

Písenná zkouška z Matematiky I pro FSV (B)
ZS 2024/2025

Úloha 1 (13 bodů). Spočítejte následující limitu posloupnosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((n^7 + 7n)^8 - (n^8 + 8n^2)^7 \right) \left(\sqrt[12]{n^{12} - 6} - n \right)^4.$$

Úloha 2 (13 bodů). Spočítejte následující limitu posloupnosti.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(\sqrt{n} + \sqrt[3]{n})}{\log(\sqrt{n} + \sqrt[4]{n})} \right)^{\sqrt[6]{n} \log(n)}.$$

Úloha 3 (11 bodů). Nalezněte definiční obor a vyšetřete spojitost funkce f . Spočítejte derivaci, resp. jednostranné derivace, funkce f ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \sin^2(x) \sqrt{x^2 + x}.$$

Úloha 4 (13 bodů). Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log \left(3x + \frac{1}{2x} \right).$$

Řešení

Úloha 1. $\frac{7}{4}$.

Úloha 2. e^2 .

Úloha 3. Funkce f je definovaná a spojitá na $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \sin^2(x) + 2 \sin(x) \cos(x) \sqrt{x^2+x}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$f'_-(-1) = -\infty, \quad f'_+(0) = 0.$$

Úloha 4. $D_f = C_f = (0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Pro $x \in D_f$ máme $f'(x) = \frac{6x^2-1}{6x^3+x}$.

Funkce f je rostoucí na intervalu $\left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, +\infty \right\rangle$, klesající na intervalu $\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ a nabývá globálního minima

$\frac{\log(6)}{2}$ v bodě $\frac{1}{\sqrt{6}}$. $H_f = \left\langle \frac{\log(6)}{2}, +\infty \right\rangle$. Pro $x \in D_f$ máme $f''(x) = \frac{-36x^4+24x^2+1}{x^2(6x^2+1)^2}$. Funkce f je konvexní na

intervalu $\left(0, \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{6}} \right)$, konkávní na intervalu $\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{6}}, +\infty \right)$ a bod $\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{6}}$ je její inflexní bod. Funkce f nemá asymptotu v $+\infty$.