

MATEMATICKÝ PROSEMINÁŘ I

Relace a zobrazení

Důležité pojmy

- **Kartézský součin.** *Kartézský součin* množin A, B je množina

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- **Relace.** *Binární relací* R z množiny A do množiny B nazýváme libovolnou množinu $R \subseteq A \times B$.
 - Speciálně pokud $A = B$, pak R nazýváme relací *na* množině A .
 - Pokud $(a, b) \in R$, pak říkáme, že *prvek* a je v relaci R s *prvkem* b . Místo $(a, b) \in R$ píšeme aRb .

- **Inverzní relace.** Binární relace $R^{-1} \subseteq B \times A$ se nazývá *inverzní k* relaci R , jestliže platí

$$bR^{-1}a \iff aRb$$

pro každé $a \in A$ a $b \in B$.

- **Složení relací.** Složená relace $R \circ S$ je relací z množiny A do množiny C taková, že pro každé $a \in A$ a $c \in C$ platí

$$a(R \circ S)c \iff (\exists b \in B : aRb \wedge bSc).$$

- Speciálně, pokud skládáme relaci samu se sebou, používáme zápis $R \circ R = R^2$.
- Induktivně platí: $R^n = R \circ R^{n-1}$ pro $n \geq 2$.
- **Vlastnosti relací.** Mějme relaci R na množině A . Řekneme, že R je
 - (i) *reflexivní*, jestliže $\forall a \in A : aRa$.
 - (ii) *symetrická*, jestliže $\forall a, b \in A : aRb \implies bRa$.
 - (iii) *slabě antisymetrická*, jestliže $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \implies a = b$.
 - (iv) *silně antisymetrická*, jestliže $\forall a, b \in A : aRb \implies \neg(bRa)$.
 - (v) *tranzitivní*, jestliže $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \implies aRc$.
- **Relace ekvivalence.** Relace $\sim$ na množině A je *relací ekvivalence*, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
- **Třída ekvivalence.** Máme-li relaci ekvivalence $\sim$ na množině A a libovolný prvek $a \in A$, pak třídou ekvivalence určenou prvkem a je množina

$$[a]_{\sim} := \{x \in A \mid a \sim x\}.$$

- **Zobrazení.** Relace $f \subseteq X \times Y$ se nazývá *zobrazením*, jestliže pro každé $x \in X$ existuje nejvýše jedno $y \in Y$ takové, že xfy .
 - Fakt, že f je zobrazení z množiny X do množiny Y zapisujeme jako $f : X \rightarrow Y$.
 - V případě zobrazení místo xfy používáme zápis $f(x) = y$.
 - Často, pokud jsou X a Y číselné množiny, hovoříme o funkci (avšak v mnohých odvětvích matematiky se tyto termíny používají jako synonyma).
- **Vlastnosti zobrazení.** Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je
 - *injektivní*, pokud $\forall x \in X : x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$.
 - *surjektivní*, pokud $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.
 - *bijektivní*, pokud je injektivní a zároveň surjektivní.

Cvičení

- 1 Jsou dány množiny $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1\}$, $D = \emptyset$. Vypište všechny prvky následujících množin:

- (a) $A \times D$
- (b) $D \times B$
- (c) $C \times A$

- 2 Vyjádřete počet prvků množiny $A \times B$ v závislosti na počtu prvků konečných množin A a B .

- 3 Relace R z množiny $A = \{1, 2, 3\}$ do množiny $B = \{a, b\}$ je dána výčtem

$$R = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}.$$

Znáznorněte relaci R pomocí

- (a) kartézského grafu
- (b) uzlového grafu

Dále zapište výčtem R^{-1} .

- 4 Uvažujme relaci S na množině $\mathbb{R}$ definovanou následovně:

$$xSy \stackrel{\text{def.}}{=} y = 2|x|.$$

Jak vypadá graf S , S^{-1} a $S \circ S = S^2$?

- 5 Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{5, 6, 7, 8\}$. Zapište výčtem následující množiny:

- (a) $R_1 = \{(a, b) \in A \times B \mid b \leq 2a\}$
- (b) $R_2 = \{(a, b) \in A \times B \mid a \leq 3 \Rightarrow b = 3a + 2\}$
- (c) $R_3 = \{(a, b) \in A \times B \mid b = a^2\}$
- (d) $R_4 = \{(a, b) \in A \times A \mid b = a^2\}$

- 6 Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků a svá tvrzení zdůvodněte:

- (a) Existuje binární relace, která je reflexivní a antireflexivní zároveň.
- (b) Existuje binární relace, která je symetrická a slabě antisymetrická zároveň.
- (c) Existuje binární relace, která je symetrická a silně antisymetrická zároveň.
- (d) Existuje binární relace, která je reflexivní a silně antisymetrická zároveň.

