_i jsou otevřené (resp. uzavřené). (Uzavřenost a otevřenost intervalů v $\mathbb{R}$ chápeme ve smyslu metrických prostorů.)

Je-li $M \subset X$, pak $C_M\colon X \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce množiny M.

Slovo „systém“ se užívá ve dvojím smyslu (z kontextu je vždy patrno, ve kterém). Například systém množin je nejčastěji jen přehlednější označení množiny množin; může však také jít o „indexovaný“ systém množin (tj. soubor množin) $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Je-li X vektorový prostor a $a, b \in X$, pak uzavřenou úsečkou $\overline{ab}$ rozumíme množinu $\{a + t(b-a)\colon t \in [0,1]\}$. Množina $C \subset X$ se nazývá konvexní, jestliže $\overline{ab} \subset C$, kdykoliv $a, b \in C$.

Symbol $u \approx v$ je užíván v nepřesných heuristických úvahách a znamená, že (čísla nebo vektory) u a v jsou si „přibližně rovny“. Většinou tím chceme říci, že číslo $\frac{\|u-v\|}{\|u\|}$ (a tedy i $\frac{\|u-v\|}{\|v\|}$) je „velmi malé“.

Terminologie týkající se zobrazení

Tato terminologie není v literatuře jednotná; zde používáme následující přístup.

Zobrazení f je dáno, když známe jeho definiční obor (který značíme D_f) a víme, jaké obrazy $f(x)$ mají prvky $x \in D_f$. Užíváme běžnou symboliku pro zadávání zobrazení; například oba zápisy

$$f(x) = x^2,\quad x \in (0,1); \qquad\qquad f\colon\ x \mapsto x^2,\quad x \in (0,1)$$

zadávají zobrazení f s definičním oborem $(0,1)$, které číslu $x \in (0,1)$ přiřazuje číslo x^2. Občas používáme obvyklé značení (které je velmi výhodné pro korektní označení zobrazení ve složitějších situacích), kdy nezávisle proměnnou neznačíme písmenem, ale tečkou. Například místo $x \mapsto f'(x)v$ píšeme $f'(\cdot)v$ apod.

Zobrazení f je dáno, právě když je dán jeho graf $G_f := \{(x, f(x))\colon x \in D_f\}$ a někdy se f a G_f ztotožňují; my to však (jak je v analýze z tradičních terminologických důvodů obvyklé) dělat nebudeme.

Pokud $A = D_f$ a pro každé $x \in A$ platí $f(x) \in B$, říkáme, že f je zobrazení *množiny A do množiny B*, a píšeme $f\colon A \to B$. Množina B však není zobrazením f jednoznačně určena. Je-li dáno $f\colon A \to B$ a $A \subset X$, říkáme, že f je zobrazení *z množiny X do B*. Tvrdíme-li, že pro každé $x \in M$ má $f(x)$ nějakou vlastnost, je v tom implicitně obsaženo, že $M \subset D_f$. Jen tehdy, když $M \subset A$, definujeme její obraz

$$f(M) = \{f(x)\colon x \in M\} := \{y \in B\colon \exists x \in M\colon y = f(x)\}.$$

Vzor $f^{-1}(M) = \{x \in A\colon f(x) \in M\}$ však definujeme pro libovolnou množinu M. Pro každé prosté zobrazení f je definováno obvyklým způsobem inverzní zobrazení $f^{-1}\colon H_f \to D_f$, kde $H_f := f(D_f)$ je obor hodnot zobrazení f. Připouštíme také *prázdné zobrazení*, pro které $D_f = G_f = \emptyset$. Symbolem $f\restriction_A$ označujeme restrikci (zúžení) zobrazení f na množinu $A \subset D_f$. Identické zobrazení na množině X značíme I_X.

