1 Doporučené ulohy – 1. série

1. Dokažte indukcí, že pro $x_1, \dots, x_n \in [0, \pi]$ platí nerovnost

$$\left| \sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \sin x_k.$$

2. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou reálná čísla větší než -1 mající stejné znaménko. Dokažte, že

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

***3.** Dokažte indukcí, že pro každé přirozené n platí

$$n! \le \left(\frac{n+1}{2} \right)^n .$$

4. Nechť $(a_n)_1^\infty$ je posloupnost zadaná rekurentně rovnostmi $a_1 = 1, a_2 = 2$ a $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ pro $n > 1$. Najděte její explicitní zadání, tj. formuli pro obecný (n-tý) člen.

5. Dokažte, že pro reálná čísla a, b platí $|a + b| \le |a| + |b|$,

$$\max(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} , \qquad \min(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}.$$

6. Platí výrok $\forall_{a\in\mathbb{R}} \forall_{b\in\mathbb{R}} \forall_{c\in\mathbb{R}} \; |a - b + c| \ge |a| - |b| - |c|$?

7. Platí následující výroky?

a) $\forall_{a\in\mathbb{R}} \exists_{\varepsilon>0} \exists_{\alpha\in\mathbb{R}} \forall_{x\in\mathbb{R}} \; x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1.$

b) $\exists_{a\in\mathbb{R}} \forall_{\varepsilon>0} \forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \exists_{x\in\mathbb{R}} \; x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1.$

2 Doporučené ulohy – 2. série

8. Nechť $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Nalezněte D_f, H_f, f^{-1}.

9. Nechť $\varphi : [0,\infty) \to [1,\infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi^2(x) - 1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1} a vyjádřete ji s pomocí φ^{-1}. Určete $D_{\psi^{-1}}$.

***10.** Načrtněte obor hodnot komplexní funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované předpisem $f(z) = z + 2\overline{z} + z\overline{z} + iz$.

***11.** (Parametrizace části Descartesova listu.) Nechť funkce g je definována na podmnožině roviny $M = \{(x,y) : x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x < 0,\ y > 0\}$ předpisem $g(x,y) = y/x$. Vypočtěte H_g a g^{-1}.

12. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X, B \subset X$. Rozhodněte, zda obecně platí :

a) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$; *b)* $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$;
c) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$; *d)* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

13. Charakterizujte zobrazení $f : M \to L$, pro která platí

a) $\forall_{A\subset M}\ \ f^{-1}(f(A)) = A$; b) $\forall_{B\subset L}\ \ f(f^{-1}(B)) = B$.

***14.** Platí výrok $\exists_{M\subset\mathbb{R}}\exists!_{f:M\to\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\quad x \neq 0 \Rightarrow f(x + \dfrac{1}{x}) = g(x)$, je-li

a) $g(x) = \sin x + \sin \dfrac{1}{x}$; b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; c) $g(x) = \dfrac{x^{16} + 1}{x^8}$?

3 Doporučené ulohy – 3. série

15. Zkoumejte vztahy mezi následujícími tvrzeními o $M \subset \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$.

(i) $s = \sup M$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in M :\ y \in (s - \varepsilon, s)$.
(iii) $\forall a < s \exists x \in M :\ x \geq a$.
(iv) $\bigcup_{x\in M} (-\infty, x) = (-\infty, s)$.
(v) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{x\in M} (-\infty, x + 1/n) = (-\infty, s]$.

16. Nechť f je reálná funkce na množině M. Dokažte, že f je omezená, právě když je omezená shora i zdola.

17. Pro které funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí výrok

$$\forall_{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \ (g \circ f \text{ je omezená} \Leftrightarrow g \text{ je omezená})?$$

18. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné omezené množiny. Dokažte, že

a) $\inf(-A) = -\sup A$; *b)* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;
c) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$;

kde $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ a podobně jsou definovány množiny $A + B$, $-A$.

19. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$, jestliže $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné omezené množiny?

20. Nechť $M \neq \emptyset$ a $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že

$$(*) \qquad \sup_{x\in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x).$$

Musí v (*) platit rovnost?

