

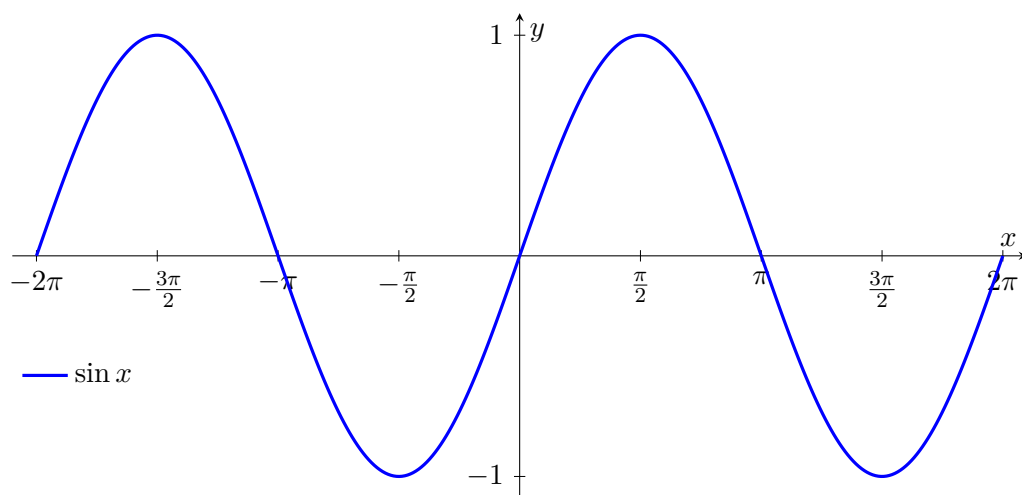
MATEMATICKÝ PROSEMINÁŘ I

Goniometrické funkce

Připomenutí

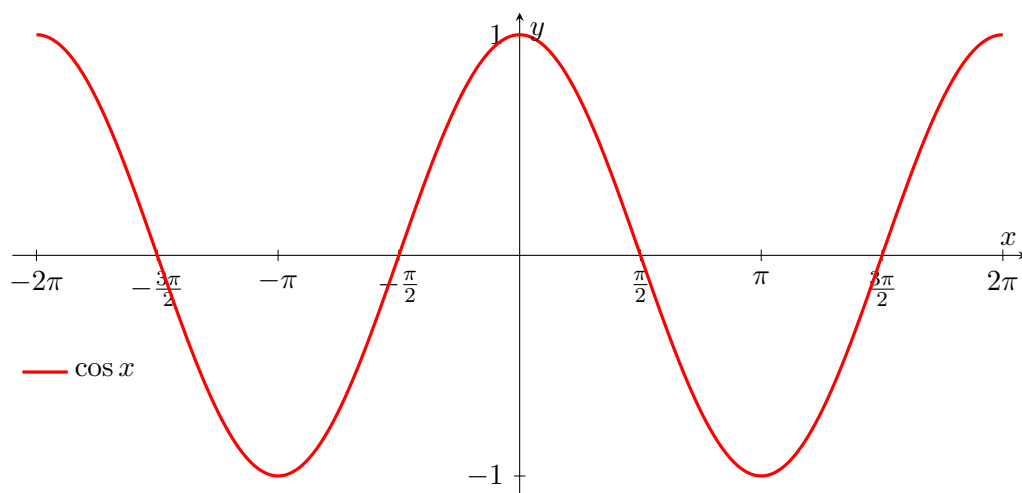
Funkce sinus

- $D(\sin) = \mathbb{R}$
- $H(\sin) = \langle -1, 1 \rangle$
- Délka periody: 2π



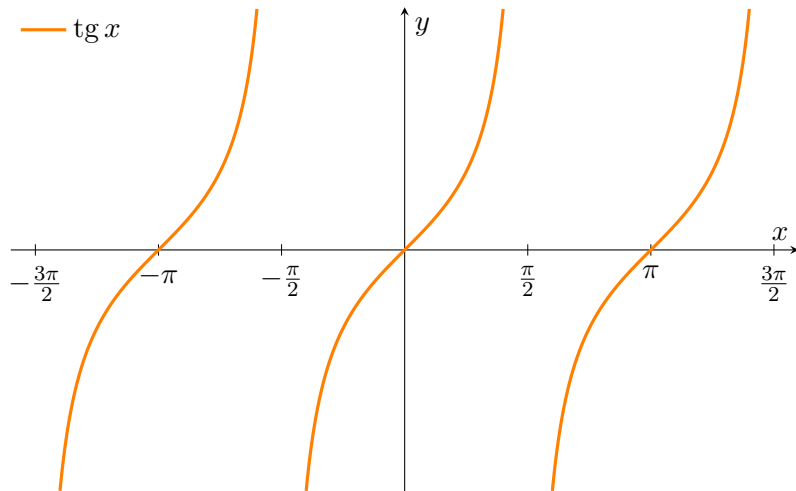
Funkce kosinus

- $D(\cos) = \mathbb{R}$
- $H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle$
- Délka periody: 2π



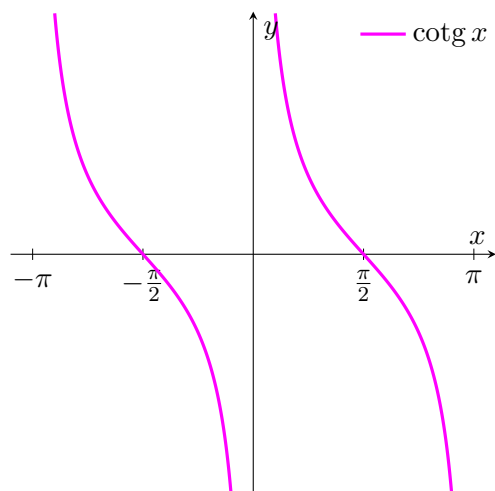
Funkce tangens

- $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$
- $H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$
- Délka periody: π
- Asymptoty: $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$



Funkce kotangens

- $D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$
- $H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$
- Délka periody: π
- Asymptoty: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



Vztahy mezi geometrickými funkcemi

Má-li pravá i levá strana smysl, pak platí následující vztahy:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$,
- $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$,
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$,
- $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$,
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Cvičení

1 Zapište základní velikost orientovaného úhlu v obloukové míře:

- (a) 21π (b) -120° (c) $\frac{125\pi}{4}$

2 Zapište základní velikost orientovaného úhlu ve stupních:

- (a) -520° (b) 12π (c) $-\frac{68\pi}{3}$

3 Odvoďte hodnoty funkcí $\sin$, $\cos$, tg , cotg v úhlech 30° , 45° a 60° .

