

MATEMATICKÝ PROSEMINÁŘ I

Rovnice a soustavy rovnic s parametrem

Cvičení

- 1 V oboru $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic s reálným parametrem λ :

$$\begin{aligned}x + \lambda y &= 1, \\ \lambda x + 2y &= \lambda.\end{aligned}$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Soustava má právě jedno řešení (x, y) právě tehdy, když $|\lambda| \neq 1$.
- (b) Soustava má právě jedno řešení (x, y) pro $|\lambda| > \sqrt{2}$.
- (c) Pro každé řešení (x, y) platí, že $x = y$.
- (d) Pro $\lambda = -1$ nemá soustava řešení.
- (e) Pro $\lambda = 1$ existuje řešení splňující $x \geq 0 \wedge y \leq 0$.

- 2 V oboru $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic s reálným parametrem p :

$$\begin{aligned}x - y &= 2, \\ px + y &= 4.\end{aligned}$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Soustava má právě jedno řešení (x, y) pro každé $p \neq -1$.
- (b) Pro $p = 2$ soustava nemá řešení.
- (c) Pro každé $p > 1$ splňuje každé řešení soustavy (x, y) podmínku $x \geq 0 \wedge y \leq 0$.
- (d) Soustava má právě jedno řešení pro každé $p \in \mathbb{R}$.
- (e) Pro $p = 0$ existuje řešení splňující $x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

- 3 V oboru $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic s reálným parametrem λ :

$$\begin{aligned}x + \lambda y &= 1, \\ x + 2y &= \lambda.\end{aligned}$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- (a) Soustava má právě jedno řešení (x, y) právě tehdy, když $|\lambda| \neq 2$.
- (b) Soustava má právě jedno řešení (x, y) pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (c) Pro $\lambda = 1$ každé řešení (x, y) splňuje $x \geq 0 \wedge y \geq 0$.
- (d) Pro $\lambda = 1/2$ nemá soustava řešení.
- (e) Pro $\lambda = 1/2$ existuje řešení (x, y) splňující $x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

- 4 Je dána soustava dvou rovnic o dvou neznámých x, y s reálným parametrem p :

$$\begin{aligned}px + y &= 2p + 1, \\ x + py &= 1.\end{aligned}$$

Určete, pro která $p \in \mathbb{R}$ této soustavě vyhovuje právě jedna dvojice kladných čísel x, y .

- 5 Určete všechny dvojice (x, y) , pro něž platí

$$\frac{1}{p+x} + \frac{1}{p+y} + 5 = \frac{1+5p}{p},$$

kde p je prvočíslo.

- 6** Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned}2px + 3y &= 1, \\ px + (1 - 3p)y &= -1.\end{aligned}$$

s parametrem $p \in \mathbb{R}$. Určete všechna řešení (x, y) v závislosti na parametru p .

- 7** V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\sqrt{p+x} = x + \sqrt{p},$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr.

- 8** V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$2|x| - p = \frac{2|x| - 1}{p},$$

kde $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je parametr.

- 9** V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\frac{x^2}{2x-1} = p,$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr.