

MATEMATICKÝ PROSEMINÁŘ I

Matematické důkazy (přímý, nepřímý, sporem a indukcí)

1 Dokažte **přímo** Sinovou větu.

2 Dokažte **přímo** tvrzení

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

3 Dokažte **přímo** tvrzení: $\forall x \in \mathbb{R} : 4 \cos x + \cos 2x \geq -3$.

4 Dokažte **nepřímo** tvrzení: *Nechť n je přirozené číslo. Pokud n^2 je dělitelné třemi, pak i n je dělitelné třemi.*

5 Dokažte **přímo** a **sporem** tvrzení: *Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}^+$ platí*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

6 Dokažte **sporem**, že $\sqrt{3}$ je iracionální.

7 Dokažte **matematickou indukcí**, že součet prvních n kladných lichých čísel je roven n^2 .

8 Dokažte tvrzení: *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí, že $10^{2n+1} + 1$ je dělitelné 11.*

9 Dokažte **přímo** a **indukcí** tvrzení: *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $n^3 + 5n$ je dělitelné číslem 3.*

10 Dokažte tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

11 Dokažte tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

12 Dokažte tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

13 Dokažte tvrzení:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

14 Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je číslo $10^n - 4$ dělitelné šesti.

15 Dokažte tvrzení:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0^+ : \sum_{i=0}^n i!i = 0!0 + 1!1 + 2!2 + \dots + n!n = (n+1)! - 1.$$

16 Dokažte tvrzení: $\forall x \in \langle -1, \infty \rangle \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1+nx$.

17 Dokažte tvrzení: $\forall n \in \mathbb{N} : n < 2^n$. Zformulujte obdobné tvrzení pro nerovnost $n^2 < 2^n$ a dokažte jej.

- 18** Dokažte Moivreovu větu: $\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.
- 19** Uvažujme čtvercovou šachovnici se stranou o velikosti 2^n . Začerníme jedno z polí. Dokažte, že zbylá pole lze zcela pokrýt dlaždicemi složenými ze tří čtverečků ve tvaru L (tzv. trimin) tak, aby se nepřekrývaly.

- 20** Najděte chybu v důkazu indukci:

Tvrzení: Všechna přirozená čísla se navzájem rovnají.

Důkaz: Zapišeme si tvrzení formálně jako výrok $V(n)$, kde $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} : x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Pro $n = 1$ výrok triviálně platí. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Podle indukčního předpokladu se tedy libovolná n -tice reálných čísel rovná, tj. $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, ale také zároveň $x_2 = x_3 = \dots = x_{n+1}$. To znamená, že

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1},$$

nebo-li platí i $V(n+1)$.

- 21** Mějme libovolnou konečnou množinu X a označme $|X| = n$. Zaveďme si následující značení:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\},$$

tj. $\mathcal{P}(X)$ obsahuje všechny podmnožiny množiny X . Dokažte, že konečná množina X má vždy 2^n podmnožin, tzn. $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.