21. Za stejných předpokladů jako v předchozí úloze dokažte:

$$\sup_{x\in M} (f(x) + g(x)) \geq \sup_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x),$$

$$\sup_{x\in M} (f(x) - g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} g(x).$$

4 Doporučené ulohy – 4. série

22. Nechť $A \in \mathbb{R}$. Pro které posloupnosti reálných čísel $(b_k)_1^\infty$ platí obecně, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \ \Leftrightarrow \ \forall_{\varepsilon>0}\exists_k\forall_{n>b_k} \ |a_n - A| \leq \varepsilon \ ?$$

23. Z definice limity dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n-1}} = 0$.

24. Zkoumejte vztah následujících tvrzení o $M \subset \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$:
(i) $s = \sup M$;
(ii) s je horní odhad (závora) M a existuje posloupnost $(x_n)_1^\infty$ taková, že $x_n \in M$ a $x_n \to s$.

***25.** Nechť $p \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$, $n = 1, 2 \ldots$. Dokažte, že

$$a_n \to a \iff \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}.$$

Vypočtěte následující limity.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}.$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} [kx], \quad x \in \mathbb{R},$ kde $[y]$ označuje celou část z y.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}.$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right).$

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \quad a, b, c > 0.$

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}.$

33. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$

***34.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i\sqrt{n+i},$ je-li $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0.$

35. Platí obecně následující implikace, ve kterých $M \subset \mathbb{R}$ je aspoň dvoubodová a $f : M \to \mathbb{R}$?

(a) f je nerostoucí na $M \implies f$ není rostoucí na M.
(b) f není rostoucí na $M \implies f$ je nerostoucí na M.
(c) f není rostoucí na žádné dvouprvkové $A \subset M \implies f$ je nerostoucí na M.

36. Které z následujících funkcí jsou obecně monotónní, jestliže $f_i : (0,1) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, jsou rostoucí funkce a $g_i : \mathbb{R} \to (0,1)$, $i = 1, 2$ jsou klesající funkce?

a) $g_1 \circ f_2 \circ g_2 \circ f_1$;
b) $\max(f_1, f_2) \circ g_1 \circ (f_1 + f_2)$;
c) $(f_1 f_2) \circ g_1$;
d) $(g_1 g_2) \circ \min(f_1, f_2)$.

5 Doporučené ulohy – 5. série

37. Nechť $p \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $a_n \to \infty$ právě když $\sqrt[p]{a_n} \to \infty$.

38. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + \sqrt{n} + (-1)^n}{n^2 + n\sqrt{n}}$.

39. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+n} - n)$.

40. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\dfrac{n\pi}{4})\sqrt{n}$.

41. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3} - \sin n - \cos n)\dfrac{n^5}{\sqrt[n]{2} - 1}$.

42. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

43. Dokažte ekvivalenci: $\dfrac{1}{a_n} \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to \infty$.

****44.** Pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$?

Vypočtěte následující limity. Můžete použít, že $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

45. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

***48.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$.

***49.** Dokažte, že $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$.

50. Definujme posloupnost (a_n) rekurentně rovnostmi $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$.

51. Nechť $q > 0$. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ pomocí vět o limitě monotónní posloupnosti a o limitě posloupnosti s posunutým indexem.

52. Nechť $0 \le a \le 1$. Definujme posloupnost p_n rekurentně rovnostmi

$$p_1 = 0, \quad p_{n+1} = p_n + \frac{1}{2}(a - p_n^2).$$

Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} p_n$.

53. Vyšetřete limitu posloupnosti definované rekurentně rovnostmi

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}).$$

***54.** Vypočtěte hodnotu řetězového zlomku $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}$; tj. limitu posloupnosti

$$1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \cdots ;$$

přesněji: posloupnosti definované vztahy $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$.

6 Doporučené ulohy – 6. série

***55.** Dokažte implikaci $(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a,\ x_n > 0) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = a$. Toto tvrzení pak užijte k výpočtu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

56. Vypočtěte limity komplexních posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-i}{2+in}$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i}{n}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{3n+1}}{8^n-1}$; *d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2} + \dfrac{i}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right)$.

57. Nechť $q \in \mathbb{C}$. Dokažte, že posloupnost q^n je konvergentní, právě když $|q| < 1$ nebo $q = 1$.

58. Vypočtěte pomocí Stolzovy věty $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}},\ p \in \mathbb{N}$.

59. Vypočtěte součet řady komplexních čísel $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^k$.

60. Dokažte pomocí odhadu částečného součtu, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ diverguje.

61. Dokažte, že $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

62. Dokažte, že $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

***63.** Dokažte, že nekonečný součin $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots$ má nenulovou hodnotu.

64. Přeformulujte co nejjednodušeji následující výroky (kde $a, A \in \mathbb{R}$):

a) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{K>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x}\ (x \in P_\delta(a)) \Longrightarrow (|f(x)-A| < K\varepsilon)$;

b) $\exists_{\delta>0}\forall_{\varepsilon>0}\forall_{x}\ (x \in P_\delta(a)) \Longrightarrow (|f(x)-A| < \varepsilon)$;

c) $\exists_{K>0}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x}\ (x \in P_\delta(a)) \Longrightarrow (|f(x)-A| < K\varepsilon)$.

