

MATEMATICKÝ PROSEMINÁŘ I

Komplexní čísla

Připomenutí

- Množina **komplexních čísel** $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, kde $i = \sqrt{-1}$ je tzv. *imaginární jednotka*.
- **Absolutní hodnota**. Absolutní hodnotou komplexního čísla z je

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- **Argument komplexního čísla**. Buď $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak definujeme množiny

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} z &= \{\alpha \in \mathbb{R} \mid z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)\}, \\ \arg z \in \{\varphi\} &= \operatorname{Arg} z \cap (-\pi, \pi).\end{aligned}$$

Číslo $\arg z$ nazýváme *argumentem* čísla z . Jedná se o jediný prvek množiny $\operatorname{Arg} z \cap (-\pi, \pi)$.

- **Tvary zápisu komplexních čísel**. Mějme číslo $z \in \mathbb{C}$ s argumentem φ .
 - (1) *Algebraický tvar*: $z = a + bi$
 - (2) *Goniometrický tvar*: $z = |z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$.
 - (3) *Exponenciální tvar*: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.
- **Reálná a imaginární část**. Pro $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$ zavádíme značení $a = \operatorname{Re} z$ a $b = \operatorname{Im} z$. Čísla $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ nazýváme po řadě *reálná část* a *imaginární část* komplexního čísla z .

Cvičení

- 1 Určete goniometrický tvar komplexního čísla:
 - (a) $e^{i\frac{\pi}{8}}$
 - (b) $\frac{1}{2}e^{i\frac{17\pi}{6}}$
 - (c) $2\sqrt{3} + 2i$
- 2 Zapište v exponenciálním tvaru:
 - (a) -5
 - (b) $1 - i$
- 3 Určete algebraický tvar komplexního čísla:
 - (a) $e^{i\pi}$
 - (b) $18e^{i\frac{8\pi}{3}}$
- 4 Zapište v exponenciálním tvaru čísla a , $-a$, je-li:
 - (a) $a = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
 - (b) $a = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$
- 5 Zobrazte v Gaussově rovině obrazy všech komplexních čísel z , pro která platí:
 - (a) $|z + 3 + 2i| \leq 3$
 - (b) $|z + i| \geq |z + 1|$

(c) $|2 - 3i| \geq |z| \geq |z - 4|$

(d) $|z + 3i| + |z - 5i| = 10$

- 6** V Gaussově rovině libovolně zvolte obrazy dvou různých nenulových komplexních čísel z_1, z_2 a sestrojte obraz čísla

$$\frac{z_1 + 2z_2}{|z_1 + 2z_2|}.$$

- 7** Graficky (konstrukčně, bez výpočtů) určete $|a|$ a $|b|$, jestliže

$$a + bi = \frac{2(2 - i)}{3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}.$$

- 8** Vypočtěte v goniometrickém tvaru:

$$\left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)^{-60}.$$

- 9** Dokažte základní vztahy pro goniometrické funkce pomocí komplexních čísel.

- 10** Odvoďte vzorce pro $\cos 3x, \sin 3x$.

- 11** Určete všechny 4. odmocniny z čísla

$$a = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

- 12** Řešte binomickou rovnici

$$8x^3 + 27 = 0.$$

- 13** Řešte kvadratické rovnice s komplexními koeficienty:

(a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(b) $x^2 + (5i - 3)x - 4 - 8i = 0$

(c) $ix^2 + 2x - 5i = 0$

(d) $(1 - i)x^2 - (5 - i)x + 6 - 4i = 0$