2. Limita posloupnosti

1. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}.$$

2. Spočtěte limity následujících posloupností:

$$\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}, \quad \{(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}, \quad \left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right\},$$
$$\left\{\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right\}, \quad \left\{\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}\right\}.$$

3. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+4^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

4. Vypočtěte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}\right) \quad$ pro $\quad a>b>0.$

5. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}.$$

6. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$

7. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

8. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n}.$$

9. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}.$$

10. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (n^2+\sin(n+1))(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}).$$

11*. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right),$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

12. Spočtěte limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2-(n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}.$$

13. Zjistěte, zda existuje $\lim_{n\to\infty} x_n$, kde $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$

2. Výsledky a některé postupy

1. 0, 2, 2

2. 0, limita neexistuje, $-1/2$, $1/3$, $1/4$

3. 0, 4, 0

4. $1/a$

5. Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}} \\
&= \frac{(n^3+n)^{\frac13}-(n^3+1)^{\frac13}}{(n^3+2n)^{\frac13}-(n^3+n)^{\frac13}} \cdot \frac{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}} \cdot \\
&\cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+n)^{\frac23}}{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{\frac23}+(1+\frac{2}{n^2})^{\frac13}(1+\frac{1}{n^2})^{\frac13}+(1+\frac{1}{n^2})^{\frac23}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac23}+(1+\frac{1}{n^2})^{\frac13}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac13}+(1+\frac{1}{n^3})^{\frac23}}
\end{aligned}$$

Odtud již vyplývá, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}} = 1.$

6. Spočítejme nejprve tuto limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^6}}} = 1.$$

Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^3\sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3+\sqrt[4n]{2n}} = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} -\frac{(2n+1)^3\sqrt[2n+1]{2n+1}}{(2n+1)^3+\sqrt[4n+2]{2n+1}} = -1.$$

To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

7. Platí:

$$\begin{aligned}(n+4)^{100} - (n+3)^{100} &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} 4^j - \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} 3^j \\ &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} (4^j - 3^j) = 100 n^{99} + P_1(n);\end{aligned}$$

$$(n+2)^{100} - n^{100} = 200 n^{99} + P_2(n),$$

kde $P_1,\ P_2$ jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_1(n)}{n^{99}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{P_2(n)}{n^{99}} = 0.$$

Dostáváme tak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100 + \frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200 + \frac{P_2(n)}{n^{99}}} = 1/2.$$

8. Víme, že pro $k \in \mathbf{N}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^k} = +\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ n^2 \leq n^3 \leq n^4 \leq 2^n \leq 3^n \leq 4^n.$$

Platí tedy

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ 4 \leq \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} \leq 4 \sqrt[n]{6}.$$

Víme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} = 1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} = 4.$$

9. 0, 0, 0

10. Platí

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) \cdot \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + \sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}}.\end{aligned}$$

Víme, že platí:

(1) $\forall n \in \mathbf{N} :\ |\sin(n+1)| \leq 1$,
(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,
(3) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (1) a (2) plyne $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot \left(\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

11. 3, 1/2
12. 1, 2/3
13. 2