

Ukázková písemka - Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a známých limit používáte. Užití věty není nutno přesně formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Při užití Heineho věty napište, na jakou funkci a posloupnost ji užíváte. Používáte-li základní limity, které byly na přednášce, vždy je napište (bez důkazu, v obecném tvaru). Pokud užíváte limitu, kterou znáte z cvičení nebo odjinud, stručně ji znovu odvoďte.

Příklad 1 Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n+1}) (3^n + (-1)^n n).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.

(4 body)

Příklad 2 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.

(4 body)

Příklad 3 Nechť f je funkce zadaná předpisem $f(x) = 1 + x \operatorname{arccotg} x$.

a) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $(-1, f(-1))$. (Rovnici tečny napište bez užití cyklometrických funkcí.)

b) Určete (pokud existuje) asymptotu v ∞ funkce f .

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.

(1,5 + 1,5 bodů)

Příklad 4 Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}, \quad f(1) = 0, \quad f(-1) = 0.$$

Podstatnou součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi závěry, které ovšem musí být podloženy výpočtem.

(Nezapomeňte vyšetřit též obě jednostranné derivace v bodech $1, -1$, obor hodnot, lokální a absolutní extrémy, konvexitu, asymptoty atd. a své závěry **napsat**.)

(7 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A

(a) Definujte (analyticky pomocí nerovností, ne geometricky), co znamená, že funkce f je konvexní na intervalu (a, b) .

(b) Napište znění věty o vztahu limity a nerovností pro posloupnosti (3 tvrzení). (2+2 body)

Úloha B Nechť $f(x) = \operatorname{arctg} x + x$. Spočtěte $(f^{-1})'(0)$. Napište přesné znění vět, které užíváte, a přesně vysvětlete jak. Ověřte splnění předpokladů vět. (4 body)

Úloha C Nechť $-1 < f'(x) < 2$ pro $x \in (0, \infty)$ a nechť

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3.$$

Podrobně dokažte, že f je shora omezená na $(0, \infty)$. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(4 body)

Úloha D1 Podrobně dokažte L'Hospitalovo pravidlo pro limitu typu " $\frac{0}{0}$ ", případ limity zprava v bodě $a \in R$. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(4 body)

Úloha D2 Zformulujte a podrobně dokažte Heineho větu (o limitě funkce). Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(6 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.