7 Doporučené ulohy – 7. série

Vypočtěte následující limity:

65. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

66. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

67. Vypočtěte limity (ve kterých $[y]$ je celá část z y):

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{[x]}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} ([x] - x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} x[1/x]$.

68. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Dokažte, že

(i) pokud $A \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

má-li jedna strana rovnosti smysl;

(ii) pokud $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, pak

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

má-li jedna strana rovnosti smysl.

69. Nechť g je funkce spojitá v 0 a $f(x) = g(x)\sin(x^{-2})$. Dokažte, že :

a) je-li $g(0) = 0$, pak 0 je bodem odstranitelné nespojitosti funkce $f(x)$;

b) je-li $g(0) \neq 0$, pak 0 je bodem nespojitosti druhého druhu funkce $f(x)$.

70. Zjistěte body spojitosti a klasifikujte body nespojitosti

a) Dirichletovy funkce;

b)* Riemannovy funkce.

8 Doporučené ulohy – 8. série

71. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

72. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}, a,b\in\mathbb{R}$.

73. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)} x^k$, $k=0,1,\dots$.

74. $\lim\limits_{x\to\infty} (\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x-1})$.

75. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \operatorname{tg} 2x\cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}-x)$.

76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$, $p\in\mathbb{R}$.

77. $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

78. Najděte taková $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

***79.** Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

80. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$.

81. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1+2^x)\ln(1+3/x)$.

82. $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x\ln a)\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln(x/a)}\right)$, $a>1$.

83. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1+\cos 3x}}{\ln(1+x^2)}$.

84. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{x^2}$.

85. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

86. („Neurčitost výrazu typu 1^∞.“) Nechť $a\in\mathbb{R}^*$. Určete množinu L všech $l\in\mathbb{R}^*$, pro která existují takové funkce f,g, že

$$\lim_{x\to a} f(x)=1,\quad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \quad \text{a} \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=l.$$

****87.** (Problémek 4) Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$. Podejte plnou charakterizaci funkcí f, pro které platí následující tvrzení:

Pro každou funkci g platí

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to A} g(y),$$

má-li jedna strana rovnosti smysl.

****88.** (Problémek 5) Dokažte, že množina A_f bodů, ve kterých existuje $\lim_{t \to x+} f(t)$, ale f není spojitá v x, je spočetná.

9 Doporučené ulohy – 9. série

V následujících příkladech vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci uvedených řad.

89. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)n^3.$

90. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}.$

91. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(\ln(\ln n))^{-\ln n}.$

92. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos 1/n)^{\alpha}\ln n, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

93. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{a^n n^2}, \quad a\in\mathbb{C}.$

94. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}},$
$a>0, b>0.$

95. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}.$

96. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}.$

97. $\displaystyle\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\dots$

98. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$

99. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1!+\cdots+n!}{(2n)!}.$

100. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n, \quad x\in\mathbb{C}.$

101. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}, \quad x\in\mathbb{C}.$

10 Doporučené ulohy – 10. série

102. Dokažte, že $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x.$

103. Nechť f je funkce definovaná na $(0, \pi/8)$ předpisem

$$f(x) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + 2x\right).$$

Vyjádřete f^{-1} pomocí elementárních funkcí.

104. (Příklad řešený v DI.) Nalezněte funkci $f(x_1, x_2)$ takovou, že

$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin f(x_1, x_2),$$

pokud levá strana leží v $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

105. Dokažte, že algebraická rovnice s reálnými koeficienty lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.

106. Nechť funkce $f : [0, 1] \to [0, 1]$ je spojitá na $[0, 1]$. Pak existuje bod $x \in [0, 1]$, pro který $f(x) = x$ (pevný bod). Dokažte.

