

MATEMATICKÝ PROSEMINÁŘ I

Elementární funkce

Důležité pojmy

- **Funkce.** Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je funkce, jestliže X, Y jsou číselné množiny, tj. podmnožiny $\mathbb{R}$ (lze však uvažovat i komplexní funkce). V různých odvětvích matematiky se často pojmy *funkce* a *zobrazení* nerozlišují.

- **Definiční obor.** Definiční obor funkce f je množina

$$D(f) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : f(x) = y\}.$$

- **Obor hodnot.** Obor hodnot funkce f je množina

$$H(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\}.$$

- **Sudá funkce.** Funkce f je *sudá*, pokud

$$\forall x \in D(f) : f(x) = f(-x),$$

za předpokladu, že je $f(-x)$ definováno.

- **Lichá funkce.** Funkce f je *lichá*, pokud

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = -f(x),$$

za předpokladu, že je $f(-x)$ definováno.

- **Vlastnosti funkce.** Funkce f je na intervalu $I \subseteq D(f)$

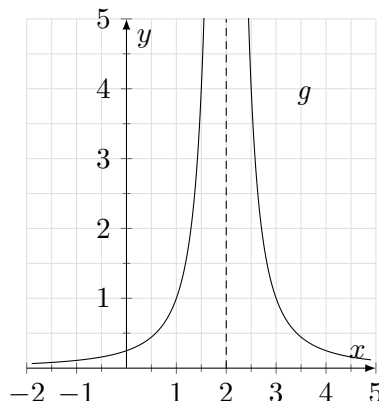
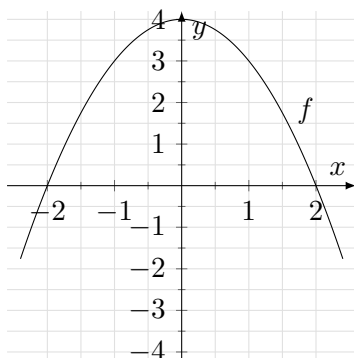
- (i) *rostoucí*, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
- (ii) *klesající*, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.
- (iii) *neklesající*, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (iv) *nerostoucí*, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
- (v) *prostá (injektivní)*, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

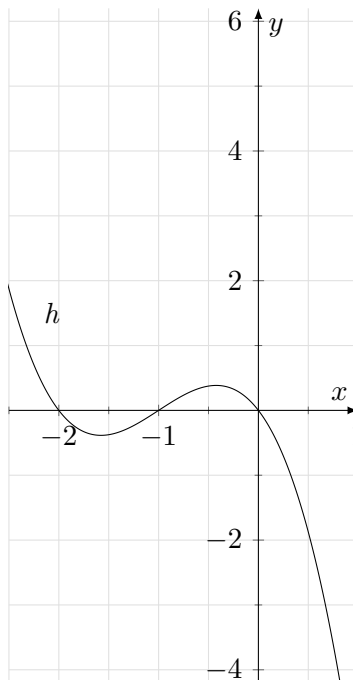
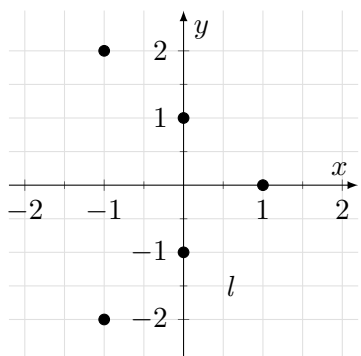
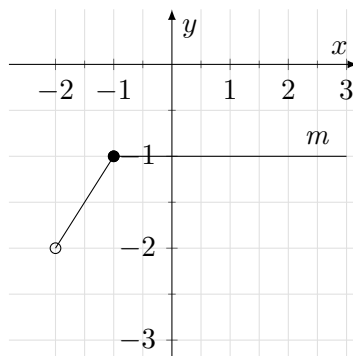
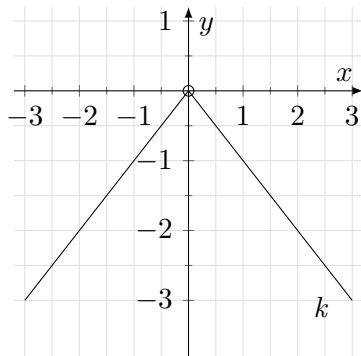
Cvičení