Jsou-li f, g dvě zcela libovolná zobrazení, definujeme *vždy* jejich složení $g \circ f$ předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in f^{-1}(D_g)$. Tímto složením může být ovšem i prázdné zobrazení. To je definice obecnější, než se obvykle v učebnicích uvádí, je však zcela přirozená, užitečná a často užívaná: složené zobrazení $g \circ f$ je dáno předpisem $x \mapsto g(f(x))$ pro všechna x, pro které má výraz $g(f(x))$ smysl. I při této obecné definici zřejmě platí „asociativní zákon“: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Podobně vždy definujeme součet a součin dvou reálných (resp. komplexních) funkcí. Také pro zobrazení $f_1\colon A_1 \to B_1$, $f_2\colon A_2 \to B_2$ vždy definujeme zobrazení $(f_1, f_2)\colon (A_1 \cap A_2) \to B_1 \times B_2$ předpisem $(f_1, f_2)(x) := (f_1(x), f_2(x))$. Pokud napíšeme $f = (f_1, f_2)$ a zobrazení f_1, f_2 nebyla dříve definována, myslíme tím, že f_1, f_2 jsou složky zobrazení f (tj. $f = (f_1, f_2)$ a definiční obory f_1, f_2 a f jsou stejné).

Nespecifikujeme-li (výjimečně) definiční obor zobrazení zadaného jistým předpisem, máme na mysli „maximální definiční obor“. Například zápisy $u(x) := \ln(\sin x)$, $v(x) := g(f_1(x), f_2(x))$ znamenají, že $u = \ln \circ \sin$, $v = g \circ (f_1, f_2)$ apod.

Funkcí se většinou rozumí zobrazení do množiny čísel (reálných nebo komplexních) nebo do vektorového prostoru (vektorová funkce), často je však funkce pouze jiný název pro zobrazení.

Zdůrazněme, že *často říkáme, že zobrazení f má nějakou vlastnost, i když jde o vlastnost f vzhledem k dalším objektům.* Řekneme-li, že $f\colon A \to B$ je surjektivní (surjekce) nebo bijektivní (bijekce), není to vlastnost zobrazení f, ale dvojice (f, B).

Řekneme-li, že zobrazení z X do B má nějakou vlastnost, může jít o vlastnost trojice (X, f, B), případně struktur (například struktury metrického nebo vektorového prostoru) zadaných na X a B.

V Kapitole 3 používáme někdy pro přehlednost (zmenšení počtu závorek ve složitějších vzorcích) znak **.** pro „operaci evaluace“. Místo $f(x)$ tedy někdy píšeme $f.x$. Obvyklejší je užívání znaku $\cdot$ (viz [Ca]); ten by se však v některých vzorcích mohl plést se znakem pro nezávisle proměnnou (ve výrazu $f(\cdot)$ apod.).

Literatura

[Be] J. Bečvář, *Lineární algebra*, matfyzpress, Praha, 2000.

[Bi] L. Bican, *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2000.

[Ca] H. Cartan, *Calcul différentiel, Formes différentielles*, Hermann, Paris, 1967. (Francouzsky, existuje ruský překlad)

[Če] E. Čech, *Bodové množiny*, NČSAV, Praha, 1966.

[D I] V. Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia, Praha, 1984.

[D II] V. Jarník, *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1984.

[Fe] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, 1969. (Anglicky)

[Fi] G. M. Fichtengol'c, *Kurs differencial'nogo i integral'nogo isčislenija, I-III*, Fizmatgiz, Moskva, 1963. (Rusky)

[FM] S. Fučík, J. Milota, *Matematická analýza II. Diferenciální počet funkcí více proměnných*, SPN, Praha, 1975.

[J II] V. Jarník, *Integrální počet II*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1955.

[Ko] O. Kowalski, *Základy matematické analýzy na varietách*, Universita Karlova, Praha, 1975.

[KF] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*, SNTL, Praha, 1975.

[LM] J. Lukeš, J. Malý, *Míra a integrál*, Karolinum, Praha, 1993.

[Ru] W. Rudin, *Reálná a komplexní analýza*, Academia, Praha, 1977.

[Zo] V.A. Zorič, *Matematičeskij analiz, I, II*, Nauka, Moskva, 1984. (Rusky)