107. (Příklad řešený v DI.) Dokažte, že $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$

108. $\lim\limits_{x\to\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right).$

109. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{i \arcsin x}{ix + \sin x - 2x},$
$(i^2 = -1).$

110. $\lim\limits_{x\to\infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x + 1}\right).$

111. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(1 + x) - \operatorname{arctg}(1 - x)}{x}.$

112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n + 1}{n}\right) \arcsin \frac{1}{n}.$

113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^a \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right), \ a \in \mathbb{R}.$

114. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arccotg} n - \arcsin\frac{1}{n}\right).$

115. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi n}{4n-2} - \sin\frac{\pi n}{2n+1}\right).$

116. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arccos(1-1/n)\, n^{a},\ a\in\mathbb{R}.$

11 Doporučené ulohy – 11. série

V následujících příkladech je vhodné kombinovat L'Hospitalovo pravidlo s „elementárními“ metodami výpočtu limit.

117. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{\sin x}\right).$

118. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^{(x^x-1)}.$

119. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

120. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}.$

121. (Příklad řešený v DI) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$

122. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\,\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right).$

123. Nechť $f(x)=x^3+3x$. Dokažte, že f je prostá a vypočtěte
a) $(f^{-1})'(4)$; b)* $(f^{-1})''(4)$.

124. Vyšetřete derivaci funkce

$$f(x)=x\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right).$$

125. Vyšetřete derivaci funkce

$$f(x)=\arcsin\frac{2x}{x^2+1}.$$

Dokažte následující nerovnosti.

126. $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\le|x-y|.$

127. $\displaystyle\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ pro $0<b<a.$

128. Nalezněte globální (tj. absolutní) extrémy funkce
$f(x)=x^3-3x+2,\quad x\in[-3,2].$

129. Dokažte, že pro $\alpha\ge 1$ a $x>-1$ platí $(1+x)^\alpha\ge 1+\alpha x.$

130. Dokažte, že

$$2x<\sin x+\operatorname{tg} x \qquad \text{pro } 0<x<\frac{\pi}{2};$$

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x \quad \text{pro } x>0;$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}x < \sin x < x && \text{pro } \ 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ &x^e \le e^x && \text{pro } x > 0. \end{aligned}$$

131. Pro která $a \in \mathbb{R}$ se parabola $y = ax^2$ dotýká grafu funkce $y = \ln x$ (tj. existuje bod ležící na obou grafech, ve kterých mají tyto grafy společnou tečnu)?

132. Dokažte, že funkce $f(x) = x + x^2 \sin(2/x)$, $f(0) = 0$, je rostoucí v bodě 0, je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, ale není rostoucí na žádném okolí bodu 0.

133. Dokažte, že funkce $g(x) = x^2(2 + \sin(1/x))$, $g(0) = 0$, má ostré lokální minimum v bodě 0, je diferencovatelná na $\mathbb{R}$, ale není monotónní na žádném jednostranném okolí bodu 0.

134. Vyšetřete existenci asymptot v ∞ a $-\infty$ funkce $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

135. Vyšetřete existenci asymptoty v ∞ funkce $f(x) = (\ln x)^x / x^{\ln x}$.

Vyšetřete průběh (včetně vyšetření konvexity, asymptot a existence jednostranných derivací) následujících funkcí:

136. $f(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

137. $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

138. $h(x) = \dfrac{\sin x}{\sin(x + \pi/4)}$.

139. $f(x) = |x + 2| e^{-\frac{1}{x}}$.

140.
$f(x) = \sqrt[3]{|x|^3 + b^3}$, $b > 0$.

141.
$f(x) = e^{-x^2}$.

***142.** Nechť f je funkce ryze konvexní na intervalu $(a, c]$ i na intervalu $[c, b)$. Nechť f je spojitá na (a, b). Pak f je ryze konvexní na (a, b), právě když $f'_+(c) \ge f'_-(c)$. Dokažte.

****143.** Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která má tu vlastnost, že žádné tři body grafu f nejsou kolineární. Musí být f ryze konvexní nebo ryze konkávní?

***144.** Dokažte, že funkce $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ je rostoucí na $(0, \infty)$.

***145.** Nechť existuje $f''(x) = A \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + 2h) + f(x) - 2f(x + h)}{h^2} = A.$$

146. Nechť funkce f má derivaci na $(0, \infty)$, existuje $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ a $y = ax + b$ je rovnicí asymptoty funkce f v ∞. Dokažte, že pak $\lim_{x\to\infty} f'(x) = a$. Lze vynechat předpoklad existence $\lim_{x\to\infty} f'(x)$?