4 Jsou dány funkce $f(x) = \sin(x - \pi)$ a $g(x) = x^2$. Určete obor hodnot a zapište předpis funkce

- (a) $f(g(x))$ (b) $g(f(x))$

5 Načrtněte graf a určete obor hodnot funkce f zadané předpisem:

- (a) $f(x) = 3 \sin 2x$ (f) $f(x) = \left| \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \right|$
(b) $f(x) = - \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| + 1$ (g) $f(x) = -3 \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$
(c) $f(x) = \operatorname{tg}(2|x| - \pi)$ (h) $f(x) = \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$
(d) $f(x) = -2 \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$ (i) $f(x) = \frac{\sin x + |\sin x|}{\sin x - |\sin x|}$
(e) $f(x) = -2 \sin |3x|$

6 Užitím vztahů mezi goniometrickými funkcemi vypočítejte

- (a) $\sin 75^\circ$ (b) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ (c) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$

7 Upravte a určete podmínky:

- (a) $\frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \cos 2x}$ (c) $\cos x + \cos(x + 120^\circ) + \cos(x + 240^\circ)$
(b) $\frac{\sin 5^\circ - \sin 85^\circ}{\cos 130^\circ - \cos 50^\circ}$ (d) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

8 Vhodně omezte definiční obor jednotlivých goniometrických funkcí a sestrojte grafy funkcí k nim inverzních.

9 Určete definiční obor a načrtněte přibližný graf funkce g zadané předpisem:

(a) $g(x) = [\operatorname{arctg} x]$

(d) $g(x) = \sin x \cos x$

(b) $g(x) = x \operatorname{sgn}(\sin x)$

(e) $g(x) = \sin^2 x$

(c) $g(x) = \cos \pi x$

(f) $g(x) = \arcsin(\sin x)$