- 7 Určete vlastnosti daných relací nejprve na množině $\mathbb{R}$ a poté na množině $\mathbb{N}$ (reflexivita, symetrie, antisymetrie, tranzitivita):

- (a) $(x, y) \in R_1 \iff x + y = 0$
- (b) $(x, y) \in R_2 \iff |x| = |y|$
- (c) $(x, y) \in R_3 \iff x \cdot y \geq 0$

- 8 Na množině $M = \{a, b, c, d\}$ jsou dány relace $R = \{(a, b), (b, b), (c, d)\}$ a $S = \{(b, a), (b, d), (d, d)\}$. Zapište výčtem relace níže a určete jejich vlastnosti.

- (a) $R \circ R$
- (b) $S \circ S$
- (c) $R \circ S$
- (d) $S \circ R$
- (e) $(R \circ R) \circ (S \circ S)$.

- 9 Na množině L všech lidí uvažujme relace R a S :

$$aRb \stackrel{\text{def.}}{\iff} a \text{ je rodičem } b,$$

$$aSb \stackrel{\text{def.}}{\iff} a, b \text{ jsou sourozenci (a } a \neq b).$$

Popište relace R^{-1} , S^{-1} , $R \circ S$, $S \circ R$, R^2 a S^2 a určete jejich vlastnosti.

10 Uvažujme relaci R na $\mathbb{N}$ danou: kRm právě když $m = k^2$. Určete R^n .

11 Dokažte, že pro relace R, S platí: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

12 Mějme relaci D a číslo $m \in \mathbb{N}$ na množině $\mathbb{Z}$ zadanou jako

$$D = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a, b \text{ mají stejný zbytek po celočíselném dělení } m\}.$$

Je D relace ekvivalence? V kladném případě popište jednotlivé třídy ekvivalence.

13 Zapište všechny disjunktní rozklady množiny $A = \{a, b, c\}$ a k nim příslušné ekvivalence na množině A .

14 Uvažujme množinu M obsahující všechny konečné posloupnosti nul a jedniček. Definujme relaci S následovně:

$$xSy \stackrel{\text{def.}}{\iff} \text{posloupnosti } x \text{ a } y \text{ obsahují stejný počet jedniček.}$$

Je S relací ekvivalence? V kladném případě popište jednotlivé třídy ekvivalence.

15 Na množině $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ definujeme relaci $\sim$ následovně:

$$X \sim Y \stackrel{\text{def.}}{\iff} X \text{ a } Y \text{ leží na stejné přímce procházející bodem } (0, 0).$$

Určete, zda $\sim$ je ekvivalence. V kladném případě popište jednotlivé třídy ekvivalence. Jak by se situace změnila, kdybychom v množině X uvažovali i počátek? (Tzn. $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.)

16 Mějme rozklad množiny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ na množiny $A_r, r > 0$, kde A_r označuje kružnici se středem v počátku a poloměrem r . Popište ekvivalenci zadanou tímto rozkladem.

17 Jsou dány množiny $A = \{a, b, c, d\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$. Rozhodněte, které z binárních relací R_1 až R_4 jsou zobrazení z A do B .

- (a) $R_1 = \{(a, 1), (b, 2), (d, 3)\}$
- (b) $R_2 = \{(a, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 3)\}$
- (c) $R_3 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 1)\}$
- (d) $R_4 = \{(b, 3)\}$

18 Jsou dány množiny $X = \{1, 2, 3\}$ a $Y = \{a, b, c\}$. Uvedte příklad zobrazení z množiny X do množiny Y , které

- (a) je injektivní, ale není bijektivní,
- (b) není surjektivní, ani injektivní,
- (c) je bijektivní.

19 Je dána úsečka KL v rovině $\mathbb{R}^2$. Necht M je množina všech pravidelných n -úhelníků v $\mathbb{R}^2$ se stranou KL , kde $n \geq 3$. Rozhodněte, zda relace z množiny M do množiny $\mathbb{N}$

- (a) f definovaná předpisem

$$(A, n) \in f \stackrel{\text{def.}}{\iff} A \text{ má právě } n \text{ vrcholů,}$$

- (b) g definovaná předpisem

$$(A, n) \in g \stackrel{\text{def.}}{\iff} A \text{ má právě } n \text{ úhlopříček,}$$

je zobrazení z M do $\mathbb{N}$. V kladném případě rozhodněte, zda je zobrazení injektivní, surjektivní nebo bijektivní a zda k němu existuje inverzní zobrazení. Jinak upravte danou relaci tak, aby se jednalo o zobrazení.