- 1 Pro funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vypočítejte $f(-3)$ a stanovte, pro jaké hodnoty x je $f(x) = 0$, je-li

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^3 - 32x}}{x^2 + 8x + 16}.$$

- 2 U každého grafu na obrázku určete, zda se jedná o graf funkce. Pokud ano, vyčtěte z grafu *definiční obor* a *obor hodnot* dané funkce a *odhadněte její předpis*.





3 Rozhodněte, zda dané funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou si rovny:

- (a) $f(x) = 1, g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
- (b) $f(x) = x, g(x) = x^2 \cdot x^{-1}$
- (c) $f(x) = \sin x, g(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$

4 Určete (maximální) definiční obory uvedených funkcí:

- (a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$
- (b) $g(x) = \frac{x}{13x^2 + 10x - 3}$
- (c) $h(x) = \frac{1}{|x + 3| - 4}$
- (d) $r(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$
- (e) $\ell(x) = \sqrt{x + 4} + \sqrt{\frac{7}{10 - x}}$
- (f) $k(x) = \log(x - 3)$
- (g) $m(x) = \frac{1}{\log_3(x + 4) - 3}$
- (h) $p(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x + 1)}$
- (i) $j(x) = \ln \ln(x^2 - x - 5)$
- (j) $s(x) = \frac{\sqrt{-|x| + 3}}{\log(x^2 - 2)}$

5 Pouze na základě předpisu určete, které z funkcí jsou sudé/liché na svém definičním oboru:

- (a) $f(x) = |x| - x$
- (b) $g(x) = \frac{x^2}{|x| + 3}$
- (c) $h(x) = \frac{|x| - x^2}{3x}$
- (d) $w(x) = \sqrt[5]{x + 5}$

6 Načrtněte graf a určete definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$ funkce f , je-li dána předpisem:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2}{x} \qquad (b) \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-3} \qquad (c) \quad f(x) = |x+1| - |x-2| + |x-3|$$

7 Načrtněte graf, určete definiční obor $D(f)$, obor hodnot $H(f)$ a vlastnosti funkce f , je-li dána předpisem:

$$(a) \quad f(x) = \frac{2x-1}{x+4} \qquad (c) \quad f(x) = 2^{-x} \\ (b) \quad f(x) = 2 - \sqrt{||x| - 1|} \qquad (d) \quad f(x) = x^{\operatorname{sgn}(-|x|)} \\ (e) \quad f(x) = -2 \cdot \lfloor x^{-2} \rfloor$$

8 Napište předpis inverzní funkce f^{-1} k funkci f dané předpisem a načrtněte vždy do jednoho obrázku grafy funkcí f i f^{-1} . Určete definiční obor $D(f^{-1})$ a obor hodnot $H(f^{-1})$ funkce f^{-1} .

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \qquad (c) \quad f(x) = x^2 + 1, \quad D(f) = \mathbb{R}_0^+ \\ (b) \quad f(x) = \frac{x}{x-2} \qquad (d) \quad f(x) = e^{x-1} + 2 \\ (e) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}, \quad D(f) = \mathbb{R}_0^+$$

9 Zapište předpisy složených funkcí níže, pokud

$$f(x) = 3x, \quad g(x) = \frac{x^2}{5}, \quad h(x) = \ln(x-1).$$

$$(a) \quad f(g(x)) \qquad (c) \quad h(g(x)) \qquad (e) \quad g(h(x)) \\ (b) \quad f(h(x)) \qquad (d) \quad g(f(x)) \qquad (f) \quad h(f(g(x)))$$